No.
Date

少し話を戻すと

$$(\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} = \det(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$$

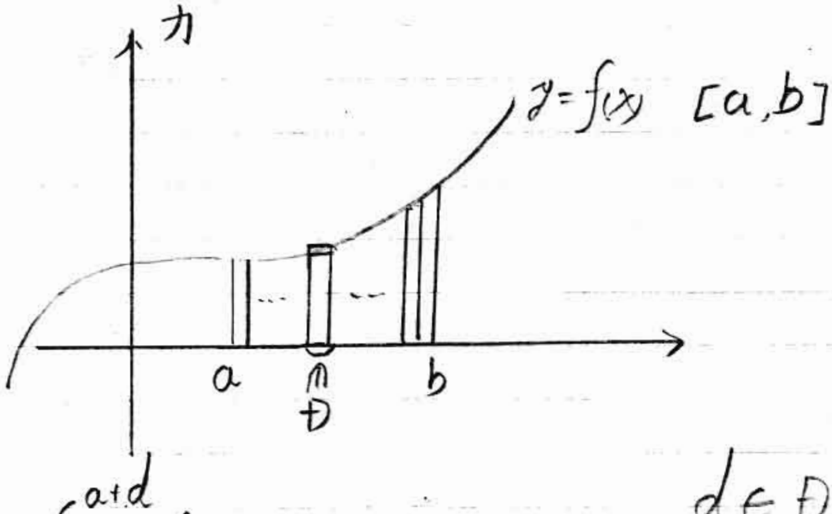
3次元空間の平行六面体の$\underbrace{\text{体積}}_{\text{符号つき}}$でした

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

余因子展開

来週からは積分(多変数，ベクトル解析)　cf. 力学 17C
⇓
電磁気学 19C

No. 3



$$\int_a^{a+d} f(x)\,d(x) = f(a)d \qquad d \in D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$$

No.

Date

ベクトル

(準備) Kock-Lawvere の公理から

$f: D \to R$

$f(d) = f(0) + ad \quad (\exists! a \in R)$

$f: D \to R^n$ とは n個の写像を同時に考えることに同じ

$\Updownarrow$

$f(d) = f(0) + ad$

$(\exists! a \in R^n)$

$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

力はベクトル

これからの基本的姿勢

『「力」と「流れ」はベクトルで表現されるが基本的に違うもの』

「場」

スカラー場：空間中の各点にスカラーを対応させる場 (ex スカラーとして温度)

ベクトル場： 〃 ベクトルを 〃

◎力

2つの立場

Platonic (プラトン派) ⟷ Pragmatic

(補)

"美は永遠である" を考える

↕

何かを指している。

名詞である以上それが指示する"何か"がなければならないだろう

⇓

イデア論

No.

Date

話を戻します

Platonic

「力はベクトルである」

⇑

とりあえず各点で
方向(向き)と大きさが
あるのだからベクトル
なのだとしよう

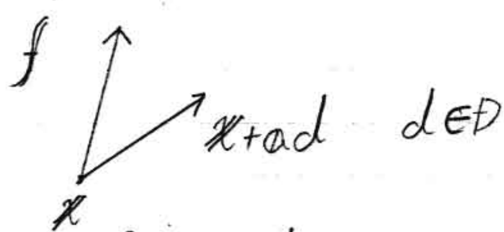
Pragmatic

「力はどうやって測るのだろう」

力の本質

"力は仕事をする"

T.term



$$f(x)\cdot \alpha d$$
$$=(f(x)\cdot\alpha)\,d$$

xを固定

$$\alpha\in\mathbb{R}^3 \longmapsto f(x)\cdot\alpha$$ 線型

$$f(x)(\alpha_1+\alpha_2)=f(x)\cdot\alpha_1+f(x)\cdot\alpha_2$$
$$f(x)\cdot(\lambda\alpha)=\lambda f(x)\cdot\alpha$$

⇓

力は各点で$\mathbb{R}^3$から$\mathbb{R}$への
線型関数を決める

Pragmatic

$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線型関数 φ

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 標準基底

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{a}) &= \varphi(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \\
&= a_1\varphi(\mathbf{e}_1) + a_2\varphi(\mathbf{e}_2) + a_3\varphi(\mathbf{e}_3) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_1) \\ \varphi(\mathbf{e}_2) \\ \varphi(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

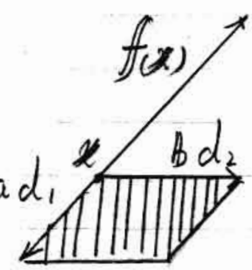
→ 結局ベクトルだったじゃないか。

「流れの場 = ベクトル場」

とするのは Platonicな立場

Pragmaticな立場 ⇒ 計測

流れ(たとえば水流)を考える
右図の微小なマスを単位時間に
どれだけの流量が横切るか?



平行四辺形

思考実験

単位時間中にマスを横切った流れに色がつくとする. すると微小な単位時間中にマスを通過した流れ(水)は平行六面体を作る. 流量はまさに平行六面体の体積になる.

$$(a\,\mathbf{d}_1 \times b\,\mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

No.

Date

$(\mathbb{a}\, d_1 \times \mathbb{b}\, d_2) \cdot \mathbb{f}(x)$

$= \det(\mathbb{a} d_1, \mathbb{b} d_2, \mathbb{f}(x))$

determinant

すく $(\mathbb{a} d_1 \times \mathbb{b} d_2) \cdot \mathbb{f}(x)$

$= (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{f}(x)\, d_1 d_2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{array}{cc} \cup\!\!\!| & \cup\!\!\!| \\ \mathbb{a} & \mathbb{b} \end{array} & & (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{f}(x) \end{array}$$

2重線型 かつ 反対称.

故に $\det(\mathbb{a} d_1, \mathbb{b} d_2, \mathbb{f}(x)) = d_1 d_2 \det(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{f}(x))$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (2重線型 かつ 反対称)

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2 + a_3 \mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2 + b_3 \mathbb{e}_3$$

$$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \varphi(a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3,\ b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_1 + b_3\mathbb{e}_3)$$

$$= a_1b_1\underbrace{\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)}_{0} + a_2b_2\underbrace{\varphi(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_2)}_{0} + a_3b_3\underbrace{\varphi(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_3)}_{0}$$

$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)\underbrace{\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2)}_{c_3} + (a_2b_3 - a_3b_2)\underbrace{\varphi(\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3)}_{c_1}$$

$$+ (a_3b_1 - a_1b_3)\underbrace{\varphi(\mathbb{e}_3,\mathbb{e}_1)}_{c_2}$$

(補)

反対称だから

$$\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1) = -\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1)$$

よって $\varphi(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1) = 0$

また $\varphi(\mathbb{e}_i,\mathbb{e}_j) = -\varphi(\mathbb{e}_j,\mathbb{e}_i)$

$$= (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} \qquad \left(\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)$$

⇒ 結局ベクトルだが…

空間の各点に $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ で

二重線型かつ反対称なものを対応させる

Platonic な立場ではこのプロセスが見えない…

No.

Date

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1$$

2重線型，反対称

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

このような関数を

$$\underbrace{dx \wedge dy}_{\text{くさび形積}}$$

と書くものとする.

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \to a_2 b_2 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = dy \wedge dz$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = dz \wedge dx$$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 線型写像の全体 $\Leftrightarrow$ 線型空間

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$$(\alpha \varphi)(x) = \alpha(\varphi(x))$$

$$\underbrace{dx}_{\substack{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \text{linear}}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1, \quad dy \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2, \quad dz \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_3$$

$\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の2重線型かつ反対称なものの全体 を空間とし

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$(\alpha\varphi)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$$

Report $\underline{\mathrm{IV}}$ 任意の空間中の元が

$$\alpha_1 \underline{dx \wedge dy} + \alpha_2 \underline{dy \wedge dz} + \alpha_3 \underline{dz \wedge dx}$$

と書けることを証明せよ.