2007年度 2学期 筑波大学 生物資源学類　　2007年 9月 10日

基礎数学 第2回目 担当:西村泰一 出席者:45名

ノート:高橋　　+ 西田先生, 宮本先生, TA

◎ 多変数の微分

$f, \varphi : R^n \to R^m$

$u, x \in R^n$　　Kock-Lawvereの公理が成立から

$d \in D \mapsto f(x+du) \in R^n$

$f(x+du) = f(x) + \overset{D}{d}\,\partial_u f(x)$　　fのxにおけるu方向の微分

$u \in R^n \mapsto \partial_u f(x) \in R^n$　　線形写像になる

＊線形写像とは

$\varphi : R^n \to R^m$

$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

$\underline{d}f(x)$　　$\underline{d}\,\partial_u f(x)$　　ちがうので注意

↖ 微分　　↖ D

• m=n=1のとき　（一変数の微分ー高校での微分）

$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{線形}} \mathbb{R}$　（RからRへの線形写像）

$\cup$

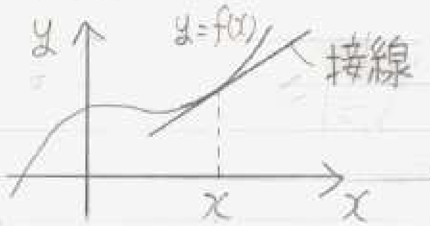
$a = a1$

$\varphi(a) = \varphi(a1)$
$\quad = a\varphi(1)$　スカラーは前に出せる

$a \mapsto \ell a$

$\exists!\, \ell \in \mathbb{R}$　（あるℓが定まる）

$\varphi(a) = \ell a$




$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \underset{f'(x)}{\ell}\,\Delta x$

↖ Δxの関数

No.

Date

- $n=2,\ m=1$ $xy$平面にふろしきをかぶせたような形

$z = f(x, y)$
$x = (x, y)$

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$
$\Delta x \in D = a\Delta x + b\Delta y$ ← 接線ではなく接平面での近似
$= a\,du_1 + b\,du_2$

$= d(au_1 + bu_2)$ ← $\Delta x, \Delta y$を小さくしていくとき どんどん接平面に近づいていく

$d \in D,\ u \in \mathbb{R}^2$
$(\Delta x, \Delta y) = du$
$u = (u_1, u_2)$

$(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto au_1 + bu_2 \in \mathbb{R}$ (線形写像)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 線形写像.
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2$ のとき
$\varphi(a) = \varphi(a_1 e_1 + a_2 e_2)$
$= a_1\varphi(e_1) + a_2\varphi(e_2)$
$\underbrace{[\varphi(e_1)\ \ \varphi(e_2)]}_{1\times 2\ (行)(列)} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1\ (行)(列)}$ 行列の積

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$m \times n$の行列がでてくる

※「微分＝線形化」をしているというのが基本哲学

だから線形代数が表へ出てこざるをえない

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ 成分で書くことができる

$$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \\ \Psi \\ u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots\cdots + u_n e_n\end{array}$$

$$df(x)(u) = df(x)(u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n)$$
$$= u_1 \underbrace{df(x)(e_1)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}} + u_2 \underbrace{df(x)(e_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}} + \cdots\cdots + u_n \underbrace{df(x)(e_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

$$df(x)(e_1) = \partial_{e_1} f(x)$$
$$f(x + de_1) = f(x) + \partial_{e_1} f(x)$$

$x_1$ 方向の偏微分　（2番目以降固定，1番目だけ動かす）

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$x_i \ (x_1, x_n) \mapsto x_n$$

$x_i$ を微分せよ（$dx_i$）

$x$ がどこにあるか関係ない

$$x_i(x + du) = x_i + du_i - x_i = du_i$$
$$u_1 = dx_1(u)$$

以上より

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$ となる

（全微分の公式）

No.

Date

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ , $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

合成関数の微分

$$g \circ f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ x \end{array} \to \mathbb{R}^l$$

$$d(g \circ f)(x)(u) = \partial_u (g \circ f)(x)$$

このベクトルに
dがかかった形とみる

$$\begin{aligned} g \circ f(x + du) &= g(f(x + du)) \\ &= g(f(x) + d\,\partial_u f(x)) \\ &= g(f(x)) + d\,\partial_{\partial_u f(x)} g(f(x)) \end{aligned}$$

$$\partial_{\partial_u f(x)} g(f(x)) = dg(f(x))(df(x)(u))$$

$$d(g \circ f) = dg(f(x)) \circ df(x)$$