2007年　2学期 筑波大学 生物資源学類　2007年10月29日

基礎数学 第7回 担当 西村泰一　出席者 31名+西田先生

ノート 西田先生

(高橋さんは休み)

レポート問題V　前回の球面について、

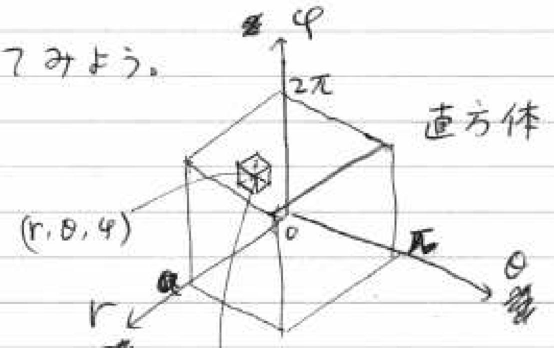
$\int_{\Sigma} dS$ を計算せよ。

体積分

三重積分　$\int_{c_1}^{c_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$　$a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$, $c_1 \leq z \leq c_2$

球の体積をもとめてみよう。

パラメータ $\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$



$(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$

小さな直方体

前回は、長方形 → 平行四辺形

今回は、直方体 → 平行六面体

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}dr$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}d\theta$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}d\varphi$ で張られる。

その体積は、$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}dr \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}d\theta \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}d\varphi\right)}$ ← $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}dr$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}d\theta$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}d\varphi$ で構成される行列(3×3)の行列式

これを積分 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \quad dr\, d\theta\, d\varphi$

して、体積の公式をみちびけ —— 中塚さん、はお君への宿題

THEME　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date

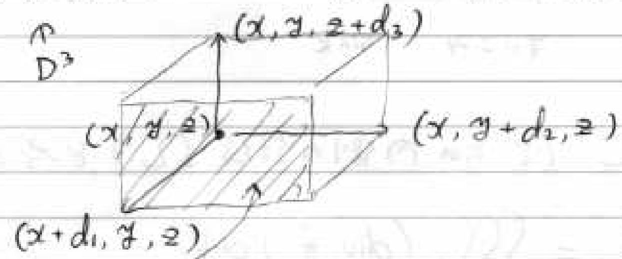
div の話

ベクトル場 $f = (f_1, f_2, f_3)$ （流れの場）

$\gamma : D^3 \longrightarrow R^3$ ~~___~~ ～ microcube とよぶ。

$(d_1, d_2, d_3) \longmapsto (x+d_1,\ y+d_2,\ z+d_3)$

$\in D^3$



直方体

体積 $d_1 d_2 d_3$

単位時間あたりにどれだけの水があふれ出てくるか？

一変数の積分　　$d \in D$ のとき $\int_x^{x+d} f(x)\,dx = d\,f(x)$

この面から出てくる水は

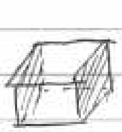
$$\int_z^{z+d_3}\int_y^{y+d_2} f_1(x+d_1, y, z)\,dy\,dz = d_2\,d_3\,f_1(x+d_1, y, z)$$

同様に

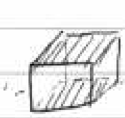
この面から出ていく水は　$-d_2 d_3 f_1(x, y, z)$

∴ これら２つの面から出ていく水は　$d_2\,d_3\{f_1(x+d_1, y, z) - f_1(x, y, z)\}$

$$= d_1 d_2 d_3 \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z)$$



― これら２つの面からは　$d_1 d_2 d_3 \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z)$



― これら２つの面からは　$d_1 d_2 d_3 \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$

よって、この直方体から湧き出す水量は、

$$d_1 d_2 d_3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right)$$

divergence（発散）

$\mathrm{div}\,\mathbf{f} = 0$ … わきだし無し。

$\mathrm{div}\,\mathbf{f} > 0$ … わきだし

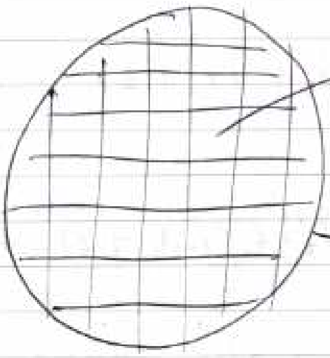
$\mathrm{div}\,\mathbf{f} < 0$ … すいこみ sink

いま、閉曲面 Σ（と、その内側の領域 Ω）を考える。

$$\iint_\Sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{f})\, dV$$

Gaussの発散定理

無限小のレベルでGaussの発散定理がなりたつように
divというものを決めた。



流出

ここでの発散は、
となりのセルでの流入と
うちけす。

うちけさないのは
表面での出入り。