2007年 2学期 筑波大学 生物資源学類　2007年10月22日

基礎数学 第6回目 担当 西村泰一　出席者 33名＋西田先生, TA

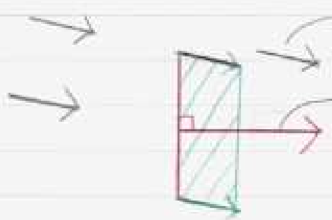
ノート 高橋

前回 訂正　gradiation → gradient

⓪ 面積分

・まず平面

流れの場 F　一様.



流れの場

大きさ　線分の長さと同じ
向き　面に垂直

赤い線を単位時間にどれだけの量の水が横切るか？

平行四辺形の面積で測れる.　　底辺×高さと同じこと

流れの場のベクトルと線分のベクトルの内積をとれば
平行四辺形の面積が求まる

・流れが一様ではなく面も曲がっている場合

$\iint_{\Sigma} (\mathbb{F} \cdot d\mathbb{S})$　小さくきった各面で面の大きさだけのベクトルをたてる

内積をとって足し合わせたものが面積分

曲面

空間の中に曲面を与える場合 2つのparameterが必要

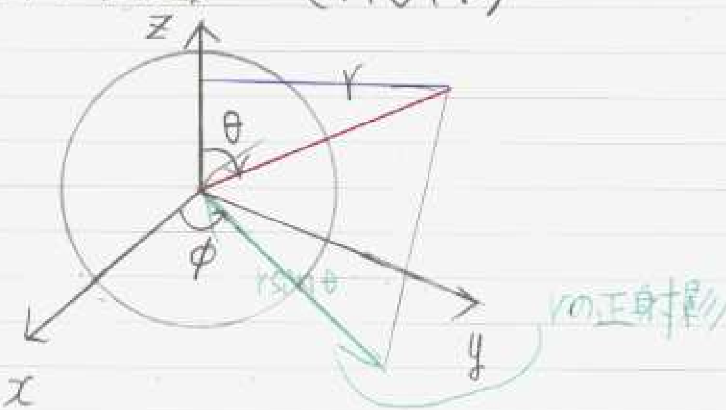
- まず二重積分について.

$$\int_{b_1}^{b_2}\underbrace{\left\{\int_{a_1}^{a_2} \overbrace{f(x,y)}^{\text{スカラー関数}}\,dx\right\}}_{g(y)\,:\,y\text{の関数}}dy \qquad \begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ &a_1 \leqq x \leqq a_2\\ &b_1 \leqq y \leqq b_2\end{aligned}$$

yを固定すると、一変数積分のはなし
　　　　　　　　x
実はyも動くのでもう1回 積分

- 半径aの球体の表面積を求める

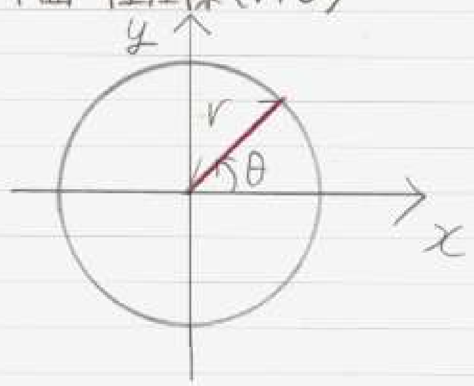
空間 極座標 (r, θ, ϕ)



$$0 \leqq \theta \leqq \pi$$
$$0 \leqq \phi \leqq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi\\ y = r\sin\theta\sin\phi\\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

平面 極座標 (r, θ)



$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$
$$0 \leqq r < \infty$$

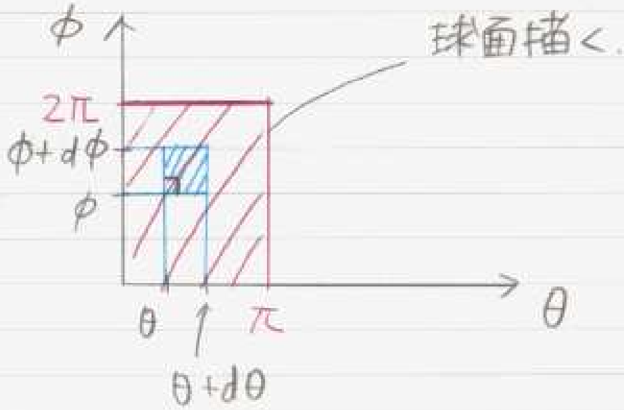
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

球面上の点は(θ, ϕ)の2つのパラメーター
で表わされる

$$0 \leqq \theta \leqq \pi$$
$$0 \leqq \phi \leqq 2\pi$$

球面上の各点は (θ, ϕ) の2つのパラメーターで表わされる

$$0 \leqq \theta \leqq \pi$$
$$0 \leqq \phi \leqq 2\pi$$



$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

半径 a の球体

$$r \begin{cases} x = a \sin\theta \cos\phi \\ y = a \sin\theta \sin\phi \\ z = a \cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} d\theta \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} d\phi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right| d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left| \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\phi \\ a\cos\theta\sin\phi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\phi \\ a\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left| \begin{pmatrix} a\cos\theta\sin\theta \times 0 - (-a\sin\theta)(a\sin\theta\cos\phi) \\ (-a\sin\theta)\times(-a\sin\theta\sin\phi) - (a\cos\theta\cos\phi)\times 0 \\ (a\cos\theta\cos\phi)\times(a\sin\theta\cos\phi) - (a\cos\theta\sin\phi)(-a\sin\theta\sin\phi) \end{pmatrix} \right| d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left| \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\phi \\ a^2\sin^2\theta\sin\phi \\ a^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + a^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi \end{pmatrix} \right| d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left| a^2 \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \right| d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sqrt{(\sin^2\theta\cos\phi)^2 + (\sin^2\theta\sin\phi)^2 + (\sin\theta\cos\theta)^2} \quad d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sqrt{\sin^4\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\theta\cos^2\theta} \quad d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sqrt{\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \quad d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sin\theta \; d\theta\, d\phi$$

$$\int_0^{\pi} a^2 \sin\theta\, d\theta = \left[-a^2\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2a^2$$

$$\int_0^{2\pi} 2a^2\, d\phi = \left[2a^2\phi\right]_0^{2\pi} = 4\pi a^2.$$

球体の表面積