◎ ベクトル解析

主役 $\begin{cases} \text{grad} \\ \text{div} \\ \text{rot} \end{cases}$

スカラー場 $\xRightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xRightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xRightarrow{\text{div}}$ スカラー場

平面
地図 標高
気圧
温度

grad φ は
その点で等高線にひいた
接線に直交

$\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$

等高線に沿うとき

任意の曲線

等しい

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad t \mapsto (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$t \in [a, b] \to (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(x(t_0+d), y(t_0+d)) - \varphi(x(t_0), y(t_0)) = 0$

$= \dfrac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt}(t_0) d$

$$d\varphi(x(t), y(t))\,(t_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0)$$

合成関数の微分

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\right)}_{\text{grad}\,\varphi} \cdot \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0)\right)$$

内積　0　接線

gradiation: 勾配

$(\text{grad}\,\varphi)(x, y) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y), \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\right)$ と定義

$\left(\dfrac{dx}{dt}(t_0)\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}(t_0)\right)^2 = 1$ を考える

長さ1のベクトルと
決めると
φ が一番変化するのは
等高線に直交する方向
に動くとき

No.

Date

◎ 線積分

平面 ベクトル場 $\mathbb{F}$（力の場） $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{F}(x, y)$

曲線 $t \in [a, b] \longmapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

$(x(b), y(b))$

$(x(a), y(a))$

線積分の定義

$$\int_a^b \left\{ \mathbb{F} \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \right\} dt$$

aからbまでこの曲線に沿って動いたとき、力の場から受ける仕事

最初スカラー場

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

ベクトル場

について線積分する

ポテンシャルエネルギー

$$\int_a^b \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \right\} dt$$

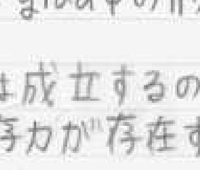
$\dfrac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt}$

$$= \Big[\varphi(x(t), y(t)) \Big]_a^b$$

微分したものを積分したらもとにもどる

$$= \varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a))$$

微積分学の基本定理



スタートからゴールまでどの経路を通るか関係ない（途中経路は関係ない）

場から受けた仕事量は最初と最後で決まる

||

保存力

$\mathbb{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$ の形であれば $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ は保存力である

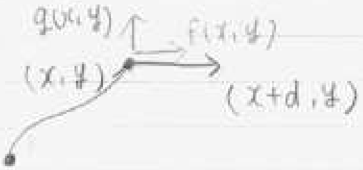
逆は成立するのか？

保存力が存在すれば $\mathbb{F}$ は $\mathrm{grad}\,\varphi$ の形で書けるかどうか

$\varphi + \underset{\text{定数}}{\underline{C}}$ ← さえる

$\mathbb{F}$ 保存力　$\mathbb{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$

もしも $\mathbb{F} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と書けるとすると



平面上に固定 (x_0, y_0)

$\varphi(x,y) - \varphi(x_0, y_0)$

定数

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$　$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ ― この偏微分がどのようになるかみたい

$d \in D$

$\varphi(x+d, y) - \varphi(x,y) = f(x,y)\,d$

つまり $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f$ となる　　x方向の偏微分すれば fが出てくる

同様に $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = g$　　y方向の偏微分すれば g出てくる

もとの力の場がでてくる

逆も成立