2007年 2学期 筑波大学生物資源学類　　　2007年9月3日

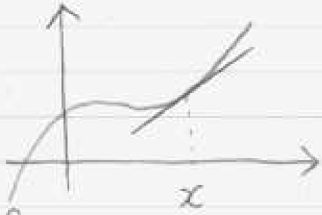
No.

Date

基礎数学 第1回目 担当:西村泰一 出席者:45名+西田先生,TA

ノート:高橋(TA)

微分 (1学期の復習)



$y=f(x)$

曲線 → 直線にすること

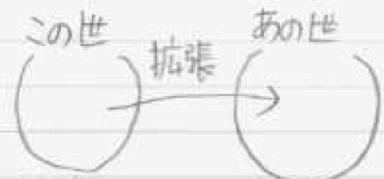
2通り

- 極限 ⇒ 微分　限りなく直線に近づく　(高校数学)
  しかし直線になることはない　19C以降

- 十分近くでは直線になる　17,18C
  どれくらい近かというと　Newton, Leibniz
  $D=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$　Euler
  $\|$
  $\{0\}$　正当化されないまま
  世の中に出る

$x\in\mathbb{R}$　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\exists !}$

$f(x+d)=f(x)+\underset{\underset{f'(x)}{\mathbb{R}}}{\underset{\cap}{?}}\,d$ (Kock-Lawvereの公理)



すべての関数が微分可能　数学全体

↑

応用数学向き　実数 ⇒ 複素数

詳:1学期第4回参照.

- $(fg)'=f'g+fg'$

$f(x+d)\,g(x+d)=\{f(x)+df'(x)\}\{g(x)+dg'(x)\}$

$=f(x)g(x)+d\{\underbrace{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}_{\text{微分係数}}\}+\underbrace{d^2f'(x)g'(x)}_{0}$

- 合成関数

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x+d)=g(f(x+d))$

$=g(f(x)+\underbrace{df'(x)}_{\in D\ ※参照})=g(f(x))+d\,\underline{f'(x)g'(f(x))}$

No.

Date

※ $(\alpha d)^2 = \alpha^2 \overset{\to 0}{d^2} = 0$

スカラー倍

$(d_1+d_2)^2 = \underset{0}{d_1^2} + \underset{0}{d_2^2} + 2d_1d_2$

・ $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$ （高校での合成関数）

$\displaystyle = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x+h) - f(x) \to 0$

0になる可能性は大いにあるのでごまかし

詳：1学期第4回参照。

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 多変数

$\begin{array}{cc} \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \\ \cup\!\!\!\mid & \cup\!\!\!\mid \\ x & u \end{array}$

ベクトル

$\tilde{f}(a) = f(x + au)$

$a \in \mathbb{R}$

$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $\mathbb{R}$から$\mathbb{R}^m$への関数

$a \mapsto \tilde{f}(a)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$g(a) = \begin{pmatrix} g_1(a) \\ g_2(a) \\ \vdots \\ g_m(a) \end{pmatrix}$

$g(a+d) = g(a) + d\,?$ （$\exists!\ ? \in \mathbb{R}^m$）

Kock-Lawvereの公理

$\tilde{f}(d) = \tilde{f}(0) + d\,?$ （$\exists!\ ? \in \mathbb{R}^m$）

出発点を一変数におとせば Kock-Lawvereの公理が応用できる

$\boxed{f(x + du) = f(x) + d\,\partial_u f(x)}$

動かす（u）　固定（x）

fのxにおけるu方向の微分
（方向微分）

$f(x+du) = f(x) + d\partial_u f(x)$

$u \to \alpha u$

$f(x+d\alpha u) = f(x) + d\partial_{\alpha u} f(x)$

$f(x+d\alpha u) = f(x) + d\alpha\partial_u f(x)$

スカラー $\in D$

結論 $\partial_{\alpha u} f(x) = \alpha\partial_u f(x)$

$u \to u_1+u_2$

$f(x+d(u_1+u_2)) = f(x) + d\partial_{u_1+u_2} f(x)$

$f(x+d(u_1+u_2)) = f(x+du_1+du_2)$

この点でのu_2方向の微分

固定

$= f(x+du_1) + d\partial_{u_2} f(x+du_1)$ $\quad \partial_{u_2} f: R^n \to R^m$

$= f(x)+d\partial_{u_1}f(x) + d\partial_{u_2}(f(x)+d\partial_{u_1}f(x))$

$= f(x)+d\partial_{u_1}f(x) + d\{\partial_{u_2}f(x)+d\partial_{u_1}\partial_{u_2}f(x)\}$

uをu_2に固定してxを動かす $\partial_{u_2}f : R^n \to R^m$ $\quad d^2\partial_{u_1}\partial_{u_2}f(x) \fallingdotseq 0$

$= f(x)+d\{\partial_{u_1}f(x)+\partial_{u_2}f(x)\}$

結論 $\boxed{\partial_{u_1+u_2}f(x) = \partial_{u_1}f(x)+\partial_{u_2}f(x)}$

- xを固定すると線形写像におけるfの微分となる

$df(x)$ $\quad$ $n=m=2$とすると 2×2の行列で表せる