2007年度 1学期

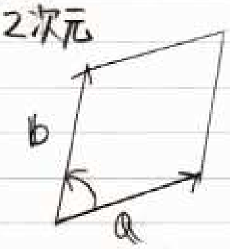
No. 1

筑波大学 生物資源学類「基礎数学」第3回 担当:西村泰一 ノート TA:高橋史帆 Date 2007/4/27

受講者数 41名

## 復習

• 2次元




(幾何学的定義)

(1) $S(a,b) = -S(a,b) \Rightarrow S(a,a)=0$ $\boxed{\text{交代性}}$

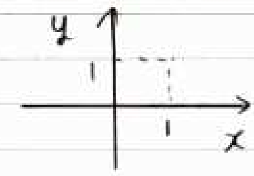
(2) $S(\alpha a, b) = \alpha S(a,b)$

$S(a_1+a_2, b) = S(a_1, b) + S(a_2, b)$ $\boxed{\text{二重線形性}}$

(3) $S(e_1, e_2) = 1$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{正規性}}$

※ $S(a,b)$の符号の付け方

- 時計回り −
- 反時計回り +




$a = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = a_1e_1 + a_2e_2$

$b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = b_1e_1 + b_2e_2$ のとき

$S(a,b) = S(a_1e_1 + a_2e_2,\ b_1e_1 + b_2e_2)$

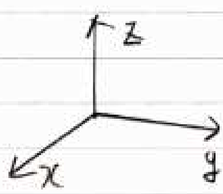
(1)〜(3)の性質を用いて整理

$$= \begin{array}{cc} a & b \end{array}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

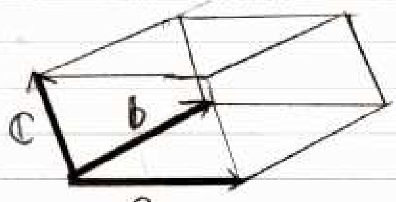
← 高校でおなじみの行列式となる。

$= a_1b_2 - a_2b_1$ (解析的定義)

• 3次元




平行六面体 (平行四辺行の三次元版)とは




← この場合は+

右ネジがイメージしにくい場合はこちら

※ $V(a,b,c)$の符号の付け方

- aからbへ右ネジを回したとき、右ネジの進む側にCがあれば +
- 側と反対なら −

- 右手系ならば + (右手の親ゆびがa、人指ゆびb、中ゆびC)
- 左手系ならば − (左手 〃 )

No. 2

Date

$V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ のとき

(1) $V(\mathbb{c},\mathbb{b},\mathbb{a}) = -V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ $\boxed{\text{交代性}}$

$V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{a}) = 0$ （平面に含まれる）

(2) $V(\alpha\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}) = \alpha V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ $\boxed{\text{三重線形性}}$

$V(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2,\mathbb{b},\mathbb{c}) = V(\mathbb{a}_1,\mathbb{b},\mathbb{c}) + V(\mathbb{a}_2,\mathbb{b},\mathbb{c})$

(3) $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\mathbb{e}_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき ※直交座標は「右手系になるように」に決めるのがお約束

$V(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3) = 1$

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3$

$\mathbb{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_2$

$\mathbb{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1\mathbb{e}_1 + c_2\mathbb{e}_2 + c_3\mathbb{e}_2$

のとき $V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ を考える

○まず全部で $3\times3\times3=27$ 項ある

○ $V(\mathbb{e}_i,\mathbb{e}_j,\mathbb{e}_k)$ の形だけが残る。（$V(\underline{\underline{\mathbb{e}_i}},\underline{\underline{\mathbb{e}_i}},\mathbb{e}_k)=0$ 平面に含まれるので）

$\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3$ の並べ方は $3! = 3\times2 = 6$ 項が生き残る.

★レポート：5/7 〆切 自然学系 D705 全2題

課題 ① $V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}) = \cdots\cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ となることを導け

+

−

この過程を(1)〜(3)の性質を用いて整理

（サラスの公式という）

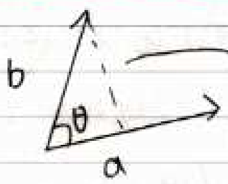
• 四次元

「$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ , $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ を設定する」= 公理的（前提）

$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ は $4! = 2\times3\times4 = 24$ 項あることになる

◎ 内積（スカラー積）

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$




「正射影」をおとす（幾何学的定義）

(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ 　$\boxed{\text{対称性}}$

(2) $(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}$

(3) $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 　$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ のとき

$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = 1$

$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$

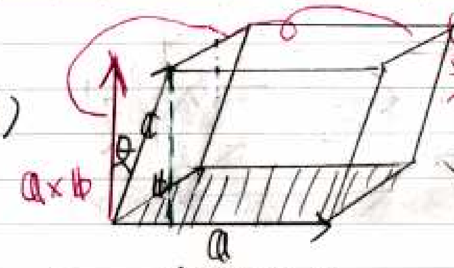
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ のとき

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 　（解析的定義）

◎ 3次元

外積(ベクトル積)

$a \times b$




aとbの張る平行四辺形の面積

平行六面体の底面積　高さ

$\|(a\times b)\|\cdot\|c\|\cos\theta$

(1) $a\times b = -b\times a$　(交代性)

$\Rightarrow a\times a = 0$ (ゼロベクトル)

(2) $(\alpha a)\times b = \alpha(a\times b)$

$(a_1+a_2)\times b = a_1\times b + a_2\times b$ ……(*)

ちょっとすんなり理解できないかも

⇒ とゆうことで…

c(任意)固定する

$(a\times b)\cdot c = V(a,b,c)$

(平行六面体の体積)

多重線形性より

$\{(a_1+a_2)\times b\}\cdot c = V(a_1+a_2,b,c)$

$= V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c)$

$= (a_1\times b)\cdot c + (a_2\times b)\cdot c$

$= \{a_1\times b + a_2\times b\}\cdot c$

○=○が導けるということは(2)の(*)式が成り立つことになる。

(3) $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

外積はベクトル
大きさと向き

大きさは$e_1$と$e_2$のはる面積だから1

$e_1 \times e_2 = e_3$
$e_2 \times e_3 = e_1$
$e_3 \times e_1 = e_2$
正規化条件

$e_1$と$e_2$のはる平行四辺形に垂直にたてると$e_3$は$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$a = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$　$b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ のとき

★

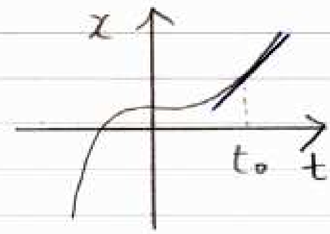
$a\times b = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)\times(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$ ← レポート課題②

を導け

②微分　次回予告

$t \in R \longrightarrow x(t) \in R$

時刻




$t_0$のときの瞬間の速さは?

• 極限 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{t}$

デルタ

$\Delta t$ 非常に小さく無限小、で $(\Delta t)^2 = 0$

※ 近似計算… 誤差をともなう