$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1$$

2重線型，反対称

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

このような関数を

$$\underbrace{dx \wedge dy}_{\text{くさび形積}}$$

と書くものとする.

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \rightarrow a_2 b_2 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = dy \wedge dz$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = dz \wedge dx$$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像の全体 $\Leftrightarrow$ 線型空間

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$$(\alpha\varphi)(x) = \alpha(\varphi(x))$$

$$\underbrace{dx}_{\substack{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \text{linear}}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1, \quad dy \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2, \quad dz \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_3$$

$\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の2重線型かつ反対称なものの全体 を考えよ

$(\varphi_1 + \varphi_2)(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$

$(\alpha\varphi)(x, y) = \alpha(\varphi(x, y))$

Report IV 任意の2形式の形が

$\alpha_1 \underline{dx \wedge dy} + \alpha_2 \underline{dy \wedge dz} + \alpha_3 \underline{dz \wedge dx}$

と言うことを証明せよ.

No. 4 9/30

f 力の場 / 流れの場 $\Big\}$ ベクトル場 ⇄ スカラー場

前回

platonic と $\underline{\text{pragmatic}}$ の両者の立場を解説した.

計測

↳ 力：仕事
流れ：流量

仕事

$a\alpha \quad \alpha \in D$

線型関数 ができた

$\varphi \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\varphi(a)\alpha$

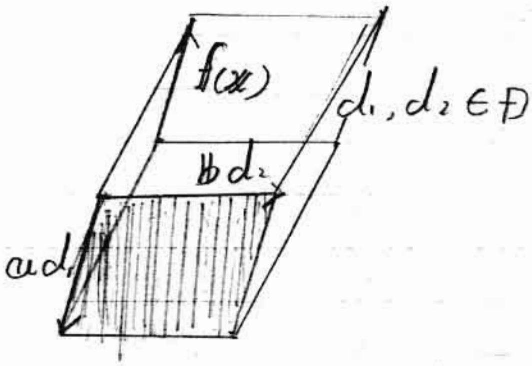
No.

Date

$$\varphi(a)d = (f(x)\cdot a)\,d$$

流れ

平行六面体の体積



$$f(x)\cdot(a\times b)\,d_1 d_2$$

$$(a, d)\in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to f(x)\cdot(a\times b)$$

二重線型 反対称

$$\varphi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

三重線型

$\varphi(a, b, c)$

反対称

Report I

三重線形，反対称な

$\varphi(a, b, c) = \alpha \det(a, b, c)$

と表されることを示せ

空間の各点に線形関数を対応させることを

1次の微分形式という.

空間の各点に二重線形かつ反対称な関数を対応させることを

(三重 〃)

2次の微分形式 という

(3 〃)

No.

Date

またスカラーを対応させることを 0次の微分形式という

⇕

スカラー場　　　　(1次と2次はベクトル場；3次は？後述)

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ への線型写像　：3次元

基底：
$$\begin{cases} dx: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1 \\ dy: \quad " \quad \mapsto a_2 \\ dz: \quad " \quad \mapsto a_3 \end{cases}$$
という記号を用意した

「$f(x)dx + g(x)dy + h(x)dz$　1次の微分形式

$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$」　pragmatic

↕

「$f(x)\mathbb{e}_1 + g(x)\mathbb{e}_2 + h(x)\mathbb{e}_3$」　platonic

$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$ 標準基底　　ベクトル場

$\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (線型)

$$(\varphi \wedge \psi)(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b})$$

を考える

No.

Date

$$(\varphi \wedge \psi)(a_1 + a_2, b) = \varphi(a_1 + a_2)\psi(b) - \varphi(b)\psi(a_1 + a_2)$$

$$= \{\varphi(a_1) + \varphi(a_2)\}\psi(b) - \varphi(b)\{\psi(a_1) + \psi(a_2)\}$$

$$= (\varphi \wedge \psi)(a_1, b) + (\varphi \wedge \psi)(a_2, b)$$

$$(\varphi \wedge \psi)(a, b) = -(\varphi \wedge \psi)(a, b)$$

$\downarrow$

反対称, 2重線型.

任意の $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (2重線型, 反対称)

3次元 の 基底

$$(dy \wedge dz,\ dz \wedge dx,\ dx \wedge dy)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} f(x)\,dy \wedge dz + g(x)\,dz \wedge dx + h(x)\,dx \wedge dy \\ \updownarrow \\ f(x)\,e_1 + g(x)\,e_2 + h(x_3)\,e_3 \end{cases}$$

$$(dy \wedge dz)(a, b)$$

$$= dy(a)\,dz(b) - dy(b)\,dz(a)$$

$$= a_2 b_3 - b_2 a_3 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

No.

Date . .

$$(dz \wedge dx)(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = a_3 b_1 - a_1 b_3$$
$$= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$(dx \wedge dy)(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\varphi, \psi, \chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型

$(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$

$= \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b})\chi(\mathbb{c}) + \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{c})\chi(\mathbb{a}) + \varphi(\mathbb{c})\psi(\mathbb{a})\chi(\mathbb{b})$

$- \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{c})\chi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a})\chi(\mathbb{c}) - \varphi(\mathbb{c})\psi(\mathbb{b})\chi(\mathbb{a})$

II　上記三重線型が反対称であることを示せ

III　$(dx \wedge dy \wedge dz)(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = \det(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$ を示せ.

↳ 3次の微分形式とスカラー場が対応していると分かる.

No.

Date

$$
\begin{tikzcd}
\text{スカラー場} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{スカラー場} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{0次の微分形式} & \text{1次の〃} & \text{2次の〃} & \text{3次の〃}
\end{tikzcd}
$$

n次の微分形式 $\underbrace{\mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n\text{コ}} \to \mathbb{R}$

grad ($\underset{\text{勾配}}{\text{gradient}}$) と rot ($\underset{\text{回転}}{\text{rotation}}$) と div ($\underset{\text{発散}}{\text{divergence}}$)

勾配 ⇓ 実は登場済

0次の微分形式

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x + \alpha d) - f(x) = f'(x)(\alpha)\, d$

$f'(x) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (線型)

⇓

1次の微分形式 つまり これが grad