3学期

No.1 12/2

積分

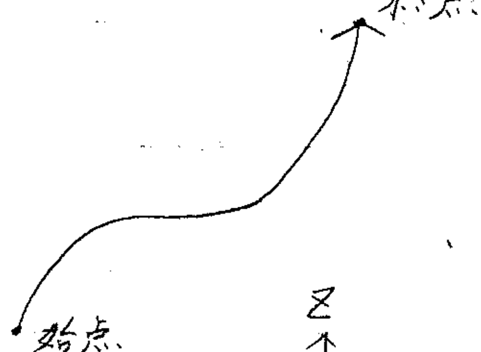
ベクトル解析

$\mathbb{R}^3$ (空間)

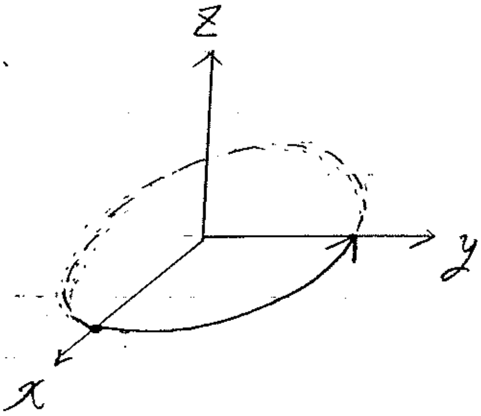
線積分を思い出してみる

曲線

parameter で表現される



$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (a \leq b)$$



$$\left\{\begin{array}{ccc} [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \in & & \\ t & & \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t \\ 0\end{pmatrix} \\ & & \\ [0,\frac{\pi}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix}\cos 2s \\ \sin 2s \\ 0\end{pmatrix} \\ \in & & \\ s & & \end{array}\right.$$

同一な曲線を示す

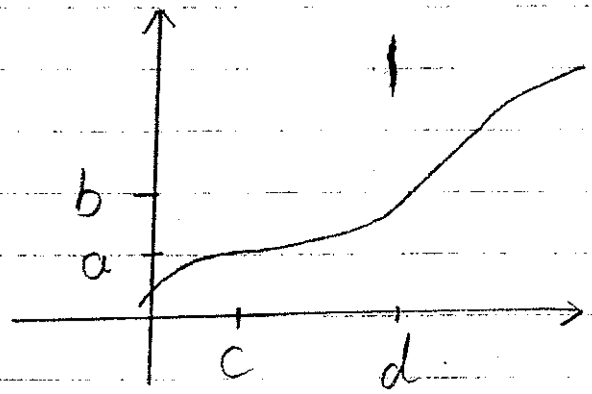
ベクトル場 $\boldsymbol{f}$

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)\, dt$$

始点から終点まで動いた時に力の場 $\boldsymbol{f}$ から受ける仕事量

parameter の変更

$$\varphi:[c,d] \longrightarrow [a,b]$$
$$s \in [c,d], \quad \varphi(s) \in [a,b]$$



ただし $\varphi'(s) > 0$

γ の代りに $\gamma\circ\varphi = \overset{タウ}{\tau}$ (合成関数)

を考えればよい。

$$\int_c^d \mathbf{f}(\tau(s))\cdot\tau'(s)\,ds$$

合成関数の微分

$$= \int_c^d \mathbf{f}(\gamma(\varphi(s)))\cdot\gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds$$

$$= \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$\varphi'(s) > 0$ であること = 始点と終点が区間のどちら側かを決める(順)。

⇓

$\varphi'(s) < 0$ ならば向きは反対(逆)になる

orientation

力 $\begin{cases} \text{platonic} : \text{ベクトル場} \\ \text{pragmatic} : \text{1次の微分形式} \end{cases}$

スカラー場 = 0次の微分形式　　$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

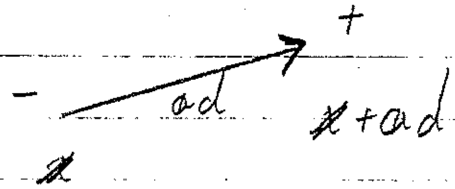
$\quad d \downarrow$ 微分

1次の微分形式

$$\varphi(x+\alpha d) - \varphi(x) = d\varphi(\alpha)d$$

$d \in D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

左辺：φ 境界上の積分

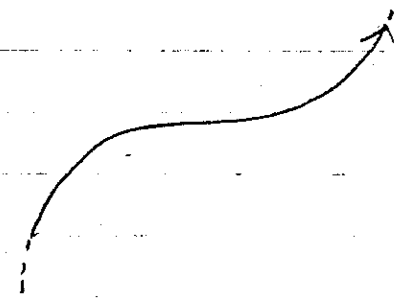


右辺：$d\varphi$ という1次の微分形式の

x から $x+\alpha d$ までの道に沿う積分

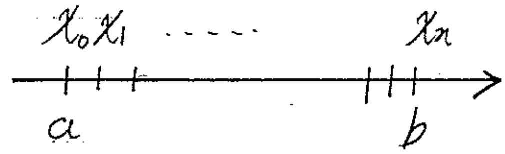
曲線

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$



$$\int_\gamma d\varphi$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} d\varphi$$



$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \varphi(\gamma(x_{i+1})) - \varphi(\gamma(x_i)) \right\}$$

細かく（$x_{i+1} - x_i \in D$ なくらい）

区間を分ける.

No.

Date

$$= \left\{ \cancel{\varphi(\gamma(x_1))} - \varphi(\gamma(x_0)) \right\} + \left\{ \varphi(\gamma(x_2)) - \cancel{\varphi(\gamma(x_1))} \right\} + \cdots$$

$$= \varphi(\gamma(x_n)) - \varphi(\gamma(x_0))$$

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

これが基本的には微積分の基本定理の考え方.

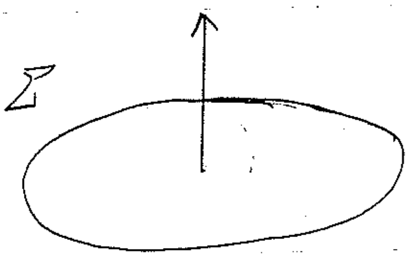
面積分 ―面にも向きをつける―

$\Downarrow$

どちらを"表"とし"裏"とするか、ということ

$\boldsymbol{f}$: 流れの場=2次の微分形式

Σ



$$\int_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

面上に閉曲線があるとする.

$\Downarrow$

表の側から見て反時計回りを正

No.

Date

1次の微分形式 $\longrightarrow$ 2次の微分形式

ω 微分 $d\omega$

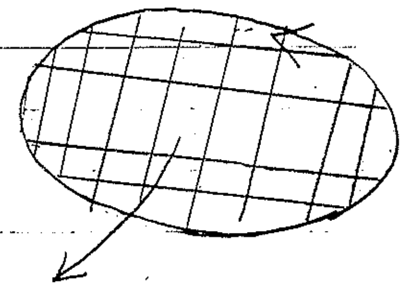
$$\boxed{\int_{\partial\Sigma}\omega = \int_{\Sigma} d\omega}$$

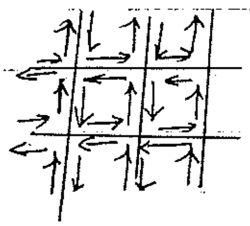
微小な曲面について
これが成り立つように $d\omega$ という
ものの実体を定めた.

今空間の中に閉曲線を考える. それを縁とする曲面Σを考える

$$\int_{\Sigma} d\omega = \sum_i \int_{\Sigma_i} d\omega$$

$$= \sum_i \int_{\partial\Sigma} \omega .$$





⇒隣りあった微小な曲面で
周囲の線積分がキャンセル

結局, 無限に小さい
levelで定めれば ⇐
普通の大きさのものについても
同様に扱える.

体積分

2次の微分形式 ⟷ 3次の微分形式

ω $\quad$ $d\omega$

$$\boxed{\int_{\partial V} \omega = \int_{V} d\omega}$$

閉曲面で囲まれた領域

これが無限小のlevelで成り立つように $d\omega$ (3次)を定めた

しかし 隣り合う部分があればその部分は打ち消し合う