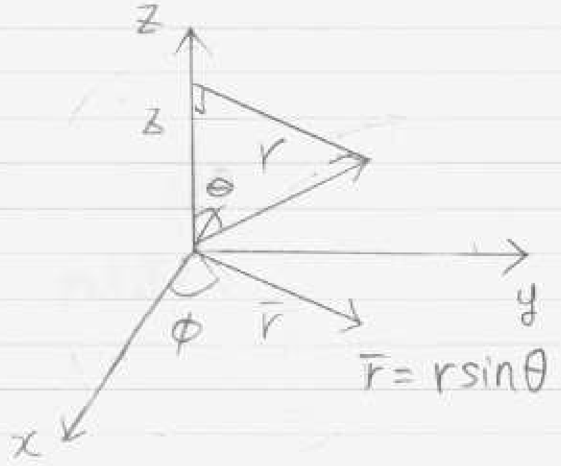
2007年 2学期 筑波大学 生物資源学類 2007年11月5日

基礎数学 第8回 担当 西村泰一 出席者25名+西田先生

ノート 高橋 TA

⓪ 三次元の極座標



$$\begin{cases} 0 \leqq r < \infty \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 \leqq \phi \leqq 2\pi \end{cases}$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} &= (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta) \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= (r\cos\theta\cos\phi,\ r\cos\theta\sin\phi,\ -r\sin\theta) \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= (-r\sin\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\cos\phi,\ 0) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= \sin\theta\cos\phi\, r\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\, r\cos\theta\sin\phi - r\sin\theta\cos\theta \\ &= r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - r\sin\theta\cos\theta \\ &= r\sin\theta\cos\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= \sin\theta\cos\phi(-r\sin\theta\sin\phi) + \sin\theta\sin\phi\, r\sin\theta\cos\phi \\ &= -r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

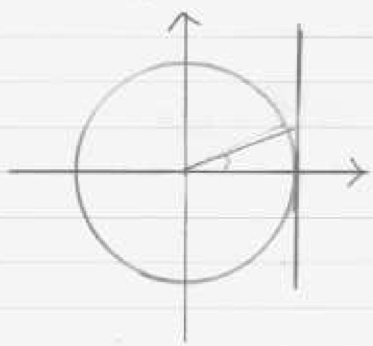
$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} &= r\cos\theta\cos\phi(-r\sin\theta\sin\phi) + r\cos\theta\sin\phi\, r\sin\theta\cos\phi \\ &= -r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

直交座標である

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial r}{\partial\theta}\times\frac{\partial r}{\partial\phi}\right|d\theta\, d\phi$$

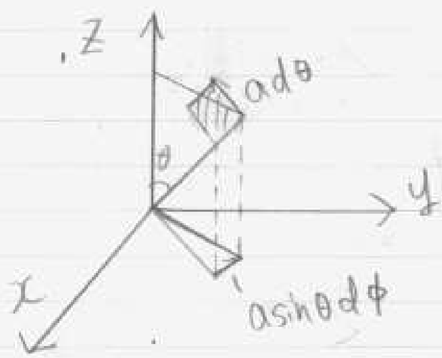
西村の慣性法則
パラメーターが2回かけて 0 になるくらい小さいとき
直線運動をする

$d\in D\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$



$\sin d = d$

$d\theta \in D$



$$a\,d\theta\times(a\sin\theta)\,d\phi$$
$$= a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

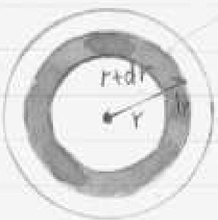
↑長方形の面積

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$
$$=\int_0^{2\pi} 2a^2\, d\phi = 4\pi a^2$$（球の表面積）

No.

Date

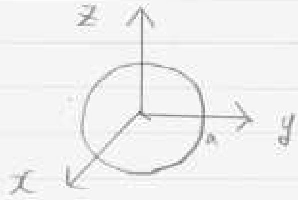
・球(半径a)の体積



この部分の体積

$$\int_0^a 4\pi r^2 dr$$

$$= 4\pi \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3$$

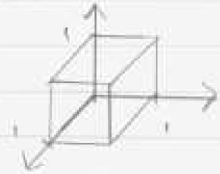


・課題

ベクトル場 $\mathbf{r}$

① ベクトル場(x, y, z)を原点中心半径aの球面体で面積分せよ $\iint_\Sigma \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}$

② ベクトル場(x, y, z)を $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ の立方体の表面で面積分せよ



・発散 div : ベクトル場 ⇒ スカラー場

$$\iint_\Sigma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{f})\, dV$$ Gaussの発散定理

閉曲面　　囲まれた領域

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

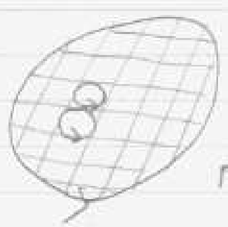
無限小ではGaussの発散定理は成り立つべくして成り立つ

• 回転：rot　ベクトル場 → ベクトル場

閉曲線 τ

$$\int_{\tau} f\,dr = \iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, f)\cdot ds$$　stokesの定理

線積分　　　面積分



通常の閉曲線
を細かく切る

微小長方形同士は打ち消しあい、
閉曲線の縁の部分は打ち消しあわ
ないので線積分となる

無限小のレベルでストークスの定理が成立するならば
通常のレベルでも成立する。