2007年度 1学期

筑波大学生物資源学類「基礎数学」第5回 担当 西村泰一 TA 髙橋史帆

No. 1

Date 2007月5月18日

受講者 49名

微分学

19C
極限 $\longrightarrow$ 微分

実体としての無限小から
プロセスへ

17, 18, 19C Newton, Leibniz
巾零無限小

※メンデレーエフの周期律表や
ダーウィンの進化論もまずは
現象論から入っている。
背後にあるメカニズムが
明確になるのは大部後に
なってから.
ニュートン、ライプニッツの微分
も同様のことがいえる

$D_1 = D = \{ d \in R \mid d^2 = 0 \}$
1次の無限小
$d \in D \to \alpha d \in D$

$d_1, d_2 \in D$
$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 = 2d_1d_2$
$(d_1 + d_2)^3 = d_1^3 + 3d_1^2d_2 + 3d_1d_2^2 + d_2^3 = 0$

$D_2 = \{ d \in D \mid d^3 = 0 \}$
2次の無限小

- 前回は極限と無限小の比較 復習

Kock-Lawvereの公理

$$\boxed{\begin{array}{l}(\exists!\ a \in R)(\forall d \in D)\\ f(x+d) = f(x) + ad\end{array}}$$

- 積の微分

★無限小

$f(x+d)\ g(x+d) = \{f(x) + f'(x)d\}\{g(x) + g'(x)d\}$

★極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

- 合成関数の微分

$g \circ f$

★無限小

$$g(f(x)) = g(f(x) + \underset{\substack{\cup \\ D}}{f'(x)}\,d)$$
$$= g(f(x)) + g'(f(x))\,f'(x)d$$

★極限

0にならない保障はない

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(h)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

・商の微分

$$\left(\frac{f}{g}\right)\cdot g = f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' g + \left(\frac{f}{g}\right) g' = f'$$

Leibnizの公式より

$$\left(\frac{f}{g}\right)' g + \frac{f g'}{g} = f'$$

両辺gでわって $\frac{g}{g}=1$ をかける

$$\left(\frac{f}{g}\right)' + \frac{f g'}{g^2} = \frac{f' g}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$$

・定値関数α，$x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x+d}}{\alpha} = \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\alpha} + 0d \qquad \underline{(\alpha)' = 0}$$

$x \in R \mapsto x \qquad d \in D$

- $x + d = x + 1d \qquad \underline{(x)' = 1}$
- $(x+d)^2 = x^2 + 2xd + \underset{0}{d^2} \qquad \underline{(x^2)' = 2x}$
- $(x+d)^3 = x^3 + 3x^2 d + 3xd^2 + d^3 \qquad \underline{(x^3)' = 3x^2}$
- $(x+d)^n = \underbrace{(x+d)\cdots(x+d)}_{n個} \qquad \underline{(x^n)' = nx^{n-1}}$

$$= x^n + nx^{n-1} d$$

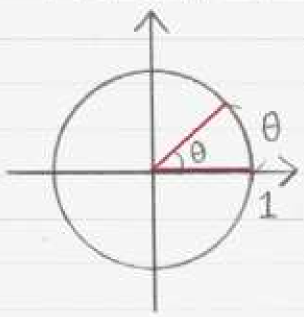
◎ 三角関数

- 角度の表現方法

{ 度数法　360度　　　　※なぜ2πという表示なのか
{ 弧度法　2π(radian)　　　三角関数を微分をラクに表したいから

。「角度をはかる」＝ 2つの線分の開き具合に対して大きさを割り合てること

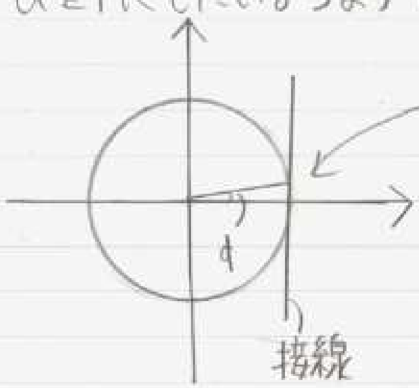
。単位円を考える　(半径 1)



円弧の長さと開き具合は比例するので
円弧の長さで角度を表したのがラジアン

$d \in D$のとき
$\sin 0 = 0$
$\sin d = 0 + \underset{\sim}{a} d$ ←公理
↑
角度の単位のとり方でaの値が異なる

aを1にしたい。つまり $a = (\sin x)'(0) = 1$



円周上の点と接線が
離れているようにみえるがdが非常に
小さいとき一致している

このとき
{ $\sin d = d$　となる
{ $\cos d = 1$

三平方の定理

$$\underbrace{\sin^2 x}_{d^2 \fallingdotseq 0} + \underbrace{\cos^2 x}_{1} = 1$$

- $\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d}$ (加法定理より)

$$= \sin x + \underline{\cos x}\, d$$

$\underline{(\sin x)' = \cos x}$

- $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ である

$$\begin{cases} f : x \to x + \frac{\pi}{2} \\ g : x \to \sin x \end{cases}$$

※合成関数と考えて $\cos x$ の微分をする

$g \circ f = g(f(x)) + g'(f(x)) f'(x) d$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) d$$

$$= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \underline{- \sin x}\, d$$

$\underline{(\cos x)' = -\sin x}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を用いて

$\underline{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

◎ 指数関数

指数法則

$$\begin{cases} (a^x)^y = a^{xy} \\ a^{x+y} = a^x a^y \\ a^0 = 1 \end{cases}$$

※ 底が10はおなじみだが なぜeが登上するのか

高校数学では、$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ と定義

$e^{x+d} = e^x e^d$

$e^{0+d} = \underbrace{e^0}_{1} + \underset{\sim}{a}d$ ← 公理

aがただ1つに定まる

aの値が何になるか → eの値に何をとるかにより異なる

aを1にしたい → eの値に何をとればaは1になるか

$e = 10^{\log_{10} e}$

$e^d = (10^{\log_{10} e})^d = 10^{\overbrace{(\log_{10} e)}^{\text{スカラー}} d}$

$10^d = 1 + a(\log_{10} e)d$

$e = 2.718\cdots$ とすると

$e^d = 1 + d$ 　　$a = 1$ となる

- $e^{x+d} = e^x e^d = e^x(1+d) = e^x + e^x d$ 　　$\underline{(e^x)' = e^x}$