No.

Date

No. 10　　11/18　　レポート締切 12月1日(火) 問題は後述

微分形式の微分　　$\omega \longmapsto d\omega$

0次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 1次の微分形式 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 2次の微分形式

‖

スカラー場

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$　　　$\varphi' \doteqdot d\varphi$

$\mathbb{R}^3 \to \{\mathbb{R}^3$から$\mathbb{R}$の線形写像$\}$

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$\downarrow$

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

古典的ベクトル解析

$$\varphi : \text{スカラー場} \overset{\text{grad}}{\Longrightarrow} \underset{\text{ベクトル場}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{ベクトル場}}{\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}} \overset{\text{rot}}{\Longrightarrow} \underset{\text{ベクトル場}}{\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

記号の説明

∇ (ナブラと読む)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

として作用素のベクトルを表すものとする。

No.

Date

$$\begin{cases} \cdot\ \mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi \\ \cdot\ \mathrm{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

だから

∇を数のベクトルのように見たてて $\mathbb{a} = \nabla$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$ とすると

たとえば

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & g \\ \frac{\partial}{\partial z} & h \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}$$

として考えられれば 上の { のような表記も ありうる。

repot I , II

前回の $\int_{\partial(\alpha; e_1, e_2)} \omega$ の計算を2通りのやり方で解く.

単純展開整理をI, 係数決定法はIIとする.

・0次の微分形式 $\Rightarrow$ 1次の微分形式

$$\varphi \qquad\qquad d\varphi$$

$\gamma : D_1 \to \mathbb{R}^3$

$\{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

$\gamma(0) = x$

$e \in D$

$$\int_{\partial(\gamma;e)} \varphi = \int_{(\gamma;e)} d\varphi$$

$\Downarrow$ 境界部分は $\gamma(e)$ と $\gamma(0)$

$\gamma(e) - \gamma(0) = \gamma(e) - x$

$\Downarrow$

左辺 : $\varphi(\gamma(e)) - \varphi(x)$

・1次の微分形式 $\Rightarrow$ 2次の微分形式

$$\omega \qquad\qquad d\omega$$

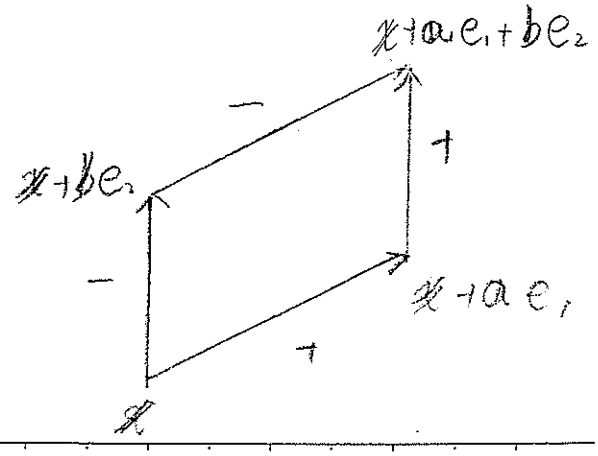
$\gamma : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto x + a d_1 + b d_2$

$(e_1, e_2) \in D^2$

これが出るように下を定める

$\Downarrow$

$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2)} \omega = \int_{(\gamma, e_1, e_2)} d\omega$$



No.

Date

2次の微分形式 $\longrightarrow$ 3次の微分形式

$$\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$$

$$\gamma ; (d_1, d_2, d_3) \in D^3 \longmapsto x + a d_1 + b d_2 + c d_3$$

$(e_1, e_2, e_3) \in D$ (固定)

あるかどうかはまだ分からない

⇓

左辺を計算してみる

$$\int_{\partial(\gamma; e_1, e_2, e_3)} \omega = \int_{(\gamma; e_1, e_2, e_3)} d\omega$$

境界

⇓

$$-(\gamma_0^1; e_2, e_3) + (\gamma_{e_1}^1; e_2, e_3) + (\gamma_0^2; e_1, e_3) - (\gamma_{e_2}^2; e_1, e_3) - (\gamma_0^3; e_1, e_2) + (\gamma_0^3; e_1, e_2)$$

+と−の決め方は?

$\gamma_0^1 : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto \gamma(0, d_1, d_2)$

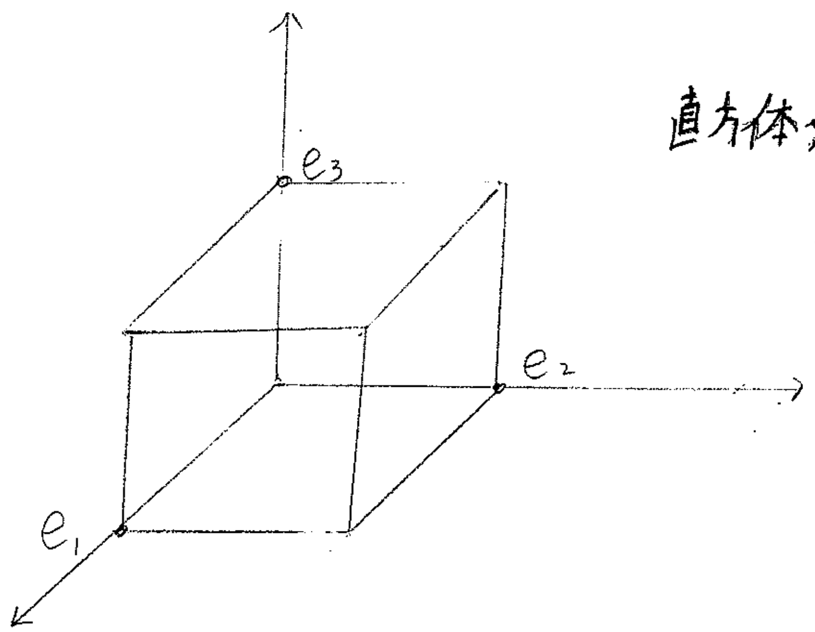
$\gamma_{e_1}^1 : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto \gamma(e_1, d_1, d_2)$

$\gamma_0^2 : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto \gamma(d_1, 0, d_2)$

$\gamma_{e_2}^2 : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto \gamma(d_1, e_2, d_2)$

$\gamma_0^3 : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto \gamma(d_1, d_2, 0)$

$\gamma_{e_3}^3 : (d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto \gamma(d_1, d_2, e_3)$



直方体外向きに垂線を立てる
これと一致するとき正の係数

たとえば、

$$(x_0 ; e_2, e_3) = x(0, e_2, e_3)$$

・e_2からe_3に右ネジを回したときネジが進むのは立体の内側
よって $x(0, e_2, e_3)$ は負の係数

$$\int_{\partial(x; e_1, e_2, e_3)} \omega = -\int_{(x_0 ; e_2, e_3)} \omega + \int_{(x'_{e_1}, e_2, e_3)} \omega + \cdots\cdots$$

(ここでは最初の2項のみに絞ります)

$$= -\Bigg\{ \underbrace{f(x)}_{\text{まとめてみる}} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Bigg\} e_2 e_3$$

$$+ \Bigg\{ f(x+ae_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g(x+ae_1) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h(x+ae_1) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Bigg\} e_2 e_3$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$= \left\{ f'(x)(a) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + g'(x)(a) \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + h'(x)(a) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$e_1 e_2 e_3$

(※₁式) + - - - - - -

$= I$

report III, IV

単純展開と後述の方法で解く

（単純計算では

$$f'(x)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, a_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)\, a_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)\, a_3$$

を利用せよ.）

または

$$I = \left\{ \underbrace{\left| \begin{pmatrix} f'(x)(a) \\ g'(x)(a) \\ h'(x)(a) \end{pmatrix} \; b \; c \right|}_{(※_2式)} + \left| a \begin{pmatrix} f'(x)(b) \\ g'(x)(b) \\ h'(x)(b) \end{pmatrix} c \right| + \left| a \; b \begin{pmatrix} f'(x)(c) \\ g'(x)(c) \\ h'(x)(c) \end{pmatrix} \right| \right\}$$

$e_1 e_2 e_3$

cf. $\det(a, b, c) = a \cdot (b \times c)$ に注意せよ

(※₁ → ※₂ へは)

三重線型，反対称であることから

$$\varphi(a, b, c) = \alpha\, dx \wedge dy \wedge dz\, (a, b, c)$$