No.

Date

$$\text{スカラー場} \xrightarrow{\text{grad}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{rot}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{div}} \text{スカラー場}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

0次の微分形式　1次の〃　2次の〃　3次の〃

n次の微分形式　$\underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n\text{コ}} \to \mathbb{R}$

grad (gradient) と rot (rotation) と div (divergence)

勾配　回転　発散

$\Downarrow$

実は登場済

0次の微分形式

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x + ad) - f(x) = f'(x)(a)\,d$

$f'(x) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ （線型）

$\Downarrow$

1次の微分形式　つまり これが grad

No.
Date

No.5　10/7

ベクトル解析(古典的) → 微分幾何学

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad 勾配}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot 回転}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{div 発散}}$ スカラー場

※1　※2　※3

微分形式

0次 ⟶ 1次 ⟶ 2次 ⟶ 3次

$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\quad\quad\quad\quad \mathbb{R}^3 \ni x$

※1　ベクトル

$$f(x)e_1 + g(x)e_2 + h(x)e_3$$
$$\updownarrow$$
$$f(x)\underline{dx} + g(x)\underline{dy} + h(x)\underline{dz}$$

微分形式

※2　ベクトル

$$f(x)e_1 + g(x)e_2 + h(x)e_3$$
$$\updownarrow$$
$$f(x)\underline{dy \wedge dz} + g(x)\underline{dz \wedge dx} + h(x)\underline{dx \wedge dy}$$

※3　$\varphi(x)$　スカラー

$$\varphi(x)\underline{dx \wedge dy \wedge dz}$$

No.

Date

点 $x \in \mathbb{R}^3$ における微分

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\varphi'(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像.

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x)\,dz$$

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場

$$\text{grad} : x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$$

なぜ gradient (勾配) と呼ばれるのか.

少し次元を落として考えよう.

勾配 "高さ"として考えてみる

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x, a \in \mathbb{R}^2$, $d \in D$

$$\varphi(x + ad) - \varphi(x) = \varphi'(x)(a)\,d$$

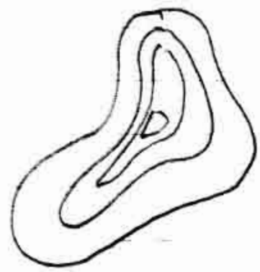
$$= \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\,a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\,a_2 \right\} d$$

No.

Date

ad が等高線に沿って動くとき、a方向の高さ変化 $\overset{ゼロ}{0}$

$$\varphi(x+ad)-\varphi(x)=0$$



$\{\quad\}$ から

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x)\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

直交

積分

1次の微分形式

力の場 = ベクトル場

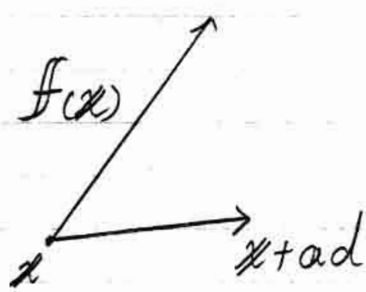
空間の各点にベクトルを対応させる. $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$\cap$

$\mathbb{R}^3$

$$f(x)\cdot ad$$

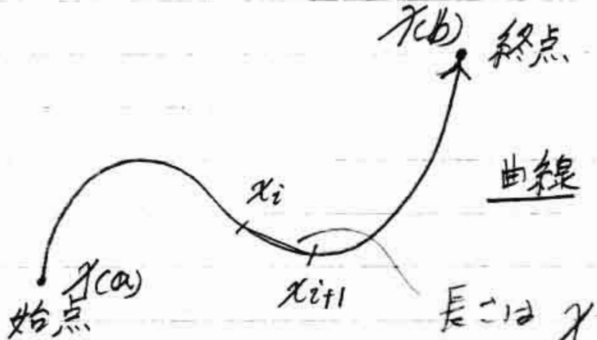
$$=(f(x)\cdot a)d$$



$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & f(x)\cdot a \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R} \end{array}$$

これはxによって異なる

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{x} & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{a} & \longmapsto & \mathbb{f}(\mathbb{x})\cdot\mathbb{a} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ \cap & & \\ \mathbb{R}^3 & & \end{array}$$



場の力を受けて動いた
(仕事)

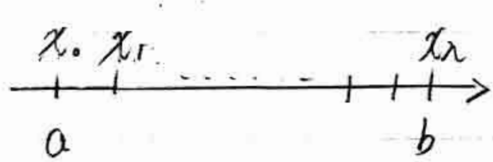
長さは $\chi'(x_i)d_i$

$$\chi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

◎ 線積分
曲線に沿って定積分

$$\int_{\chi} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r}$$

細かく分ける
↳ (隣り合う点の差) $\in D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$



No.

Date

$$x_{i+1} = x_i + \underset{\substack{\Pi \\ \Theta}}{d_i}$$

$$\int_{\chi} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{f}(\chi_i(x_i)) \cdot \chi'(x_i) d_i$$

1次の微分形式の積分

$$\int_{\chi} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\chi(x_i)) d_i$$

$$\omega : x \mapsto \{ a \mapsto \mathbb{f}(x) \cdot a \}$$

◎保存力

その変化の途中途中では異なるが始点終点が一致したときそれ結果0になるもの ex) 重力の場

非保存力 ex) 摩擦力

$$\varphi \xmapsto{\text{grad}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ベクトル場 $\mathbb{f} = \text{grad}(\varphi)$ とすると

No.

Date

$$\int_{\gamma} \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\gamma} (\mathrm{grad}(\varphi)) \cdot d\mathbb{r} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{とする}$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dx_3}{dt} \right\} dt$$

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & \varphi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

合成関数の微分

微積分の基本定理

$$\varphi(x_1(b), x_2(b), x_3(b)) - \varphi(x_1(a), x_2(a), x_3(a))$$

$$\Downarrow$$

始点と終点のみでその途中の変化によらない。