No.

Date

平面と同じようにして

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ b = \qquad (同様) \\ c = \qquad (同様) \end{cases}$$

$V(a, b, c) =$ (27項でてくる)

でも

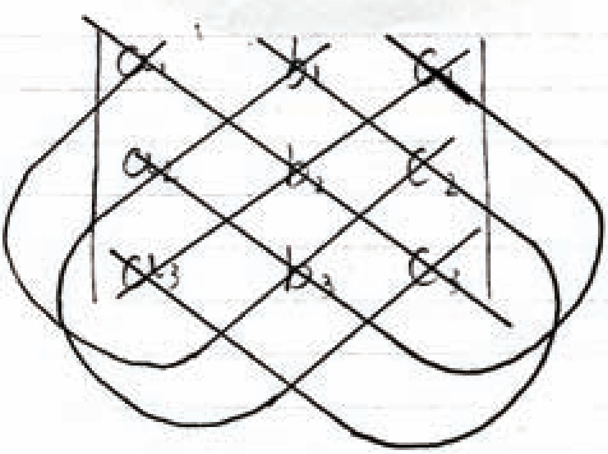
$V(a, a, a) = 0$

$V(a, a, b) = 0$ だから

$e_1\ e_2\ e_3$ を1つずつ含むものしか出てこない

$3!$ 通りで6項

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1)$$



9/9 No. 2

定義を与えるとはどういうことか

(1) 行列式

幾何学的定義

「$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の作る符号付の平行四辺形の面積」

⇓

・直観的
・すぐには計算できない

解析的定義

「$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$」

⇓

・式で与える定義

2つの定義をつなぐ作業は重要!

◎ベクトル(3次元)

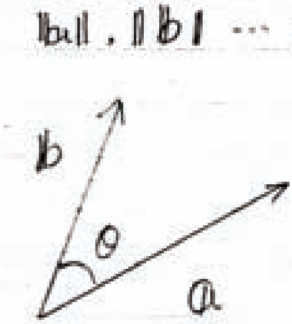
内積

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

幾何学的定義

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

$\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{b}\|$ … $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の長さ



解析的定義

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

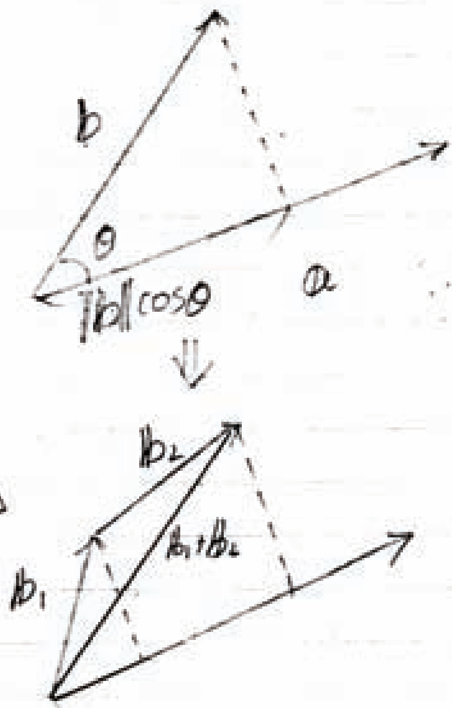
幾何学定義から

$(\alpha a)\cdot b = \alpha\, a\cdot b$

$a\cdot(\beta b) = \beta\, a\cdot b$

$a\cdot(b_1+b_2) = a\cdot b_1 + a\cdot b_2$

$(a_1+a_2)\cdot b = a_1\cdot b + a_2\cdot b$



$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とするならば

$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

$a\cdot b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)\cdot(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$

$3^2 = 9$ 項であるけど $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$ から考えると

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ と分かる

$\Updownarrow$

解析的定義

No.

Date

Report (3×3)

I 3次元の行列式の幾何学的定義から解析学的定義を求めよ

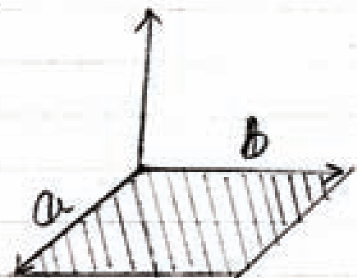
II 3次元の内積の 〃

内積(スカラー積)のはなしは一応ここまで

これからやるのは

外積(ベクトル積)

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$



a から b へ

幾何学的定義

「右ネジを回したときに進む方向に a, b で張られる平行四辺形の長さを大きさにもつベクトル」

$\Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}$

$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

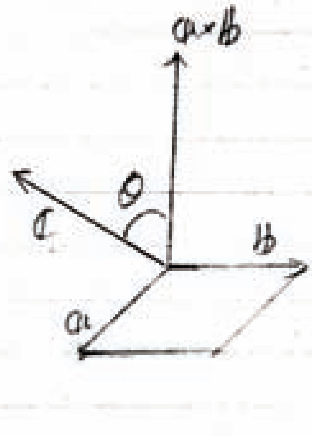
$\mathbf{a}\times(\beta\mathbf{b}) = \beta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

$\Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$

$\underline{(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}}$

?



空間から $\mathbf{c}\neq\mathbf{a},\mathbf{b}$ をとってきて

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

を考えてみる

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \underbrace{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}_{\text{a, b の張る平行四辺形の面積}}\underbrace{\|\mathbf{c}\|\cos\theta}_{\text{正射影}}$

⇓

a, b, c が張る平行六面体の体積

No.

Date

つまり　　　　　　　　　　　　　　　　　　determinant

$$\boxed{\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= |\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| \quad (\text{行列式}) \\ &= \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\end{aligned}}$$

これを使ってやるか?

$$\det(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \overset{\text{これは保証されている}}{=} \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

では

$$\begin{aligned}\underline{((\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b})}\cdot\boldsymbol{c} &= \det(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ &= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \\ &= (\underline{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}})\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

point!!!

$\boldsymbol{c}$は任意であるから

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}$$

(補)　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の成立は不明でも

$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$ が真であるとする (zは任意)

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = 0$

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ とすると (zは任意)

$\Rightarrow (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = 0$　　　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$

No.

Date

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$$

準備

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0} & (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)$$

Point Ⅲ

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3$$

$$\begin{array}{ll} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{array}$$

$\mathbf{e}_3$係数

$\mathbf{e}_1$係数

$\mathbf{e}_2$係数

解析的定義

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

No.

Date

少し話を戻すと

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

3次元空間の平行六面体の$\underbrace{\text{体積}}_{\text{(符号つき)}}$でした

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

余因子展開

来週からは積分（多変数，ベクトル解析）　cf. 力学 17C

$\Downarrow$

電磁気学 19C