No 1/6

Date 2007 6 1

琉球大学 生物生産学科 基礎数学 担当：西村泰一

ノート：西田韶郎

出席者
学生 40人
+ TA(平田・中西)
+ 西村夫人
+ 西田

指数法則 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$

加法定理 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$

複素数に拡張（標準的なやり方）

無限次の多項式（べき級数）

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots$$

（マクローリン展開）

実数 x を複素数 z におきかえ.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ） 多項式を用いて拡張できる

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!}$$

$$= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{\cos x} + \cdots + i\Big(\underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}_{\sin x}\Big)$$

$$= \cos x + i\sin x \quad \text{（オイラーの公式）}$$

指数法則 $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$

これが複素数にも成り立つとみとめる. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1 + ix_2} = e^{ix_1}\,e^{ix_2}$$

e^{ix_2}：$\cos x_2 + i\sin x_2$

e^{ix_1}：$\cos x_1 + i\sin x_1$

$e^{i(x_1+x_2)}$：$\cos(x_1+x_2) + i\sin(x_1+x_2)$

$= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$

$+ i(\cos x_1 \sin x_2 - \sin x_1 \cos x_2)$

加法定理が導かれる.

実数を興味の対象にしていても、複素数のように
ちょっと拡張すると、見えなかったものが見えてくる。

→ やみつきになる。

$$
\begin{array}{rl}
 & e^{ix} = \cos x + i\sin x \\
+) & e^{-ix} = \cos x - i\sin x \\
\hline
 & e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x
\end{array}
\quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}
$$

$$
\begin{array}{rl}
-) & \\
\hline
 & e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x
\end{array}
\quad \rightarrow \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
$$

コサイン、サインが指数関数で
あらわされる。

$$
\left.
\begin{array}{l}
\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\
\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}
\end{array}
\right\} \text{双曲線関数}
$$

三角関数に似ている。

ところで

$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ はどう証明するのか？

$$
\text{左辺} = 1 + (z_1 + z_2) + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \cdots
$$

$$
\text{右辺} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \cdots \right) \left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \cdots \right)
$$

$$
\frac{z_1^i}{i!} \qquad \frac{z_2^j}{j!}
$$

左辺＝右辺を確認せよ。(レポート II)

期末試験なし。
レポート。

レポート問題 I

tan x の微分係数を求めよ。

$d \in D$ として $\tan(x+d) = \cdots$ (加法定理で)

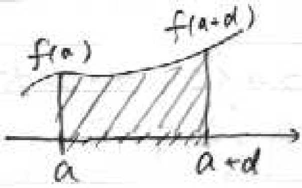
積分

$\{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

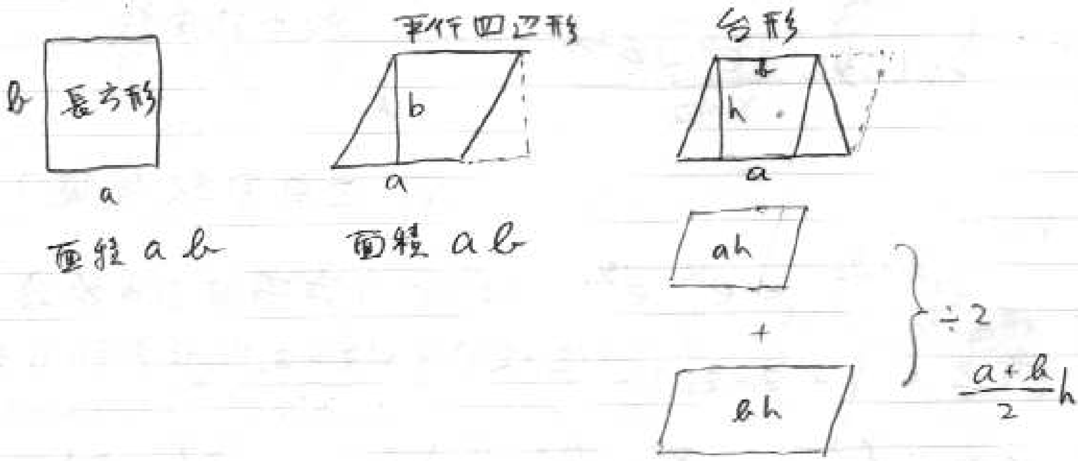
dが非常に小さい時は $(d \in D)$

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx = d\,f(a)$$



dが小さければ
$f(x) = f(a)$?

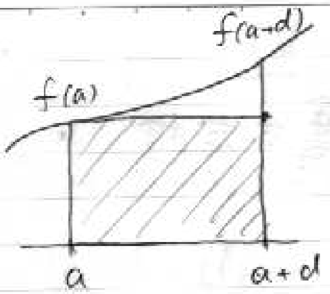
↑ ウソです!

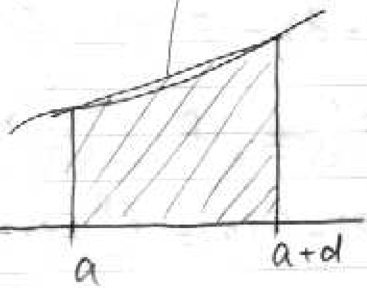


西村の慣性の法則

$d \in D$ の時間内ならば、力がかかっても等速度直線運動をする。

直線(接線)





$f(a) = f(a+d)$

↑

まちがい。
「止まっている」

$$f(a+d) = f(a) + f'(a)d$$

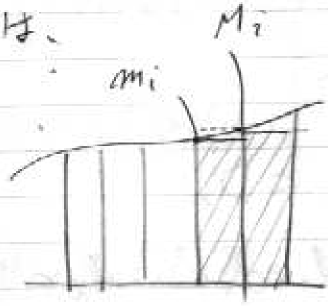
$$面積 = \frac{f(a) + f(a+d)}{2} d$$

$$= \frac{f(a) + f(a) + f'(a)d}{2} d$$

$$= f(a)d + \underbrace{\frac{f'(a)d^2}{2}}_{=0}$$

$$= f(a)d$$

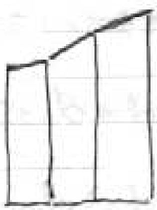
ふつうは、



$$\int = \begin{array}{c} \sum M_i(x_{i+1} - x_i) \\ < \\ \sum m_i(x_{i+1} - x_i) \end{array} の間.$$

(おさえこむ。)

でも、巾零無限小では、



台形の面積のたしざん

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ところで、

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$$

$$F(y+d) - F(y) = \int_a^{y+d} f(x)\,dx - \int_a^y f(x)\,dx = \int_y^{y+d} f(x)\,dx$$

$$= f(y)d$$

Date 2007. 6. 1

$\therefore F(y+d) - F(y) = f(y)d$

$F' = f$　微積分の基本定理

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

べき級数に話をもどす。

$D = D_1 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$

$D_2 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^3 = 0 \}$

$D_3 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^4 = 0 \}$

$\vdots$

$D_n = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0 \}$

$(d_1, d_2) \in D^2 \longmapsto d_1 + d_2 \in D_2$

$(d_1, d_2, \cdots, d_n) \in D^n \mapsto d_1 + d_2 + \cdots + d_n \in D_n$

全射

D_nの元は、Dのn個の元の和として書ける。

$\forall d \in D_2, \ \exists d_1, d_2 \in D, \ d = d_1 + d_2$

$f(x + d_1 + d_2) = f(x + d_1) + f'(x + d_1)d_2$　　$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$= f(x) + f'(x)d_1 + f'(x)d_2 + f''(x)d_1 d_2$

$= f(x) + f'(x)(d_1 + d_2) + f''(x) d_1 d_2$　(＊)

$d_1 d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$ だから

$$f(x+d_1+d_2) = f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)\frac{(d_1+d_2)^2}{2}$$

$d_1+d_2 = d$ とおくと、

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d + \frac{f''(x)}{2}d^2$$

2次のテーラー展開 (※)

$$f(x+d_1+d_2+d_3) = f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2)d_3$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2 \quad (※)$$

$$+\{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x)d_1d_2\}d_3 \quad (※)$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) + f''(x)(d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1) + f'''(x)d_1d_2d_3$$

$$(d_1+d_2+d_3)^2 = 2(d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1).$$

$$(d_1+d_2+d_3)^3 = 3!\,d_1d_2d_3$$

あらためて d とおくと.

3次の
テーラー展開

III　n次のテーラー展開を示せ。

(2007/06/01　以上)