2007年 2学期 筑波大学生物資源学類　2007年10月1日

基礎数学 第4回 担当 西村泰一　出席者 33名＋西田先生 宮本先生 TA

ノート 高橋

M^N：NからMへの写像の全体（集合）

MもNも集合（もののあつまり）

$|M|=m$　（mコの元からなる）
$|N|=n$　（nコの元からなる）

nからmへの写像はいくつあるのか？
$|M^N| = |M|^{|N|}$　（M^N個ある）
指数法則が成立

例えば
$|M|=2$ $\{0,1\}$
$|N|=3$ $\{a,b,c\}$

aの上で0か1を対応させる
b 〃
c 〃

$2\times2\times2 = 2^3$

$(M^N)^L = M^{\underbrace{N\times L}_{\text{直積}}}$　$N\times L\{(n,l)\mid n\in N,\ l\in L\}$

$\varphi : L \to M^N$
$\varphi(l) \in M^N$
$\varphi(l)(n) \in M$

$\tilde{\varphi}(n,l) = \varphi(l)(n)$ と定義すると．
$\tilde{\varphi} : N\times L \to M$
$(M^N)^L \ni \varphi \longmapsto \tilde{\varphi} \in M^{N\times L}$

$\psi \in M^{N\times L}$
$\psi \in N\times L \to M$ とする
$\underset{\sim}{\psi}(l) = \psi(\cdot, l) : N \to M$
$\underset{\sim}{\psi}(l) \in M^N$

$\psi \longmapsto \underset{\sim}{\psi}$

$$\boxed{\text{課題I}\quad \underset{\sim}{\tilde{\varphi}} = \varphi,\quad \tilde{\underset{\sim}{\psi}} = \psi \ \text{を示せ}}$$

No.
Date

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^n$から$\mathbb{R}^m$への線形写像の全体

微分 $df: \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{n\times m}$

高階微分 $d(df): \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \shortparallel \qquad \qquad \qquad \varphi(x, y) \in \mathbb{R}^m$

$\qquad \qquad \qquad \qquad L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \qquad \quad \cap \ \cap$

linear $\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \mathbb{R}^n \ \mathbb{R}^n$

> $L(\mathbb{R}^n; L(\overset{M}{\mathbb{R}^n}; \mathbb{R}^m))$と $L(\overset{N}{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$が同一視できることを示せ …… 課題II
> ・M → Nの関数とN→Mの関数を構成
> ・線形性をチェックすること

$d(df) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

$a \in \mathbb{R}^n$
$\partial_v(\partial_u f(a)) = \partial_u(\partial_v f)(a)$を示したい
$d_1\ d_2 \in D$

この点で微分する

$\{f(a+d_1u+d_2v) - f(a+d_1u)\} - \{f(a+d_2v) - f(a)\}$ …(*)

$= d_2\partial_v f(a+d_1u) - d_2\partial_v f(a)$
$= d_2\{\partial_v f(a+d_1u) - \partial_v f(a)\}$
$= d_2 d_1 \partial_u(\partial_v f)(a)$

> (*)をくくりかえた
> $\{f(a+d_1u+d_2v) - f(a+d_2v)\} - \{f(a+d_1u) - f(a)\}$
> $=$ ……
> $= d_1 d_2 \partial_v(\partial_u f)(a)$ となることを示せ …… 課題III

偏微分の順序を入れ替えても問題ない
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Taylor展開

・ $df(a) = f'(a) \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 　線形写像

・ $f''(a)$ 　$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 　二重線形写像

・ $f'''(a)$ 　$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 　三重線形写像

・ $f(a + du) = f(a) + df'(a)(u)$ 　"微分の定義式"

・ $f(a + d_1u_1 + d_2u_2)$ 　$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, $d_1 d_2 \in D$ 　$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$= f(a + d_1u_1) + d_2 f'(a + d_1u_1)(u_2)$

$= f(a) + d_1 f'(a)(u_1) + d_2 f'(a)(u_2) + d_2 d_1 f''(a)(u_1, u_2)$

$= f(a) + f'(a)\{d_1(u_1) + d_2(u_2)\} + d_1 d_2 f''(a)(u_1, u_2)$

ここで

$f''(a)(d_1u_1 + d_2u_2, \ d_1u_1 + d_2u_2)$ 　内積で考える $\langle (d_1u_1 + d_2u_2) \cdot (d_1u_1 + d_2u_2) \rangle$

$= f''(a)(d_1u_1, \ d_1u_1 + d_2u_2) + f''(a)(d_2u_2, \ d_1u_1 + d_2u_2)$

$= f''(a)(d_1u_1, d_1u_1) + f''(a)(d_1u_1, d_2u_2) + f''(a)(d_2u_2, d_1u_1) + f''(a)(d_2u_2, d_2u_2)$

$= f''(a)(d_1u_1, d_2u_2) + f''(a)(d_2u_2, d_1u_1)$ 　$d_1d_1, \ d_2d_2$ はゼロだから

$= d_1 d_2 \{f''(a)(u_1, u_2) + f''(a)(u_2, u_1)\}$

$= 2 d_1 d_2 f''(a)(u_1, u_2)$ 　ここで $f''(a)$ は対称だから

$h = d_1u_1 + d_2u_2$ とおく

$f(a + h) = f(a) + f'(a)(h) + \frac{1}{2} f''(a)(h, h)$

課題IV… $h = d_1u_1 + \cdots + d_k u_k$

$$f(a + h) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(h, \cdots, h)$$

となることを示せ 　（数学的帰納法）