2007年度 1学期

No. 1

筑波大学生物資源学類「基礎数学」第6回 担当 西村泰一 ノート:TA高橋史帆 2007年5月25日

受講者 38名

微分学 前回までの復習

Back for Newtow & Leibniz

◎ Kock-Lowvereの公理

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$

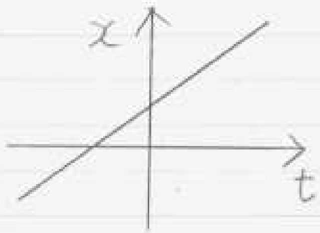
$(\exists!\, a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)$

$$f(x+d) = f(x) + \underset{a}{f'(x)}\,d$$

任意の関数は微分可能
微分係数 a定義

◎ 慣性の法則 (Law of inertia)

力を受けない物体は等速度運動する (Newton)



天上と地上では運動異なる

◎ 1次の無限小における慣性の法則 (Law of infinitesia inertia)

いかなる力を受けようともたかだか1次の無限小の時間しか経過しない間は等速度運動する (Nishimura)

(力をうけると曲がるが曲がるためには時間が必要)

◎ 商の微分 (Kock-Lowvereの公理を用いた証明)

$$\frac{f(x+d)}{g(x+d)} = \frac{f(x)+f'(x)d}{g(x)+g'(x)d}$$

$$= \frac{f(x)+f'(x)d}{g(x)+g'(x)d} \cdot \frac{g(x)-g'(x)d}{g(x)-g'(x)d}$$

$$= \frac{f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\}d - f'(x)g'(x)\underbrace{d^2}_{0}}{g(x)^2 - \{g'(x)\underbrace{d\}^2}_{0}}$$

← $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

$$= \frac{f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\}d}{g(x)^2}$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} + \underbrace{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}_{微分係数}\,d$$

No. 2

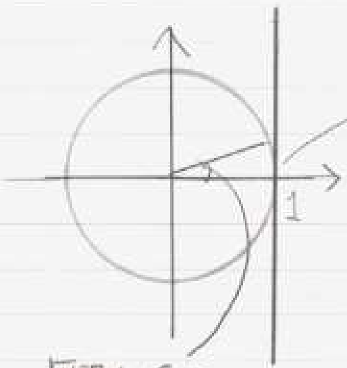
Date

◎三角関数

角度の表示

$\begin{cases} \text{度} \cdots\cdots 360\text{度} & \leftarrow 360\text{等分した内の1等分を1単位} \\ \text{radian} \cdots 2\pi & \leftarrow \text{角度を円弧の長さ(半径1の円)で表す} \end{cases}$

半径の長さの単位と円弧の長さの単位は同じものを用いる



無限小∈D

接線と円弧が一致

- $\cos d = 1$ (角を測る単位に関係ない)
- $\sin d = \begin{cases} d & (\text{radian}) \\ \frac{2\pi}{360} d & (\text{度}) \end{cases}$

- $\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d(\text{ラジアン}),\ \frac{2\pi}{360}d(\text{度})}$

radianの場合 $\rightarrow = \sin x + \cos x\, d$

度の場合 $\rightarrow = \sin x + \frac{2\pi}{360} \cos x\, d$

$(\sin x)' = \begin{cases} \cos x & (\text{radianで測ったとき}) \\ \frac{2\pi}{360} \cos x & (\text{度 〃}) \end{cases}$

- $\cos(x+d) = \cos x \underbrace{\cos d}_{1} - \sin x \underbrace{\sin d}_{d(\text{radian}),\ \frac{2\pi}{360}d(\text{度})}$

$= \cos x - \sin x\, d$

$= \cos x - \frac{2\pi}{360} \sin x\, d$

$(\cos x)' = \begin{cases} -\sin x & (\text{radian}) \\ -\frac{2\pi}{360} \sin x & (\text{度}) \end{cases}$

1回 $(\sin x)' = \cos x$

2回 $(\cos x)' = -\sin x$

3回 $(-\sin x)' = -\cos x$ 角度をradianで表した場合

4回 $(-\cos x)' = \sin x$ ⇒ $\sin x$は4回微分するともとにもどる

変な係数をつけたくなかったらradian表示を用いるべき

1回 $(\sin x)' = \frac{2\pi}{360} \cos x$

2回 $\left(\frac{2\pi}{360} \cos x\right)' = -\left(\frac{2\pi}{360}\right)^2 \sin x$

3回 $\left(-\left(\frac{2\pi}{360}\right)^2 \sin x\right)' = -\left(\frac{2\pi}{360}\right)^3 \cos x$ 角度を度で表した場合

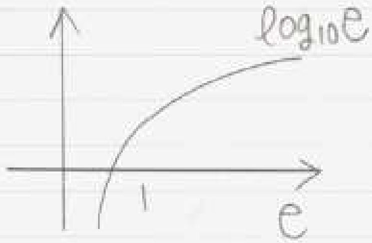
4回 $\left(-\left(\frac{2\pi}{360}\right)^3 \cos x\right)' = \left(\frac{2\pi}{360}\right)^4 \sin x$ ⇒ 係数が複雑になる

◎ 指数関数

$$\begin{cases} \text{底} \cdots\cdots 10 \\ \text{別の底} \cdots e \quad (e>0) \end{cases}$$

- 底が10の場合　$10^d = 1 + ad \quad (\forall d \in D)$　これは定義
- 底がeの場合

$$e^d = (10^{\log_{10} e})^d$$
$$= 10^{(\log_{10} e)d}$$　dのスカラー倍は全体もdとなる
$$= 1 + a(\log_{10} e)d$$



$\frac{1}{a}$となるものがただ1つ定まる
⇓
これをeとすると

$$e^d = 1 + d$$
とかけるのだ

- 指数法則

$$e^{x+d} = e^x e^d$$
$$= e^x(1+d)$$
$$= e^x + e^x d$$

$$(e^x)' = e^x$$

◎ 逆関数

$$\begin{cases} f : x \to \log e^x \\ g : y \to e^y \end{cases}$$

$g \circ f : x \to x$
$(g \circ f)'(x) = 1$

合成関数の微分

$$e^{\log_e x}(\log_e x)' = 1$$
$$x \cdot (\log_e x)' = 1$$　$e^{\log_e x} = x$ 定義
$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

指数関数と三角関数は何か似ているな?!

{ 数II … 多項式関数のみ
{ 数III … 三角関数や指数関数

- $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ （n次の多項式）のとき

$\underline{f(0)=a_0}$

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$

$\underline{f'(0)=a_1}$

$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$

$f''(0)=2a_2 \Rightarrow \underline{a_2=\frac{f''(0)}{2}}$

$f'''(0)=6a_3 \Rightarrow \underline{a_3=\frac{f'''(0)}{6}=\frac{f'''(0)}{3!}}$

以上より

f(x)を4回微分というイミ

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ と表せる ……(*)

- $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots$ （無限次の多項式）のとき

- (*)において $f(x)=e^x$ とすると

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$ と表せる。

$\left(※ (e^x)'=e^x \right)$

- (*)で $f(x)=\sin x$ とすると

$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$ （奇関数）と表せる

奇数項のみからなる

$$\left(\begin{array}{ll} & \sin 0=0 \\ ※ (\sin x)'=\cos x & (\sin x)'(0)=\cos 0=1 \\ (\sin x)''=-\sin x & (\sin x)''(0)=0 \\ (\sin x)'''=-\cos x & (\sin x)'''(0)=-1 \\ (\sin x)''''=\sin x & (\sin x)''''(0)=0 \end{array}\right)$$

・(※)で $f(x)=\cos x$ とすると

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\cdots$$ (偶関数)と表せる

$$\left(\begin{array}{ll} ※\ (\cos x)'=-\sin x & (\cos x)'(0)=0 \\ (\cos x)''=-\cos x & (\cos x)''(0)=-1 \\ (\cos x)'''=\sin x & (\cos x)'''(0)=0 \\ (\cos x)''''=\cos x & (\cos x)''''(0)=1 \end{array}\right)$$

ここで x を z(複素数)に置き換えると

$$e^x = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\cdots$$

また x を ix(純虚数)としてみると (※ $i^2=-1$)

$$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)}_{実}+i\underbrace{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)}_{虚}$$

実数成分と虚数成分にわけて整理

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ オイラーの公式 ← 物理でよく用いる

指数関数と三角関数は親戚である!