2007年2学期 筑波大学 生物資源学類　2007年 11月 12日

基礎数学 第9回目 担当 西村泰一　出席者 32名 + 西田先生, TA
ノート 高橋

$\left\{\begin{array}{ll} \text{発見の論理} & \text{どうして div} \\ \text{正当化の議論} & \text{発散定理の証明} \end{array}\right\}$ 一如 (一体となっている)

巾零無限小 kock-Lawvere の公理 から話を進めてきた

なぜ 巾零無限小 ○
極限 ×　$\int_{0}^{a+d} f(x)dx = \alpha f(x)$

ベクトル解析の場合 (極限を用いると) ひっちゃかめっちゃかになる
ex どうして div

$$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\} \neq \{0\}$$

発散
無限小のレベルで発散定理を成立
させようとしたら div が生じた

kock-Lawvere の公理

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$　$\exists!\, b \in \mathbb{R}$

$$f(x+d) = f(x) + \underbrace{b}_{f'(x)} d$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$　$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$\exists!\, b \in \mathbb{R}$

$$f(x+d) = f(x) + \underbrace{b}_{f'(x)} d$$

(各成分にわけて
Kock-Lawvere公理
を用いる)

No

Date

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\quad \ \ \Psi \ \Psi$$
$$\quad \ \ b \ \ a$$

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(a + bx)$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

$x = 0$で微分すると　$\exists!\ \mathbb{C} \in \mathbb{R}^m$
$$f(a + bd) = f(a) + \mathbb{C}d$$

多変数の微分のときに
$b \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C} \in \mathbb{R}^m$　（bに対してcを対応させる写像が線形写像

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 e_1 + \cdots\cdots + b_n e_n$$

← 標準基底を用いて

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a + e_1 d) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1} d$$
$$f(a + e_n d) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n} d$$

したがって
$$f\left(a + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} d\right)$$
$$= f(a) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} b_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} b_n \right\} d$$

• Gaussの発散定理

$$\iint_{\Sigma} f\cdot dz = \iiint_{\Omega} (\mathrm{div}\, f)\, dv$$

閉曲面　　Σによって囲まれる領域

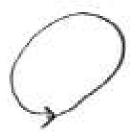
• Stokesの定理

まだ決めていない

$$\int_{C} f\cdot dr = \iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, f)\cdot ds$$

閉曲線　　Cをふちとする面

線積分　　面積分



$f \longmapsto \mathrm{rot}\, f$

ベクトル場　ベクトル場

無限小のレベルでStokesの定理が成立するとすれば
通常のレベルでも成立する　→前回まで

• はたして無限小のレベルでrot fが成立するかどうか？

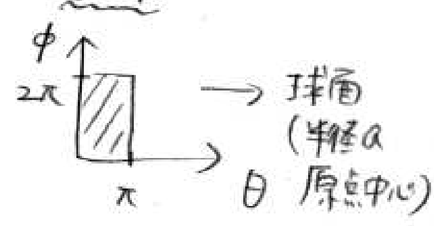
回転 rotation

f vector場 on $\mathbb{R}^3$　　$\underset{(x,y,z)}{x} \in \mathbb{R}^3$

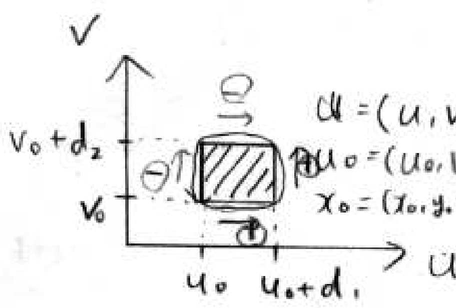
$$f(x) = (f(x), g(x), h(x))$$
$$= (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$$

球面が曲面である

θ, ϕ



2つのパラメーターで
表すことができる



$u = (u, v)$

$u_0 = (u_0, v_0)$　$u_0, v_0 \in \mathbb{R}$

$x_0 = (x_0, y_0, z_0)$　$d_1, d_2 \in D$

$= x(u_0)$

$$x(u) = x(u, v)$$
$$= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

No.

Date

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx = f(a)\,d$$

$$\int_{u_0}^{u_0+d_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u,v_0))\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u,v_0)\right)du + \int_{v_0}^{v_0+d_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u_0+d_1,v))\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0+d_1,v)\,dv$$

$$-\int_{u_0}^{u_0+d_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u,v_0+d_2))\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u,v_0+d_2)\,du - \int_{v_0}^{v_0+d_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u_0,v))\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0,v)\,dv$$

$$= d_1 f(x(u_0))\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0) + \cdots - d_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u_0,v_0+d_2))\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0,v_0+d_2) - d_2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(u_0))\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0)$$

$$\parallel$$

$$d_1 \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_0 + d_2\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0)\right)\cdot\left\{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0) + d_2\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u\partial v}(u_0)\right\}$$

$$= d_1\left\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + d_2\frac{\partial x}{\partial v}(u_0)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}(x_0) + d_2\frac{\partial y}{\partial v}(u_0)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}(x_0) + d_2\frac{\partial z}{\partial v}(u_0)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}(x_0)\right\}\cdot$$

$$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0) + d_2\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u\partial v}(u_0)\right\}$$

整理して
左式となることを
示せ

課題

$$\int_{u_0}^{u_0+d_1}\int_{v_0}^{v_0+d_2} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right)du\,dv}_{dS}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z},\ \frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$