虚数単位の話

根の公式

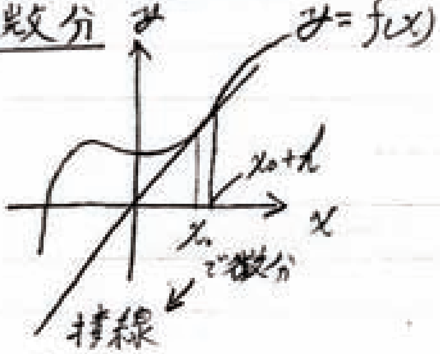
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

の√の中が負なら解なし　とするのは納得できない
とするところから

2学期

9/2 No.1　まずは復習

◎微分



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

これがあるからうまくいく。一般には

$$f'(x) \neq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Newton とか Leibniz

十分hが小さければ

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x)$$

↳「十分h小さい」… $h^2=0$

No.

Date

$$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

D を巾零無限小（の要素）という。

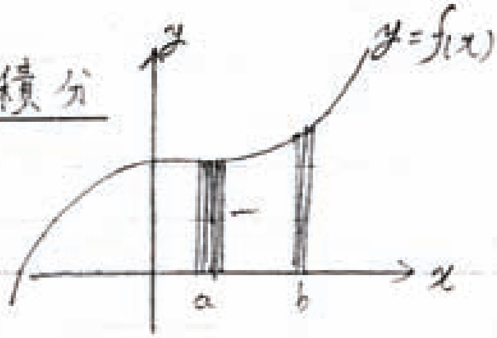
$$f(x+d) - f(x) = d\, a\, f(x)$$

$\exists !$　$a \in \mathbb{R}$

と書きましょう

として話をいろいろ広げたのが1学期

◎ 積分



定積分

$a-b$ 区間を非常に細かく分割してみる

以後 $[a, b]$ で表す

⇓ どのくらいか？

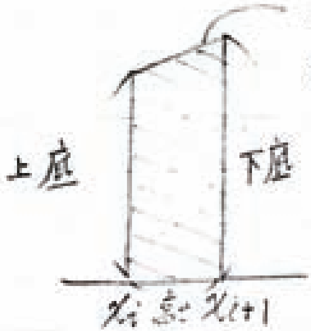
$$\left.\begin{array}{l} a = x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ b = x_n \end{array}\right\} \quad (x_{i+1} - x_i) \in D$$

「間隔が2回かけると0になるくらい小さい」

No.

Date

一つの短冊を拡大してみてみる



まとまり部分の間はとても小さいから
直線として考えられる

⇓

つまり 台形

$$x_{i+1} - x_i = d_i \in D$$

$$(\text{台形の面積}) = \frac{1}{2}\{(\text{上底}) + (\text{下底})\} \times (\text{高さ})$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) \times d_i$$

（ 今 $x_{i+1} - x_i = d_i \in D$ だから

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + d_i)$$
$$= f(x_i) + f'(x_i) d_i$$
）

$$= \frac{1}{2}\left(f(x_i) + f(x_i) + f'(x_i) d_i\right) \times d_i$$

$$= f(x_i) d_i + \frac{1}{2} f'(x_i) \underbrace{d_i^2}_{0}$$

$$= f(x_i) d_i$$

$$= f(x_{i+1}) d_i$$

$\int$ ⇐ 引きのばした "S"

Summation (和) から.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= f(x_0)d_0 + f(x_1)d_1 + \cdots\cdots + f(x_{n-1})d_{n-1}$$

◎ 微積分学の基本定理

$$\boxed{\begin{array}{l} F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ F' = f \quad \text{とする.} \\ \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - (a) \end{array}}$$

$$F(\underset{\underset{x_{i+1}}{\shortparallel}}{\underline{x_i + d_i}}) - F(x_i) = f(x_i)d_i \qquad (\text{微分})$$

同じもの

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_{i-1})d_{i-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

全部足してみると. $(x_0 = a, x_n = b)$

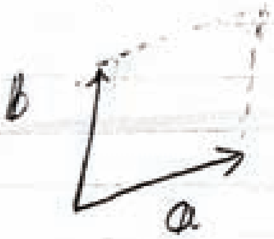
$$F(b) - F(a) = f(x_{n-1})d_{n-1} + f(x_{n-2})d_{n-2} + \cdots\cdots + f(x_0)d_0$$

一度線形代数を補う

行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$ はどこから来たのか

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

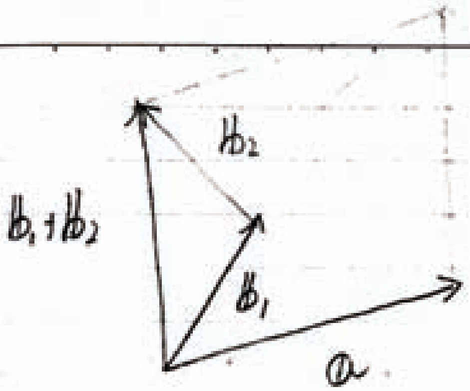


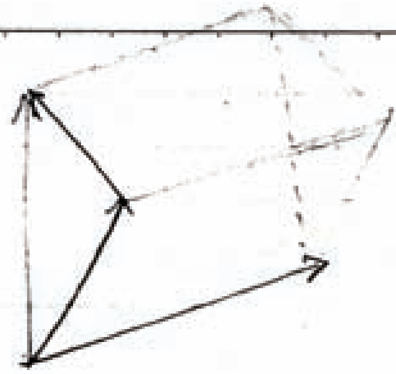
面積に符号をつけて考える $\begin{cases} \boldsymbol{a}\text{に対して}\boldsymbol{b}\text{が} \\ \text{反時計回りなら} & + \\ \text{時計 〃} & - \end{cases}$

$$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \\ \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ S(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ S(\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}) = \beta S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \end{array}\right\}$$ この辺はすぐわかる

$$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2)$$ は成り立つか?





左辺　　　　　　　右辺

⇓

合同だから

$S(a, b_1+b_2) = S(a, b_1) + S(a, b$

は成立

同様に

$S(a_1+a_2, b) = S(a_1, b) + S(a_2, b$

Sを求めたい。

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　(標準基底).

より

$$\begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 \end{cases}$$

No.

Date

$$S(a,b) = S(a_1 e_1 + a_2 e_2,\ b_1 e_1 + b_2 e_2)$$

ところで

$$\begin{cases} S(e_1, e_2) = 1 \\ S(e_2, e_1) = -1 \\ S(e_i, e_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$ だから

$$S(a,b) = S(a_1 e_1,\ b_1 e_1 + b_2 e_2) + S(a_2 e_2,\ b_1 e_1 + b_2 e_2)$$

$$= S(a_1 e_1, b_1 e_1) + S(a_1 e_1, b_2 e_2) + S(a_2 e_2, b_1 e_1) + S(a_2 e_2, b_2 e_2)$$

$$= a_1 b_1 S(e_1, e_1) + a_1 b_2 S(e_1, e_2) + a_2 b_1 S(e_2, e_1) + a_2 b_2 S(e_2, e_2)$$

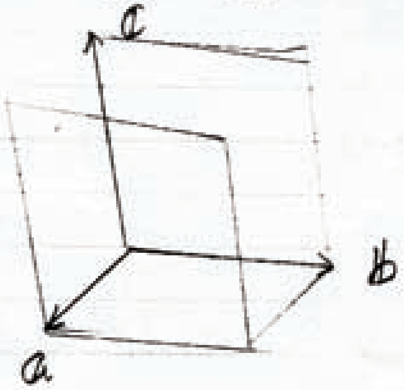
$$= a_1 b_2 - a_2 b_1$$

つまり 行列式は形 平行四辺形 の面積計算（符号つき）

3次元空間を考える

$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

3つのベクトルで張られるのは平行六面体



また　$\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へ右ねじを回したとき右ねじの進行方向に
$\mathbf{c}$ があれば $+$
逆方向なら $-$
親指 $\mathbf{a}$　人さし指 $\mathbf{b}$　中指 $\mathbf{c}$　として
右手型なら $+$
左手型なら $-$

ここから

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$$

$$V(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

$$V(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

平面と同じようにして

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = \qquad \text{(同様)} \\ \mathbf{c} = \qquad \text{(同様)} \end{cases}$$

$V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) =$ (27項でてくる)

でも

$V(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$

$V(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ だから

$\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3$ を1つずつ含むものしか出てこない

$3!$ 通りで6項

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)$$