2007年2学期 筑波大学 生物資源学類　2007年11月16日

基礎数学 第10回 担当 西村泰一　出席者 33名 + 西田先生 TA

ノート 髙橋

$\mathbf{r} = (x, y, z)$

$\mathrm{div} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 3$

Gaussの発散定理

$\iint_{\Sigma} \mathbf{f}\, ds = \iiint_{\Omega} \underline{(\mathrm{div}\,\mathbf{f})}_{3}\, dv$

1の体積分 ∴ Ωの体積

$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\mathbf{r} r^n = \mathbf{r}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$
$= (x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$

$\mathrm{div} = 3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} + n(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$
$= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}(3 + n)$

$n = -3$のとき $\mathrm{div} = 0$.

$= \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$

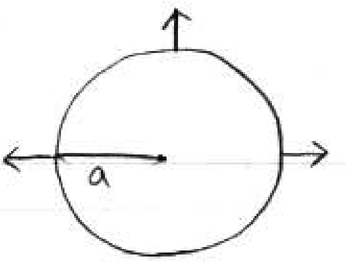
$\frac{k|q|}{r^2}\ \frac{1}{r}$

Coulombの法則　電場Eは距離の二乗に比例する
受ける力の方向は $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ である

電場Eがあるとき 電荷qが原点にある半径aの球を考える

電場は球の表面に直交している

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega (\mathrm{div})\,dv$$
$$= 0\ ?$$



Gaussの発散定理が使えるためには
Σ上でベクトルが定義されて、
なおかつ
Ωでもベクトルが定義されていることが必要

少なくとも球の表面および中心でベクトルが定義されていないとならない

ところが $\frac{1}{r^2}$ すなわち r^2 でわっているので原点ではベクトル場が定義されていない
(0)

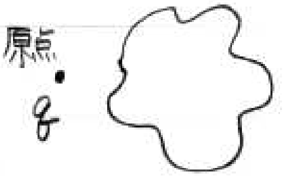
原点ではGaussの発散定理が使えない

$$\frac{kq}{a^2} \times 4\pi a^2 = 4\pi k q$$

ベクトルの大きさ　表面積

○任意の電荷を含まない閉曲面を考える → Gaussの発散定理使える
(原点含まない)

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega (\mathrm{div}\,\boldsymbol{f})\,dv$$
$$= 0$$



◦ 電荷を含む任意の閉曲面を考える

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma'} \mathbb{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$= \iint_{\Sigma} E\cdot dS - \iint_{\Sigma'} E\cdot dS = 0$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbb{E}\cdot dS = \iint_{\Sigma'} \mathbb{E}\cdot dS$$

$$= 4\pi k q$$

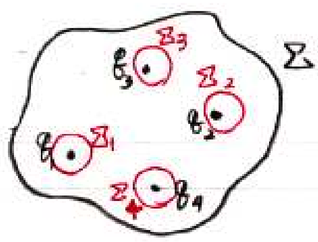
電荷中心で半径小さい
球を考える

Σ∪Σ'としたとき
球の内側りが外となるので
球内に垂線をたてる

◦ Σの中に複数電荷がある場合

$$\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4} \mathbb{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbb{E}\cdot dS = 4\pi k(q_1+q_2+q_3+q_4)$$



曲面が複雑でも閉曲面内の電荷の
和がわかればよい

↓ 一般化

◦ 電荷が連続的に分布している場合

点電荷を増やして連続分布に近づける
点電荷で近似する

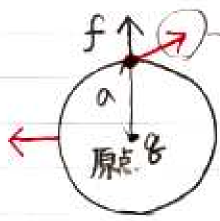
$$\iint_{\Sigma} \mathbb{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi k \iiint_{\Omega} \rho\, dV$$ Gaussの法則

電荷密度

これまで
Coulombの法則 ⟶ Gaussの法則　を導いた

Gaussの発散定理

逆を考える
Gaussの法則 ⟶ Coulombの法則　?



電場は球面に垂直

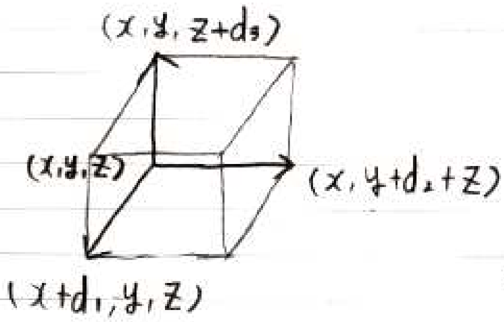
空間の中には
qのみなのでこの方向
に力を受けるのは変である

物理的に考えると
全部一様でないとおかしい

$$f\,4\pi a^2 = 4\pi k q$$

$$f = \frac{kq}{a^2} \qquad \text{Coulombの法則}$$

Gaussの法則とCoulombの法則は等価である



$$\int_z^{z+d_3}\int_y^{y+d_2}\int_x^{x+d_1} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= d_1 d_2 d_3\, \rho(x,y,z)$$

divE

電荷Eのdivは電荷密度

divE > 0　湧き出し
　　 < 0　吸い込み

Gaussの法則を仮定すれば　divE = ρ　(微分形)

静電気学は非圧縮性渦なし流体力学と数学的にほとんど同じ
数学で表して同じ形なら使える