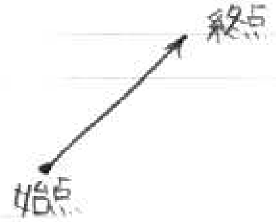
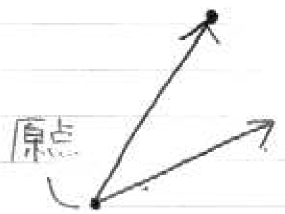
基礎数学 2回目 西村先生　ノート 高橋史帆

No.
Date 07.4.20

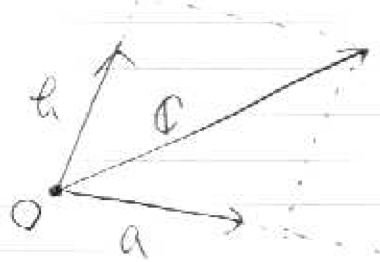
ベクトル　大きさと向き
スカラー　定数





ベクトルと点は一対一に対応 ⇒ 位置ベクトル
ベクトル ⟷ 点

始点は原点にとるとすると



$\mathbb{c} = \alpha\mathbb{a} + \beta\mathbb{b}$　(線形結合)
1次結合

$\mathbb{c} = \alpha_1\mathbb{a} + \beta_1\mathbb{b} = \alpha_2\mathbb{a} + \beta_2\mathbb{b}$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2$
$(\alpha_1 - \alpha_2)\mathbb{a} + (\beta_1 - \beta_2)\mathbb{b} = \mathbb{0}$

$\alpha\mathbb{a} + \beta\mathbb{b} = \mathbb{0}$
$\alpha\mathbb{a} = -\beta\mathbb{b}$
$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ とすると
$\mathbb{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\mathbb{b}$
「これは $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ は同一直線上にある」ことを意味する → 仮定に反する

$\alpha\mathbb{a} + \beta\mathbb{b} = \mathbb{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$　線形独立
一次独立

ベクトル
$\mathbb{c} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\ \mathbb{d} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ のとき $\mathbb{c} + \mathbb{d} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha+\gamma\\ \beta+\delta\end{pmatrix},\ a\mathbb{c} \leftrightarrow \begin{pmatrix}a\alpha\\ a\beta\end{pmatrix}$
$\mathbb{c} = \alpha\mathbb{a} + \beta\mathbb{b}$

$\mathbb{a}$ の長さ, $\mathbb{b}$ の長さが1のとき
$\mathbb{c}$ の長さは $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ となる

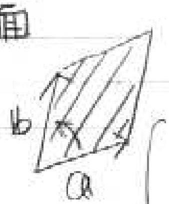
座標が決まる

No.

Date

前回

◎平面



符号のついた平行四辺形の面積 ← $a \to b$ が反時計回り $+$
時計回り $-$

(1) 面積 $S(a,b) = -S(b,a)$ 交代性

↖ 絶対値かわらず符号かわる

⇓

$S(a,a) = 0$ 平行四辺形つぶれてるので

スカラーは前に出せる

(2) $S(\alpha a, b) = \alpha S(a,b)$

$S(a_1 + a_2, b) = S(a_1, b) + S(a_2, b)$ 多重線形性

↖ たし算はわけられる

(3) $S(e_1, e_2) = 1$ 正規化条件

$$\begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 \end{cases}$$

↙ (1)〜(3)だけを用いて変形していく

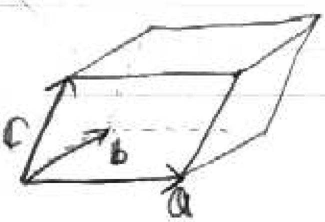
$S(a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2)$

$=$ $S(e_1, e_1) \to 0$
$S(e_1, e_2) \to 1$
$S(e_2, e_1) \to -1$
$S(e_2, e_2) \to 0$

$\cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

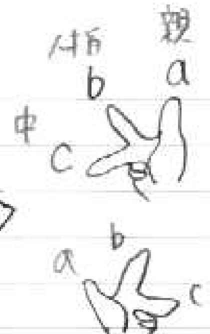
◎空間

平行六面体の体積(符号つき)を考える



cが $a \to b$ へ右ねじを回すときに進む方向にあれば $+$、
逆なら $-$

⟹



右手系なら $+$

左手系なら $-$

(1) $V(a,b,c) = -V(a,c,b)$

(2) $V(\alpha a, b, c) = \alpha V(a,b,c)$
$V(a_1 + a_2, b, c) = V(a_1, b, c) + V(a_2, b, c)$

(3) $V(e_1, e_2, e_3) = 1$ ←

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3 \end{cases}$$ のとき

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$ のとき

$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　$3\times3\times3$で$\underline{\underline{27項}}$

$= V(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\ b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,\ c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3)$

※ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$の並び方 $3! = 6$コが生き残る　（∵3つとも異ならないとつぶれてしまう）
（他はつぶれてなくなる）

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

赤が＋，青が－になる　　後で各自計算するように

- 解析的な定義 → 長 計算はできる　短 どこからふってわいたかわからず（天下り）
- 幾何学的な定義

1学期はベクトル解析中心

grad (gradient) 勾配
div (divergence) 発散
rot (rotation) 回転

② 4×4

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$(4\times4\times4\times4)$項中 生き残るのは$4! = 24$コ

※一般に行列式は $\underline{\underline{n!項}}$ ある．

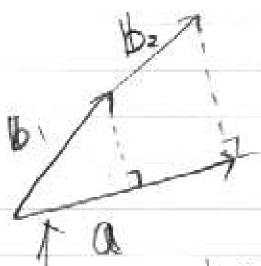
No

Date

◎内積(平面)　$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta$　幾何学的な定義
(スカラー積ともいう)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \quad (\theta = 0)$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$$

直交するを表す



bの正しやえい

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2 \\ (\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} &= \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \end{aligned}\right\}\ \text{二重線形性}$$

• $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

線形性とは
- たし算をわけることができる
- スカラー倍を前に出すことができる

A: all $\forall$ (任意の)
E Existence $\exists$ (ある)

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ のとき
(定義式より)

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1 \\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 = 0 \end{cases}$$

← 直交しているので

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$$
のとき

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= (a_1\mathbf{e}_1)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) + (a_2\mathbf{e}_2)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= a_1b_1\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{1} + a_1b_2\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{0} + a_2b_1\underbrace{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1}_{0} + a_2b_2\underbrace{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2}_{1} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

解析的な定義

幾何学定義と解析的定義をつなぐことが大切!!