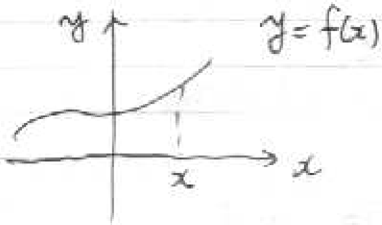
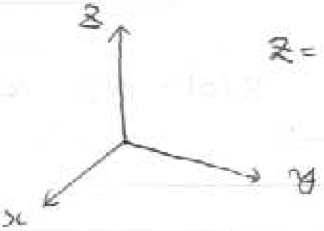
Date 2007 6 29

筑波大学 生物資源学類　基礎数学　担当: 西村泰一　ノート: 西田顕郎　出席40人+中西, ?先生 + 西田　数学類4年

レポート提出〆切　7/9(月)
自然科学系棟 D705 (数学系事務室) の前のレポート受

多変数の微分





$z=f(x,y)$

$f'(x)$: 接線の傾き　　$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$: 接平面の切り口の傾き

多変数の微積分の為には、線形代数に入らねばならない。

ベクトル　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

たしざん
- $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$　加法は交換できる。(交換律)
- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$　(結合律)
- $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$　(単位元)
- $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$　(逆元)

スカラー倍
- $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$
- $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$
- $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$
- $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

公理系 → 抽象化 → これらをみたすものを
(実数体上の) 線形空間という。

例) 数ベクトル空間

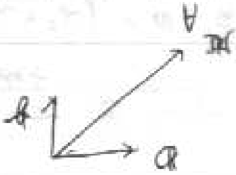
$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1\\ \alpha\alpha_2\end{pmatrix}$$

} と定めると、上の8つの公理をみたす ∴ 線形空間

基底

平面上のベクトル



$(\exists!\, x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}$ → $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は、いろんなくみあわせがありえるが、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と2つ必要。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が同一直線上にない

$\Longleftrightarrow (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \rightarrow \alpha = \beta = 0)$

いま、$\alpha \neq 0$ とする。$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b}$ ← $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が同一直線上になっちゃう！

$\therefore \alpha = 0$。同様に、$\beta = 0$。

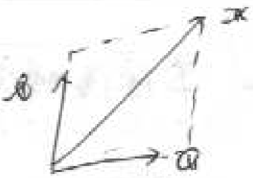
また、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が同一直線上にあれば、$\mathbf{a} = \gamma\mathbf{b}$ とかけるから。$(\gamma \neq 0)$

$\mathbf{a} - \gamma\mathbf{b} = \mathbf{0}$。このとき $\alpha = 1, \beta = -\gamma$ となるので、

$\alpha = \beta = 0$ とはならない（対偶の証明）

こういう状況を、一次独立という。

一次独立なら



$\mathbf{x}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の方向に分解できる。

→ $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}$ とできる。

このあらわし方は、一意的。なぜなら

$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}$ のとき

$(\alpha - \alpha_1)\mathbf{a} + (\beta - \beta_1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$

一次独立だから、$\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$ $\therefore \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$

基底の数を、次元という。

いま、2次元平面で、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を基底にとると、

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}$ とかける。 $\mathbf{x} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ とかける。 $\mathbf{y} \xleftrightarrow[\text{対応}]{} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

このとき $\mathbb{x}+\mathbb{y}=(x_1+y_1)\mathbb{a}+(x_2+y_2)\mathbb{b} \overset{対応}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$

また $\alpha\mathbb{x}=\alpha x_1\mathbb{a}+\alpha x_2\mathbb{b} \overset{対応}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$

したがって、基底がきまれば、平面ベクトルと2次元数ベクトルは一対一に対応する。

高階の微分

$\mathbb{R}^n$ の元 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{n個の基底で}$

$f: V \longrightarrow W$ 線形写像

$\longleftarrow \mathbb{x},\mathbb{y}\in V$ とする。

$f(\mathbb{x}+\mathbb{y})=f(\mathbb{x})+f(\mathbb{y})$

$f(\alpha\mathbb{x})=\alpha f(\mathbb{x})$

この2つが成りたつとき、fは線形写像である、という。(定義)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が線形写像であるとする。

$\mathbb{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする(基底)

$\mathbb{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_1\mathbb{e}_1+x_2\mathbb{e}_2$

$f(\mathbb{x})=f(x_1\mathbb{e}_1+x_2\mathbb{e}_2)=x_1 f(\mathbb{e}_1)+x_2 f(\mathbb{e}_2)$

$f(\mathbb{e}_1)=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $f(\mathbb{e}_2)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおけば、

$f(\mathbb{x})=x_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 a_1 \\ x_1 a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 b_1 \\ x_2 b_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 b_1 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$f(e_1)$ と $f(e_2)$ さえ（e_1, e_2 の上で）きまってしまえば、
f は完全に決まり、行列で表わされる。
要するに、行列は、線形写像の表現。

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 線形写像

合成写像、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

線形写像と線形写像の合成写像は線形写像

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$ とする。（d_1, d_2 は D の元、というイミじゃないよ!!!）

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 a_1 + x_2 b_1 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 \end{pmatrix}$$

$$g(f(x)) = g\left((x_1 a_1 + x_2 b_1) e_1 + (x_1 a_2 + x_2 b_2) e_2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 (x_1 a_1 + x_2 b_1) + d_1 (x_1 a_2 + x_2 b_2) \\ c_2 (x_1 a_1 + x_2 b_1) + d_2 (x_1 a_2 + x_2 b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

要するに、線形写像の合成 $\underset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$ 行列のかけざん

$f, g : V \to W$ 線形写像
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ と定義する。

$f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ $g \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ なら $f+g \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{pmatrix}$

また $\alpha(f(x)) = \alpha f(x)$ と定義すれば、

$\alpha f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 \end{pmatrix}$

従って f や g も線形空間の元（$V \to W$ の線形写像全体が線形空間になる）

V が n 次元、W が m 次元だとする

$V \to W$ の線形写像全体が作る空間を $L_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ とかく。

問VI $L_0(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m)$ が線形空間の公理をみたすことを示し、その次元をしらべよ。

Kock - Lawvere の公理

$f : D \to \mathbb{R}$, $(\exists ! a \in \mathbb{R})\ f(d) = f(0) + ad$

$F(x+d) = f(d)$ とかけば、これまでの Kock - Lawvere の公理

$f : D \to \mathbb{R}^2$ を考える。 $f(d) = \begin{pmatrix} f_1(d) \\ f_2(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(0) + a_1 d \\ f_2(0) + a_2 d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 d \\ a_2 d \end{pmatrix} = f(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{} d$

ここが $\mathbb{R}^n$ になっても同様　　唯一に定まる。 $= f(0) + \mathbf{a} d$

いま $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を固定

$\underbrace{f : D \to \mathbb{R}^2 \text{ で } f(0) = x \text{ となるもの}}$ $\overset{1対1対応}{\longleftrightarrow}$ $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l} f(d) = x + \mathbf{a} d \\ g(d) = x + \mathbf{b} d \end{array}\right\}$ とすると $\begin{array}{l} (f+g)(d) = x + (\mathbf{a}+\mathbf{b})d \\ (\alpha g)(d) = x + (\alpha \mathbf{a})d \end{array}$

従って $\underbrace{\qquad}$ は線形空間になる。

こういうのを、点 x における $\mathbb{R}^n$ の接ベクトル空間、とよぶ。

特に、$\mathbb{R}$ で考えると、　$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$,　$f : D \to \mathbb{R}$,　$f(0) = x$

$\exists ! a \in \mathbb{R}$,　$f(d) = x + ad$.　(Kock-Lawvere の公理より)

$$(F \circ f)(d) = F(x + \underbrace{ad}_{d \in D \text{ なら } ad \in D}) = F(x) + F'(x)\,ad$$

$f \longleftrightarrow a$

$F \circ f \longleftrightarrow F'(x)\,a$　←　F は f に関する線形写像