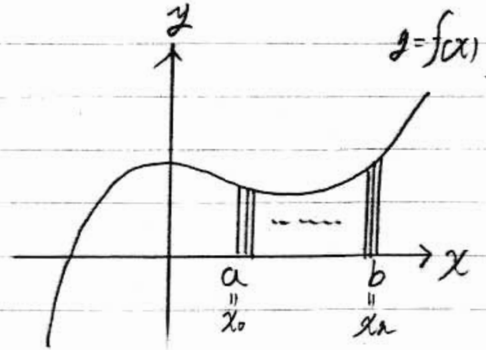
No. 8　10/28

Report → 11/9 締切
問題は後述.

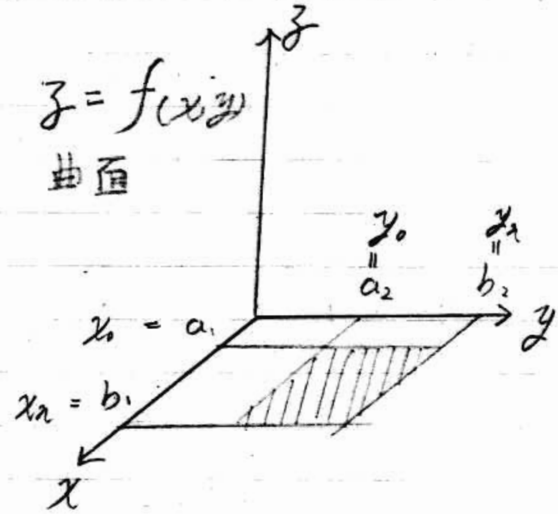
$$\int_b^a f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,d_i$$

細かさはどれくらいならばいいか?



$d_i = (x_{i+1} - x_i) \in D$

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)\,dx\,dy$$



$$\begin{cases} d_i^1 = x_{i+1} - x_i \in D \\ d_j^2 = y_{j+1} - y_j \in D \end{cases}$$

となるくらいの
間隔では

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\, d_i^1 d_j^2$$

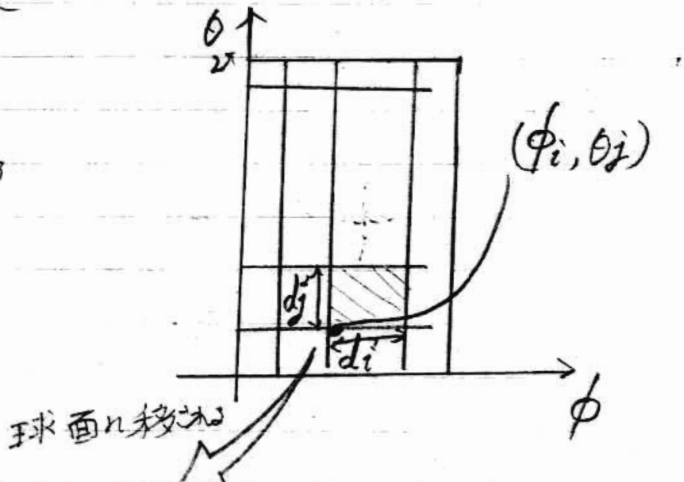
$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

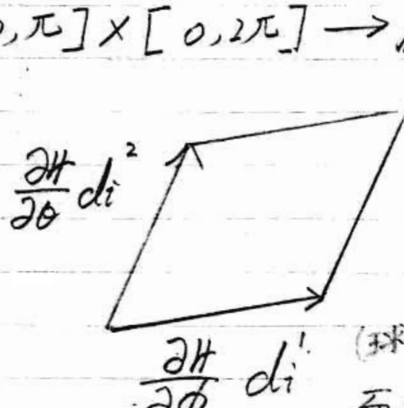
前回の表面積の話に戻ると　（原点中心，半径 a の球面）

$0 \leqq \phi \leqq \pi$

$0 \leqq \theta < 2\pi$

$[0,\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$





（球面上の）

面積　$\frac{\partial H}{\partial \phi} d_i^1 \times \frac{\partial H}{\partial \theta} d_j^2 = \left|\frac{\partial H}{\partial \phi} \times \frac{\partial H}{\partial \theta}\right| d_i^1 d_j^2$

No.

Date

前回の球面の表面積 ⇒ 極座標 (r, θ, φ) ← 前回は定数 $r=a$ で実質2変数

report I

球の体積を求める. ⇒ r も動く.

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) d\theta \, d\phi \, dr$$

3×3の det と考えてもよいけど (　) 内は分かっているので $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ と内積を取ると良いだろう.

(⇑ 球を平行六面体分割)

球面の上半分 $(z \geqq 0)$ について

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} a \sin^2\phi \cos\theta \\ a^2 \sin^2\phi \sin\theta \\ a^2 \sin\phi \cos\phi \end{pmatrix} d\phi \, d\theta$$

$a^2 \sin\phi \cos\phi = \frac{a^2}{2} \sin 2\phi$ に注意して

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} a \sin^2\phi \sin\theta \\ -a^2 \sin^2\phi \cos\theta \\ (a^2 \sin\phi \cos\phi)\theta \end{bmatrix}_0^{2\pi} d\phi$$

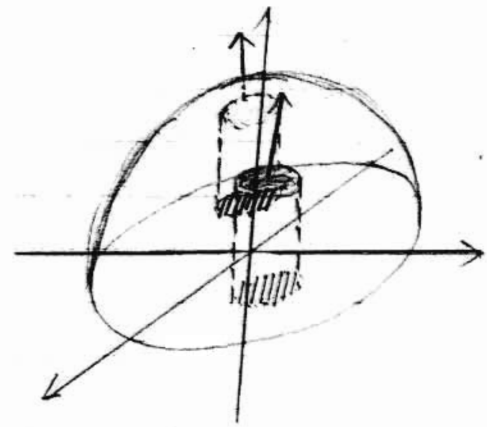
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi a^2 \sin\phi \cos\phi \end{pmatrix} d\phi$$

$$= \pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} d\phi$$

$$= \pi a^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\cos 2\alpha \end{bmatrix}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi a^2 \end{pmatrix}$$

半球の底面積



⇓

緯度が同じで半球面の反対側に来るようなベクトル同士(x, y)成分が互いにキャンセル

⇐

z成分はその微小な面積の正射影の面積 全部合わせれば底面全体の面積

report II

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial H}{\partial \phi} \times \frac{\partial H}{\partial \theta}\, d\phi\, d\theta$$ を求めよ.

report III

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \boldsymbol{f} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \times \frac{\partial H}{\partial \theta}\right) d\phi\, d\theta$$

単位時間に球面からあふれる水の体積

を求めよ.

report IV

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

単位時間に右の立方体からあふれる水の体積