

博士論文要旨

# 数学的探究における操作的証明の 活用の促進に関する研究

小松 孝太郎\*

Kotaro KOMATSU

## 1. 研究の意図と目的

我が国の学校数学には、教育内容の一つとして証明があり、とりわけ中学校第二学年から「形式的証明 (formal proof)」の学習が行われる。数学では、証明を構成することそれ自体が大きな目的の一つであると同時に、証明を通じて新たな命題を生成したり様々な結果を組織化したりするなど、証明は重要な役割を果たしている。そして、数学教育においても、証明を通じて事柄が成り立つことを立証するだけでなく、証明を振り返って発展的に学習を進めることも可能になる。

しかし、数学教育において証明を「既に正しいと認められた事柄を根拠として、事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」と広義に捉えれば、形式的証明のみが証明であるとは限らない。すなわち、何を根拠とするのか、根拠をどれだけ明示するのか、演繹的な推論をどのような表現様式で表わすのか等に応じて、証明には様々な種類があるはずである。そして、証明が行われる状況や子どもの発達段階に応じて証明に様々な種類を認めることにより、上述のような価値ある学習を、より多くの機会で実現することができるようになると期待されるのである。

筆者はこのような問題意識から証明の意味を上述のように広義に捉え、その中でも特に「操作的証明 (action proof)」という概念に着目している。操作的証明とは、簡単に言えば具体物を通じて事柄が成り立つことを示すことである。この操作的証明の提唱者はモーリー (Morley, 1973) やセマデニ (Semadeni, 1984) であり、彼らは子どもの発達に応じて操作的証明を正統な証明として認めることによって、小学校段階から証明について学習する機会を設けることを意図した。それ以降も、とりわけ我が国を中心として、操作的証明に関する研究が積極的に

---

※数学教育学

展開されてきた（例えば、宮崎，1995）。

ところが、操作的証明に関する先行研究の課題として、事柄を自ら推測して証明し、さらにその事柄や証明を論駁しながら洗練していく「数学的探究」が検討されてこなかったことが挙げられる。数学の研究に目を向ければ、証明はそれ単独としてよりも、命題それ自体を推測したり、さらにその命題や証明を洗練したりする中で行われることの方が多いと思われる。したがって、数学的探究において操作的証明を活用する活動を学校数学に取り入れていくことは、数学の研究をより反映した学習を実現することにつながる。その上、そうした活動は、自ら問題を見つけて解決したり、さらによりよい問題解決や新たな問題を批判的に追究したりしようとする態度を育成することにも結び付くと期待される。

このように、数学的探究において操作的証明を活用する活動には、数学的及び教育的に重要な価値があるといえる。しかし、その分、そうした活動は決して子どもにとって容易ではないであろう。実際、形式的証明に目を向ければ、多くの生徒が形式的証明を構成することができない、形式的証明の意義や必要性を見出すことができない等の現状のように、古くから様々な問題が指摘されているところである。それゆえ、数学的探究において操作的証明を活用する活動を実現するためには、その子どもの活動を我々がいかに促進すべきであるのかということが、学習指導上の解決されるべき大きな問題となる。

以上から、本研究では、数学的探究において操作的証明を活用する活動に着目し、その活動を促進する学習指導の指針を得ることを目的とした。

## 2. 研究課題と研究方法

本研究では、上述の研究目的を達成するために、次の二つの研究課題を設定した。第一は、数学的探究における操作的証明の機能を明らかにすることである。第二は、第一の課題の解決によって特定された操作的証明の個々の機能に即して、数学的探究における操作的証明の活用を促進する方法を明らかにすることである。

第一の研究課題は、数学教育に関する文献の解釈、及び題材の数学的な分析による理論的考察から解決を試みた（第2，3章）。そして第二の研究課題は、教授実験の実施と分析による実践的考察から解決を試みた（第4，5章）。

### 3. 論文の構成

序章 研究の目的と方法

第1章 操作的証明に関する研究の展開と課題

第2章 数学的探究に関する基礎的考察：可謬主義に着目して

第3章 数学的探究における操作的証明の機能

第4章 事柄の説明と発見における操作的証明の活用の促進

第5章 形式的証明の生成における操作的証明の活用の促進

第6章 数学的探究における操作的証明の活用を促進する学習指導の構想

終章 研究の総括と今後の課題

### 4. 論文の概要

まず第1章では、数学教育における操作的証明に関する研究の展開を整理し、先行研究の成果と課題を指摘した。はじめに、操作的証明の提唱者の研究に立ち返り、操作的証明が、主に小学校段階を想定して、子どもの発達に応じた証明として提唱されたことを確認した。次に、操作的証明に関するその後の研究を、創造的な学習の実現を意図した操作的証明の利用、形式的証明の学習における操作的証明の利用、操作的証明を包含する前形式的証明の提唱の三点から整理した。そして、以上の考察を受けて、本研究で設定した二つの研究課題を解決する必要性を、先行研究の課題との関連から指摘した。

続く第2章では、数理哲学上の立場であるラカトシュの可謬主義に基づいて数学的探究の概念を規定し、その数学的探究の教育的意義を明らかにした。はじめに、本研究がラカトシュの研究に着目する理由を述べた上で、ラカトシュの可謬主義の基本的な立場について考察した。次に、ラカトシュの名著『証明と論駁』(Lakatos, 1976)の内容を具体的に検討することを通じて、数学的探究の側面として、事柄の推測と証明、証明の論駁と洗練、事柄の論駁と洗練を挙げ、その更なる下位側面を指摘した。そして、それらの側面を合わせる形で、数学的探究の概念を、「数学的な対象について調べていく中で事柄を推測し、その事柄を証明し、さらに事柄と証明の不確かさを解消することを目指して、その事柄と証明を論駁しながら洗練していく活動」と規定した。最後に、数学的探究の教育的意義を、数学的活動の実現、事柄の条件に対する明示的な意識、証明観の変容の三点から議論した。

そして、第3章では、第2章で明らかにした数学的探究の意味に基づいて、数学的探究における操作的証明の機能を明らかにした。はじめに、具体物に対する諸行為及びその内面化の観点から、操作的証明の概念を、「ある個別の場合を代表的特殊の場合として解釈し、その代表的特殊の場合を通じて具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示することによって、事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」と規定した。さらに、操作的証明を形式的証明と対比させることを通じて、操作的証明の特質として具象性、可動性、通有性の三つを指摘した。

次に、まず数学における証明の機能に着目し、数学的探究ではそれらの機能の中でも「事柄の説明」と「事柄の発見」が重要な機能となることを指摘した。その上で、その二つの機能の具体的な意味を、操作的証明の特質に基づいて明らかにした。続いて、中学校数学の図形領域を視野に入れ、数学的探究の意味から判断すると、操作的証明の機能として「形式的証明の生成」についても検討すべきであることを指摘した。そして、その機能の具体的な内容を操作的証明の特質に基づいて明らかにした。

第4章では、第3章で明らかにした操作的証明の機能の中でも、主に小学校段階を想定し、「事柄の説明」と「事柄の発見」に焦点を当てた。そして、数学的探究における操作的証明の活用を、操作的証明を通じて事柄の成り立つ理由を把握し、さらにその操作的証明を振り返って新たな事柄を生成する活動として捉えた。その上で、この児童の活動を我々がいかに促進すべきであるのかということを明らかにした。

はじめに、上述の活動がもつ意義を、数学の研究を反映した算数学習の実現と、形式的証明の学習の素地形成の二点から議論した。次に、まず操作的証明の機能に関する第3章の考察を踏まえて、児童の活動を促進する方法を検討した。そして、小学五年生のペアを対象として、実験者がその促進の方法に基づいて実際に児童の活動を促すことを試み、その促進の効果を明らかにすることを目的として教授実験を実施した。その後、教授実験の結果に基づいて、事前に考察した促進の方法を再検討して精緻化することにより、児童の活動を促進する方法を、事柄の推測、事柄の成り立つ理由の把握、反例への対応、新たな事柄の生成の四点から明らかにした。

第5章では、第3章で明らかにした操作的証明の機能の中でも「形式的証明の生成」に焦点を当てて、数学的探究における操作的証明の活用を、操作的証明を

通じて形式的証明を構想したり，その形式的証明を検証して洗練したりする活動として捉えた。その上で，中学校数学の図形領域を想定して，この生徒の活動を我々がいかに促進すべきであるのかということをも明らかにした。

まず前述の活動がもつ意義を，実験的方法を取り入れた形式的証明の学習の実現と，形式的証明の学習状況の改善の二点から議論した。次に，第4章と同様の方法を採用しながら，中学三年生のペアを対象とした教授実験を計画して実施した。そして，教授実験の結果を分析することを通じて，生徒の活動を促進する方法を，形式的証明の構想，形式的証明の検証，形式的証明の洗練の三点から明らかにした。

第6章では，第4章及び第5章の教授実験の結果を総合的に考察し，数学的探究における操作的証明の活用を促進する学習指導について，教材の構成と教師の役割の二点から議論した。前者の教材については，例えば，具体物と他の表現様式との間で対立する結果が生まれる課題を設定することの意義を議論した。後者の教師の役割については，まず第4章及び第5章の教授実験を通じて明らかにしてきた促進の方法が，実際の授業の場で教師が子どもの活動を促進しようとする際の指針になり得ることを指摘した。その上で，さらなる教師の役割として，事柄や証明が成り立つ範囲について学級全体で追究する機会を設定すること等を指摘した。