$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_\gamma (\mathrm{grad}(\varphi))\cdot d\mathbb{r} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{とする}$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dx_3}{dt} \right\} dt$$

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & \varphi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

合成関数の微分

微積分の基本定理

$$\varphi(x_1(b), x_2(b), x_3(b)) - \varphi(x_1(a), x_2(a), x_3(a))$$

$$\Downarrow$$

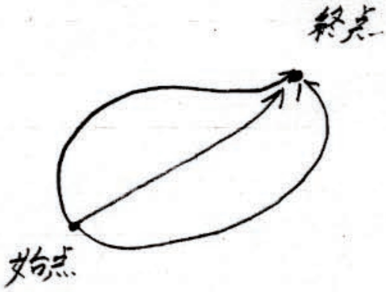
始点と終点のみでその途中の変化によらない。

No.

Date

No. 6　10/14

力　$\mathbb{f}$（ベクトル場）



スカラー場：φ　があって

$$\mathbb{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

ならば $\mathbb{f}$ は <u>保存力</u> である、というのが前回の内容

⇓

$\mathbb{f}$がする仕事は始点と終点のみで決まる。

今日の命題

『$\mathbb{f}$が保存力ならば スカラー場：φ が存在して

$$\mathbb{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

と書ける』

証明

空間の中に1点 $\boldsymbol{x}_0$ を固定

$\varphi(\boldsymbol{x})$ = ($\boldsymbol{x}_0$ から $\boldsymbol{x}$ まで動いた時に与えられる仕事量)

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{f}:\text{保存力})$$

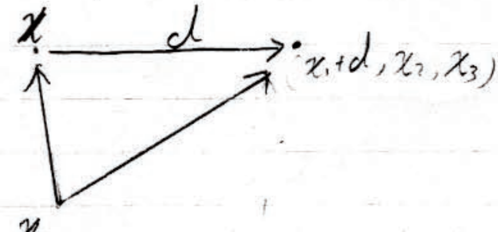
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 \end{cases} \quad \text{目標、これを確かめたい}}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ として

偏微分

$$d\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1+d, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$\boldsymbol{x}_0$ から (x_1+d, x_2, x_3) への経路は任意だから
途中 $\boldsymbol{x}$ を通っていいじゃないか (右図)



$$\varphi(x_1+d, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$
$$= d f_1(\boldsymbol{x})$$

よって

$$d\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = d f_1(\boldsymbol{x})$$

$$\underline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})}$$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ も同様.

◎ エネルギー保存則

力の場: $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}(-\varphi)$
と仮定する ($\boldsymbol{f}$ が保存力と仮定する).

場の中で質点が動いているとする. 質点の位置は時刻 t の関数
$\boldsymbol{x}(t)$ で表され、その質量を m とする.

No.

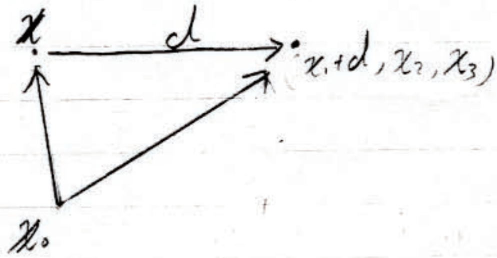
Date

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ として

偏微分

$$d\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1+d, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$\boldsymbol{x}_0$から(x_1+d, x_2, x_3)への経路は任意だから
途中$\boldsymbol{x}$を通ってていいじゃないか(右図)



$$\varphi(x_1+d, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$
$$= d f_1(\boldsymbol{x})$$

よって

$$d\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = d f_1(\boldsymbol{x})$$

$$\underline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})}$$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$も同様.

⑥ エネルギー保存則

力の場: $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}(-\varphi)$
と仮定する($\boldsymbol{f}$が保存力と仮定する).

場の中で質点が動いているとする. 質点の位置は時刻tの関数
$\boldsymbol{x}(t)$で表され、その質量をmとする.

No.

Date

つまり

$E(t) = \mathrm{cons}$

独 数学者 (1882–1935)

ユダヤ人女性のため米に亡命

20C ネーター (Noether) の定理

「エネルギー保存則 $\Leftrightarrow$ 物理法則は時間に関して不変」

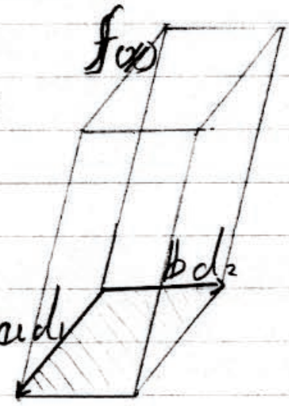
「運動量保存則 $\Leftrightarrow$ 物理法則は場所に関して不変」

・力の場

線積分 … 1次の微分形式の積分

・流れの場

面積分



$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3,\ d_1, d_2 \in D$

$$\mathbb{f}(x) \cdot (\mathbb{a}d_1 \times \mathbb{b}d_2)$$

$$= \left\{ \mathbb{f}(x) \cdot (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \right\} d_1 d_2$$

No.

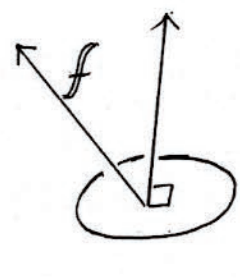
Date

2次の微分形式

$$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto f(x)\cdot(a \times b) \in \mathbb{R} \right\}$$

二重線形，反対称、

曲面を単位時間に横切る



$$\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ s & t & \varphi(s,t) \end{array}$$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(\varphi(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\times\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) ds\, dt$$

ベクトル積

2次の微分形式 ω の曲面に沿って積分

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) ds\, dt$$

Report IV 練習問題

$$f = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$$

$(0,0,0) \to (1,1,1)$

$\hookrightarrow (1,0,0) \to (1,1,0)$ の2つのルートで

線積分が異なることを確認せよ.