筑波大学生物資源学類「基礎数学」第8回 担当 西村泰一　受講者 13名

ノート TA高橋史帆 ［+TA 桑田・中澤・高橋 西田先生

$d \in D = \{ d \in R \mid d^2 = 0 \}$

$$\boxed{\int_a^{a+d} f(x)dx = df(x)}$$

◎ 微積分学の基本定理 (The fundamental theorem of calculus)

$F' = f$

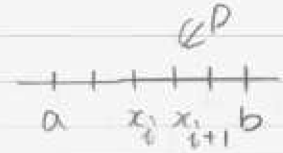
$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx}$$ … 微積分学の基本定理 (The fundamental theorem of calculus)

$$\boxed{F(a+d) - F(a) = d f(a)}$$ ・微分係数の定義

$$\boxed{F(a+d) - F(a) = \int_a^{a+d} f(x)dx}$$ … 1次の無限小における微積分学の基本定理 (The fundamental theorem of calculus on the infinitesimal level)

これが成り立つように「微分係数」は定義されている

1次の無限小でaからbを細分している。あの世では有限個で分割できる (あの世の整数はこの世でみると無限個になっている) → 細分




$$F(x_1) - F(a) = \int_a^{x_1} f(x)dx$$

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$\vdots$$

$$F(x\quad) - F(x\ ) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$+)\ F(b) - F(x_n) \quad \int_{x_n}^{b} f(x)dx$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

これは ベクトル解析 の原型 である。

主役
- grad
- div — Gaussの発散定理がDでなりたつように決める
- rot — Stokesの定理がDでなりたつように決める

$d, d_1, d_2 \in D = D_1$ , $d_1+d_2 \in D_2 = \{d \in \mathbb{R} \mid d^3=0\}$ とする

$f(a+d) = f(a) + f'(a)d$

• $f(a+d_1+d_2) = f(a+d_1) + f'(a+d_1)d_2$

$= f(a) + f'(a)d_1 + \{f'(a) + f''(a)d_1\}d_2$ 　　$d_1$と$d_2$入れかえても成立する

$\boxed{= f(a) + f'(a)(d_1+d_2) + f''(a)d_1d_2}$ 　$d_1, d_2$の基本対称式

$= f(a) + f'(a)(d_1+d_2) + \frac{f''(a)}{2}(d_1+d_2)^2$

$(d_1+d_2)^2 = d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2$

$\therefore d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$

$d_1+d_2 = d \in D_2$と置き換えたものが2次のTaylor展開

$(d_1, d_2) \in D^2 \xmapsto{\text{全射}} d_1+d_2 \in D$

$d_1, d_2, d_3 \in D$

• $f(a+d_1+d_2+d_3) = f(a+d_1+d_2) + f'(a+d_1+d_2)d_3$

$= \{f(a) + f'(a)(d_1+d_2) + f''(a)d_1d_2\} + \{f'(a) +$

$f''(a)(d_1+d_2) + f'''(a)d_1d_2\}d_3$

$= f(a) + f'(a)\underbrace{(d_1+d_2+d_3)}_{1\text{次}} + f''(a)\underbrace{(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)}_{2\text{次}}$

$+ f'''(a)\underbrace{d_1d_2d_3}_{3\text{次}}$ 　基本対称式

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(d_1+d_2+d_2)^2}{2} \\ = d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1 \\ \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{6} \\ = d_1d_2d_3 \end{array}\right]$$

$= f(a) + f'(a)(d_1+d_2+d_3) + \frac{f''(a)}{2}(d_1+d_2+d_3)^2$

$+ \frac{f'''(a)}{3!}(d_1+d_2+d_3)^3$ 　3次のTaylor展開

$(d_1, d_2, d_3) \in D^3 \mapsto d_1+d_2+d_3 \in D_3 = \{d \in \mathbb{R} \mid d^4=0\}$

↑直積 $A \times B$

$\mathbb{R}^2 = (\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{a}, \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{b})$

$A \times B = (\underset{\underset{A}{\cap}}{a}, \underset{\underset{B}{\cap}}{b})$ 　AとB同じとき $A^2$

一般に、$d_1, d_2, \cdots, d_n \in D$とすると

$$f(a+d_1+\cdots+d_n) = f(a)+f'(a)(d_1+\cdots+d_n)+\frac{f''(a)}{2!}(d_1+\cdots+d_n)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(d_1+\cdots+d_n)^n$$

★ n次のTaylor展開の証明 …… 問題Ⅲ
数学的帰納法を用いて

⑨ 微分方程式

$(e^{at})' = ae^{at}$　($a, k$は定数とする)

$x = e^{at}$
$x' = ax$　この微分方程式の解になっている ⇒ $x'=ax$は解を持つ
$x = ke^{at}$

$x = f(t)$とする
$f'(t) = af(t)$ なら $f(t) = ke^{at}$と書けるのか

$\frac{f(t)}{e^{at}} = f(t)e^{-at}$ を考える

$(f(t)e^{-at})' = f'(t)e^{-at} - af(t)e^{-at}$
$= af(t)e^{-at} - af(t)e^{-at} = 0$

$f(x) = F'(x)$
$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$
微分して0ならここも0

よって$F(b)-F(a)=0$　よってFは定数

$(f(t)e^{-at})' = 0$だから
$f(t)e^{-at} = k$ (定数)
$\therefore f(t) = ke^{at}$　　$f(0) = k$　$k$は時刻0のときの状況(初期条件)

Laplaceの魔

時刻のゼロのときの位置がわかればその後の全てがわかる

初期条件を定めると答えはただ1つに定まる

一意

$t \to +\infty$とすると

- $a=0$のとき　一定値
- $a>0$のとき　発散
- $a<0$のとき　0に収束

$f(t) = k e^{at}$

$t \to +\infty$　どんどん大きくなる

e

$a$の符号をみることで
定性的な大きなふるまいがある程度よめる。