No.

Date

$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(-\sin x)' = -\cos x$
$(-\cos x)' = \sin x$

↓
周期性

$\sin 0 = 0$
$\cos 0 = 1$
$-\sin 0 = 0$
$-\cos 0 = -1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

6/24 No. 10

Taylor 展開
無限次の多項式
巾級数

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots \end{cases}$$

右辺をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ として

$g(-x) = -g(x)$ ：奇関数
$h(-x) = h(x)$ ：偶関数

$g(x)$, $h(x)$ が三角関数であることを知らなくとも

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$
$$= h(x)$$

となっていることは微分すればすぐ分かる.

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$
複素数への拡張

$$e^z = e^{x+iy}$$
$$= e^x e^{iy}$$ ↓(指数法則が成り立つならば)

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \frac{1}{4!}(iy)^4 + \frac{1}{5!}(iy)^5 \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots\right) + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots\right)$$
$$= \cos y + i \sin y$$

⇓

<u>複素数の世界まで来ると指数関数と三角関数がつながっていることが分かる</u>.

指数法則
加法定理

$$e^{i(y_1+y_2)}=\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)$$

⇓ 指数法則を仮定

$$e^{iy_1}e^{iy_2}=\{\cos y_1+i\sin y_1\}\{\cos y_2+i\sin y_2\}$$

$$=(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)$$

$$+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2)$$

$$=\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)$$

$$=e^{i(y_1+y_2)}$$

⇓

つまり指数関数と三角関数が「血縁」であったように
指数法則と加法定理も「血縁」であった.

「虚」の世界からの展望が新たな知見をもたらした
imaginary

ところで虚数全体に対する指数法則とは一体なんなのか

No.

Date

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \cdots$$

…… [1]

一方

$$e^x e^y = \left\{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right\}\left\{1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots\right\}$$

…… [2]

どちらも x と y の多項式

⇓

$x^i y^j$ (i, j：自然数) の係数が任意の

i と j に対して一致することが式の同値を示す.

[2] で考えれば

x^i と y^j の係数は $\frac{1}{i!}$ と $\frac{1}{j!}$. よって $x^i y^j$ の係数は

$\frac{1}{i!j!}$

[1] で考えれば

$i+j=n$ として

$\frac{1}{n!}(x+y)^n$ を計算して

$$\frac{{}_nC_i}{n!} x^i y^j = \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{i!j!} x^i y^i$$

$$= \frac{1}{i!j!} x^i y^i$$