2007年 2学期 筑波大学 生物資源学類 2007年9月12日

基礎数学 第3回 担当西村泰一 出席者 41名+

ノート 高橋 西田先生、TA 高橋

線形写像

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ とは $x, y \in \mathbb{R}^n$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ たし算を保つ

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ スカラー倍を保つ

$\alpha \in \mathbb{R}$

標準基底

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbb{e}_1 + x_2 \mathbb{e}_2 + \cdots + x_n \mathbb{e}_n$ 標準基底を使うと任意のベクトル x は成分で書くことができる

したがって

$f(x) = f(x_1 \mathbb{e}_1 + x_2 \mathbb{e}_2 + \cdots + x_n \mathbb{e}_n)$ 線形写像なのでたし算はわけ、スカラー倍を前に出す

$= x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbb{e}_n)$

つまり

f は $\mathbb{e}_1 \cdots \mathbb{e}_n$ という n 個の元の値ですべて決まる

$$m\Bigg(\overbrace{[\,f(\mathbb{e}_1)\ \ f(\mathbb{e}_2)\ \cdots\ f(\mathbb{e}_n)\,]}^{n}$$ 線形写像 f の行列

$$\begin{array}{ccc} \cap & \cap & \cap \\ \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$m \times n$ の行列

$$[\,f(\mathbb{e}_1)\ f(\mathbb{e}_2) \cdots f(\mathbb{e}_n)\,] \overset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$= x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2) + \cdots x_n f(\mathbb{e}_n)$

No.

Date

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$　　線形写像は行列で表される

写像の足し算 ⟷ 行列の足し算に対応

- $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

写像のスカラー倍 ⟷ 行列のスカラー倍に対応

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像の全体　$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

n×m次元の線形空間となる　$\mathbb{R}^{nm}$ と同じと考えることができる　← ひとつの線形空間

- 合成写像を考える

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x+y) &= g(f(x+y)) \\
&= g(f(x) + f(y)) \\
&= g \circ f(x) + g \circ f(y)
\end{aligned}
$$
たし算を保つ

$$
\begin{aligned}
g \circ f(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) \\
&= g(\alpha f(x)) \\
&= \alpha\, g \circ f(x)
\end{aligned}
$$
スカラー倍を保つ

つまり

fもgも線形写像であれば、合成写像も線形写像である

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = [f(e_1)\ f(e_2)\ \cdots\ f(e_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\parallel$
Aとする

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & & \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lm} \end{pmatrix} = [\overbrace{g(e_1)\ g(e_2) \cdots g(e_m)}^{m}]) \, l$$

$\parallel$
Bとする

- $g \circ f$ の行列はどうなるか?
  合成写像

$$\begin{aligned} g \circ f(e_1) &= g(f(e_1)) \\ &= g\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}\right) \\ &= g(\alpha_{11} e_1 + \cdots + \alpha_{m1} e_n) \\ &= \alpha_{11} g(e_1) + \cdots + \alpha_{m1} g(e_n) \\ &= \alpha_{11} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{l1} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{m1} \begin{pmatrix} \beta_{1m} \\ \vdots \\ \beta_{lm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

たし算はわけ、スカラー倍は前に出す

$g \circ f$ の行列は BA である

$m \times n$　　$l \times m$

行列の積 $\longleftrightarrow$ 合成写像

No.

Date

前の話にもどると……

微分

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 多変数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} x & & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \end{array}$$

$df(x)$ 点xにおける微分

$\cap\!\!\shortmid$

$L(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m)$

$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ への線形写像の行列表示？

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ と表せる

偏微分はあくまで成分

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $\quad z_1, \; z_l$

合成関数の微分は

$d(g \circ f) = (d\, g(f(x))) \circ df(x)$ 線形写像の合成となる

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial z_l}{\partial y_1} & \frac{\partial z_l}{\partial y_2} & & \frac{\partial z_l}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

公式は行列のかけ算の成分

高次の微分

$df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

もう1回微分　　　　これも線形空間 $\mathbb{R}^{nm}$

$d(df) : \mathbb{R}^n \to \underbrace{L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))}_{\text{この空間は?}}$

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f(x, y) \in \mathbb{R}^m$

双線形写像（bilinear）

ふつうの写像を考える

NからMへの写像の全体，M^N

LからMᴺへの写像

$f : L \times N \xrightarrow{\text{直積}} M$　　$\{(x, y) \mid x \in L, y \in N\}$

$\begin{array}{l} \;\;\;\; \cup\!\!\!\! \mid \\ \;\;\;\; x \\ \downarrow \end{array}$

$f_x : y \in N \longmapsto f(x, y) \in M$

指数法則

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(M^N)^L = M^{N \times L}$ …集合に関する指数法則

$L \to (N \to M)$

$L \times N \to M$　と同じこと

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$　二重線形写像が対称になっている

入れかえてもかわらない

順序は関係ない