Tsukuba Psychological Research
2002, **24**, 43-57

2値的変数の因子分析における因子パターンと独自分散の標準誤差と信頼区間

筑波大学心理学系　服部　　環

Standard errors and confidence intervals for factor patterns and unique variances of dichotomous factor analysis

Tamaki Hattori (*Institute of Psychology, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8572, Japan*)

This study examines the bootstrap procedures for estimating standard errors and confidence intervals of factor patterns and unique variances for dichotomous factor analysis. Simulations were conducted in which factor patterns and unique variances were estimated by the unweighted least squares method and the maximum likelihood method, after which the factor patterns were both orthogonaly rotated according to the normal Varimax criterion and obliquely rotated according to PROMAX. The simulation results indicate that (1) bootstrap estimation methods for standard errors and confidence intervals perform well for rotated factor patterns and unique variances; (2) the bias corrected percentile (BC) method performs better than the percentile method in estimating confidence intervals for unique variances; and (3) estimates of standard errors for factor patterns based on generalized least squares with the full weight approach (LISCOMP; Muthén, 1987) are negatively biased, even for a moderate-sized sample (N=500).

Key words: dichotomous factor analysis, standard error, confidence interval, bootstrap method, simulation

2変数の因子分析モデルと多次元項目反応モデル

2値的変数の因子分析（Christoffersson, 1975; Muthén, 1978）とは，「正答と誤答」あるいは「肯定と反対」など，2値的観測値を取る変数に適用する因子分析を指す．この因子分析は，2値的変数が測定する心理特性に連続性を仮定して，2値的変数の反応を手がかりに心理特性の潜在構造を推察するねらいがある．一方，2値的変数に適用される統計解析手法として多次元項目反応モデル（McDonald, 1997, 1999; McKinley & Reckase 1983; Reckase, 1997）がある．このモデルも2値的変数が測定する心理特性に連続性を仮定した上で心理特性と項目反応との関係を記述するが，主要な目的は被験者の心理特性の強さを推定することにある．このように2つのモデルは統計解析手法としてのねらいは異なるが，Takane & de Leeuw（1987）は2つが数理的に等価であることを証明した．

2値的変数の因子分析は2値的変数i（$i=1, 2, \dots, n$）の反応u_iが，この観測変数に対応する潜在変数の値ξ_i^*と閾値τ_iによって，式（1）のように決まるとする（煩雑さを避けるために被験者を示す添え字を省略している）．

$$u_i = \begin{cases} 1, & \xi_i^* \geq \text{の場合} \\ 0, & \xi_i^* < \tau_i \text{の場合} \end{cases} \tag{1}$$

そして，ξ_i^*に式（2）の因子分析モデルが成り立つと考える．

$$\xi^* = \Lambda\xi + \varepsilon \tag{2}$$

ここで，ξ^*は潜在変数ξ_i^*を並べたn次のベクトル，Λは因子パターンλ_{ij}を要素とする$n \times p$次（pは因子数）の行列，ξは因子ξ_jを並べたp次の確率変数ベクトル，εは独自因子ε_iを並べたn次の確率変数ベクトルである．このモデルはξ^*が潜在変数であるが，通常の因子分析における変量モデルに相当する．

独自因子間および独自因子と因子との間に独立性を仮定し，因子の分散共分散行列をΦ，独自因子の分散共散行列をΨとおくと，潜在変数ξ^*の分散共分散行列Σは，

$$\Sigma = \Lambda\Phi\Lambda' + \Psi \tag{3}$$

となる．そして，モデルを識別するために次式の制約を課す．

$$\Psi = I - \mathrm{diag}(\Lambda\Phi\Lambda') \tag{4}$$

diag(・)は括弧内の行列の非対角要素を0とすることを意味する．以上により，2値的変数の因子分析は式(3)のΛ，Φ，Ψを推測する問題へ帰着する．

一方，多次元項目反応モデルは項目iが測定する心理特性の強さをξ_i^*とし，次式を仮定する．

$$\xi_i^* = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\xi_j - \beta_i \tag{5}$$

ここで，ξ_jは因子jの強さ，α_{ij}とβ_iはそれぞれ因子jに掛かる項目iの傾きと切片である．そして，項目iに対する正答確率を次のように定義する．ねらいはξ_iの推定にある．

・正規累積曲線モデルの場合

$$p(\xi_i^*) = \int_{-\xi_i^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \tag{6}$$

・ロジスティック・モデルの場合

$$p(\xi_i^*) = \frac{\exp(1.7\xi_i^*)}{1+\exp(1.7\xi_i^*)} \tag{7}$$

多次元項目反応モデルの母数と因子分析モデルの母数との間には以下の関係がある．このため，因子分析モデルの母数を推定できれば，それを多次元項目反応モデルの母数へ変換できる．

$$\alpha_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\varphi_i} \tag{8}$$

$$\beta_i = \frac{\tau_i}{\varphi_i} \tag{9}$$

ここで，ψ_iは項目iの独自分散の正平方根である．

一方，多次元項目反応モデルの母数は次式によって因子分析モデルの母数へ変換できる．

$$\varphi_i^2 = \frac{1}{1+\alpha'_i\Phi\alpha_i} \tag{10}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{1+\alpha'_i\Phi\alpha_i}} \tag{11}$$

$$\tau_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1+\alpha'_i\Phi\alpha_i}} \tag{12}$$

ここで，α_iは項目iの傾き母数α_{ij}を要素とするp次のベクトル，Φは因子の相関係数行列である．

母数の推定方法

因子パターンと独自分散を推定する主な方法は以下の通りである．

(1) 積率相関係数行列の因子分析

2値的変数の積率相関係数（ϕ係数）行列を用いて因子分析を実行する方法である．計算は容易であるが，積率相関係数の取りうる範囲が通過率の制約を受けるため，いわゆる困難度因子を抽出してしまうという欠点がある．しかも，0と1という上・下限値のある観測変数に線形モデルを当てはめること自体が不適切である，ともいえる．

(2) 四分相関係数行列の因子分析

2値的変数の四分相関係数行列に基づいて因子分析を実行する．四分相関係数は潜在変数ξ^*の積率相関係数の推定値であるから，この方法はξ_i^*の因子構造を探ることができる．四分相関係数の計算方法は Kirk（1973），Brown（1977），Divgi（1979）などにより提案されている．

因子パターンと独自分散は因子分析を実行するプログラムに四分相関係数行列を入力して推定する．また，Waller（1995）の MicroFACT は2値的変数の素データから四分相関係数行列を算出し，因子分析を実行する．

(3) 調和解析法（normal orgive harmonic analysis robust method; NOHARM）

この方法は項目iと項目jの同時正答確率の観測値とモデルの予測値をそれぞれp_{ij}，$\hat{p}_{ij}$として，次式の最小化基準を設ける（McDonald, 1967, 1997, 1999）．

$$Q = \sum_{\substack{i,j \\ (i>j)}}^{n} (p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2 \tag{13}$$

調和解析法を実行するプログラムに Fraser & McDonald（1988）の NOHARM があり，一般利用者

に配布されている．項目通過率と２項目の同時正答率がHermite-Tchebychef多項式に基づいて近似されるため，計算に必要な時間が短く，しかも不適解になりにくいという特徴がある．

(4) 一般化最小自乗法

McDonald (1967) の方法を一般化最小自乗法へ拡張したものである (Christoffersson, 1975)．最小化基準は次式の通りである．

$$Q=(p-\hat{p})'S^{-1}(p-\hat{p}) \tag{14}$$

ここで，$\boldsymbol{p}$ は項目通過率と項目間の同時正答率を要素とするベクトル，$\hat{\boldsymbol{p}}$ はモデルによって予測される $\boldsymbol{p}$ の推測値を要素とするベクトル，$\boldsymbol{S}$ は項目通過率と項目間の同時正答率の漸近分散共分散行列である．$\boldsymbol{S}$ の次数は項目数を n とすると，$n(n+1)/2$となる．反復計算では，この $\boldsymbol{S}$ の逆行列を計算するため，高い精度の推定値を得るためには大きな標本を必要とすることが予想される．なお，この方法を利用するためのプログラムは配布されていないと思われる．

(5) 四分相関係数行列を用いた一般化最小自乗法

閾値と四分相関係数を要素とするベクトルを η，また，その推定値を要素とするベクトルを $\hat{\eta}$ とし，以下の最小化基準式を満たす解を求める (Muthén, 1978)．

$$Q=(\eta-\hat{\eta})'W^{-1}(\eta-\hat{\eta}) \tag{15}$$

ここで，$\boldsymbol{W}$ は閾値と四分相関係数の漸近分散共分散行列の関数である．精度の高い推定値を得るためにはChristoffersson (1975) の方法と同様に大きな標本を必要とする．Muthén (1989) によれば，10～30項目でも，少なくとも1,000名程度の被験者が必要である．

また，Jöreskog (1990, 1994) はMuthén (1978) とは異なる四分相関係数とその漸近分散共分散行列を推定する方法を提案している．大きな標本と長い演算時間を必要とする点はMuthén (1978) の方法と同様である．

(6) 最尤推定法

多次元項目反応モデルの枠組みでモデル母数を最尤推定する方法である．個人 s の項目 i における反応を u_{si}，正答期待確率を $p(\xi_{si})$ とする．観測データ全体で定義される尤度 L は

$$\mathrm{L}(\xi,\tau,\Lambda,\Psi|u)=\prod_{s=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}p(\xi_{si})^{u_{si}}\left[1-p(\xi_{si})\right]^{1-u_{si}} \tag{16}$$

である．最尤推定法はこの尤度 L を最大にする未知数を推定するが，推定すべき未知母数が多いため，実際のデータでは適切な推定値を得るのが難しい．現在では配布されていないが，McKinley & Reckase (1983) のMAXLOGプログラムが最尤推定法を採用していた．

(7) 完全情報項目因子分析 (full information item factor analysis)

因子得点 ξ に平均 $\boldsymbol{O}$，分散 $\boldsymbol{I}_p$ (p 次の単位行列) の多変量正規分布を仮定すると，反応パターンベクトル $\boldsymbol{u}_l$をる確率が，

$$P(u_l)=\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}p(\xi_i)^{u_{li}}\left[1-p(\xi_i)\right]^{1-u_{li}}f(\xi)d\xi \tag{17}$$

となる．ここで，$f(\xi)$ は $\boldsymbol{I}_p$ を分散共分散行列とする多変量正規分布の確率密度関数である．したがって，$P(\boldsymbol{u}_l)$ を用いると被験者全体で定義される周辺尤度が次式になる．

$$L(\tau,\Lambda,\Psi|u)=\frac{N!}{r_1!\cdot r_2!\cdots r_s!}\prod_{l=1}^{N_l}P(u_l)^{r_l} \tag{18}$$

ここで，r_l は反応パターンベクトル $\boldsymbol{u}_l$ の観測頻度，N_l はその総和である．完全情報項目因子分析はこの尤度を最大にする母数を推定値とする (Bock, Gibbons & Muraki, 1988)．この推定方法は２母数ロジスティック・モデルで適用された周辺最尤推定法 (Bock & Lieberman, 1970; Bock & Aitkin, 1981) を多次元へ拡張したものである．

完全情報項目因子分析はTESTFACT (Wilson, Wood & Gibbons, 1991) を利用して実行することができる．ただし，数値計算上の問題から，現在のバージョンでは抽出因子数は５つまでに制限されている．また，計算量も一般化最小自乗法と同様に多い．

以上のように２値的変数の因子分析の母数を推定する方法には，２値的変数を連続変量と見なしてしまう簡易的な方法から，理論的には優れているが，長時間の演算を必要とするものまである．

Knol & Berger (1991) はこれらの推定法に着目して，四分相関係数行列を用いた (1) 反復主因子法，(2) アルファ因子分析，(3) 最尤因子分析，(4) 重み付き最小自乗因子分析，(5) MINRES法 (最小残差法)，さらに，(6) 調和解析法 (NOHARMプログラム)，(7) 完全情報項目因子分析 (TESTFACTプログラム)，(8) 最尤推定法 (MAXLOGプログラム) の推定精度をシミュレーション実験により検討した．実験の結果は，四分相関係数行列の因子分析が調和解析法や完全情報項目因子分析に匹敵する推

定精度を持つことを示した．また，Parry & McArdle（1991）のシミュレーション実験でも，Muthén（1978）の一般化最小自乗法と調和解析法が，必ずしも積率相関係数行列と四分相関係数行列を用いた最小自乗法よりも高い精度の推定値を与えるとは限らない，という結果を示した．

標準誤差の推定方法

2値的変数の確認的因子分析では，PRELISとLISREL（Jöreskog & Sörbom, 1996a, 1996b），EQS（Bentler & Wu, 1995），LISCOMP（Muthén, 1987），M*plus*（Muthén & Muthén, 1999）などのプログラムを利用することにより，一般化最小自乗法を用いて因子パターンと独自分散の標準誤差を推定できる．また，探索的因子分析でも，初期解に限り母数の標準誤差を推定できる（Muthén, 1978）．しかし，実際の探索的因子分析では，因子軸を回転して因子パターンの単純構造化を図るのが普通であるが，回転後の因子パターンと標準誤差を推定する方法は知られていない．

一方，連続変量の探索的因子分析に関しては，Archer & Jennrich（1973），Jennrich（1973），小笠原（1996），Ogasawara（1998），Hayashi & Yung（1999），Yung & Hayashi（2001）などにより回転後の因子パターンの標準誤差を推定する方法が提案されている．計算にはコンピュータプログラムを必要とするが，Ogasawara（2000）は標準誤差を計算するFORTRANサブルーチンをまとめたROSEFパッケージを公開している．また，Browne, Cudeck, Tateneni & Mels（1998）のCEFAとSASのバージョン8は一般化Crawford-Ferguson回転解の標準誤差を推定できる．しかし，これらの方法を2値的変数の因子分析に適用することはできない．仮にϕ係数や四分相関係数行列を用いた回転解にこのような方法を適用しても，標準誤差の適切な推定値を得ることはできない．そこで，本稿はブートストラップ法（Efron & Tibshirani, 1993; Mooney & Duval, 1993）を用いて，2値的変数の因子分析の因子パターンと独自分散の標準誤差と信頼区間を推定する方法を提案する．ブートストラップ法を用いてこうした統計量の標準誤差と信頼区間を推定する試みはIchikawa & Konishi（1995）にあるが，連続変量の最尤因子分析である．現在まで，2値的変数の因子分析に関してこのような提案はないと思われる．

方　法

モデル母数の推定

Knol & Berger（1991）とParry & McArdle（1991）の実験結果を踏まえ，四分相関係数行列を用いてモデル母数を最小自乗推定および最尤推定することとした．

最小自乗法

2値的変数の四分相関係数行列を$\boldsymbol{R}$，式（3）の因子分析モデルから再生される四分相関係数行列をΣとする．最小化基準式は以下の通りである．

$$F_{ULS}=tr(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\Sigma})^2 \tag{19}$$

本稿で作成したプログラムの計算手順を以下に示す．可能な限り不適解を避けるために（ii）の手続きを入れた．

(i) SMC法により共通性の初期推定値を与える．

(ii) 反復主因子法の反復計算を$3n$回繰り返し（nは項目数），独自分散行列$\boldsymbol{\Psi}$を推定する．

(iii) その独自分散行列の推定値を初期値として使い，市川（1990）のアルゴリズムに従いモデル母数を推定する．

最尤法

最小化基準式は以下の通りである．

$$F_{ML}=\log|\boldsymbol{\Sigma}|+\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})-\log|\boldsymbol{R}|-n \tag{20}$$

最小自乗法の場合と同様の手順で独自分散行列$\boldsymbol{\Psi}$を求め，それを初期値としてJennrich & Robinson（1969）のアルゴリズム（市川，1990）に従いモデル母数を推定した．ただし，四分相関係数行列が正定値でないときは，それにスムージング（Delvin, Gnadadesikan & Kettenring, 1975）を施した．

因子軸の回転

直交回転として基準化バリマックス回転（Kaiser, 1958），斜交回転としてプロマックス回転（Hendrickson & White, 1983）を利用した．プロマックス回転はターゲット行列を必要とするが，以下の手順で作成した．まず，規準化バリマックス回転解を共通性で規準化した値を$\lambda_{ij/h}$とした．そして，各因子ごとにその最大値で$\lambda_{ij/h}$を割り，その3乗をターゲット行列の因子パターンとした．

ブートストラップ法の適用

本稿で用いた手順は以下の通りである．

標準誤差の推定

(i) 大きさNの標本$U=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_N)$があるとする．

(ii) この標本Uから重複を許して大きさNのブートストラップ標本$U_b{}^*=(u_1^*,\ u_2^*,\ \cdots,\ u_N^*)$を無作為抽出する．

(iii) ブートストラップ標本U_b^*を用いてモデル母数のブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$を求める．

(iv) 上記の（ii）と（iii）をB回繰り返す．Bの大きさは50～200とすることが多いが，信頼区間を推定する場合はさらに大きくする方が望ましいため，本稿では$B=1,000$とした．

(v) 以上のステップで得られたB個のブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$の標準偏差を母数の標準誤差の推定値$SE\ (\hat{\theta})$とする．すなわち，

$$SE(\hat{\theta})=\sqrt{S^2(\hat{\theta}^*)}=\sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}(\hat{\theta}_b{}^*-\bar{\hat{\theta}}_\cdot^*)^2} \tag{21}$$

とする．ここで，

$$\bar{\hat{\theta}}_\cdot^*=\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\hat{\theta}_b{}^* \tag{22}$$

である．

信頼区間の推定

実用性の高い方法として（1）パーセンタイル法，(2) バイアス修正パーセンタイル法（bias corrected percentile method；以下，BC法），(3) 加速バイアス修正パーセンタイル法（accelated bias corrected percentile method；以下，BC_a法）がある．パーセンタイル法とBC法は標準誤差の推定と同様にB回のリサンプリングで信頼区間を求めることができる．これに対し，BC_a法はブートストラップ標本にジャックナイフ法やブートストラップ法を適用した入れ子のリサンプリングを行う．このため，BC_a法はパーセンタイル法とBC法のおおよそN倍～B倍（Nは標本の大きさ，Bはブートストラップ推定の回数）の演算時間を必要とする．本稿は長時間の演算を必要とする因子分析にブートストラップ法を適用するため，パーセンタイル法とBC法を利用することとした．具体的な手順を以下に示す．

(1) パーセンタイル法

標準誤差を推定する手順の(i)～(v)を実行し，B個のブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$を求める．信頼度の大きさを$100(1-\alpha)$%とすると，信頼区間はB個のブートストラップ推定値のうち，$100(1-\alpha)B$個の推定値が入る区間である．したがって，$100\alpha/2$パーセンタイルのブートストラップ推定値を信頼区間の下限値，$100(1-\alpha/2)$パーセンタイルのブートストラップ推定値を上限値とする．

(2) BC法

推定値のバイアスを修正したパーセンタイル法である．BC_a法は標本推定値$\hat{\theta}$とブートストラップ推定値$\hat{\theta}^*$がそれぞれ母集団の真値θと標本推定値$\hat{\theta}$から大きさ$z_0\sigma$のバイアスを受けていると仮定する．σは推定値の分布の標準偏差である．BC法はB回のブートストラップ推定を行い，以下の手順で信頼区間を修正する．

(i) 標本推定値$\hat{\theta}$よりも小さいブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$の個数を求め，それをB_lとする．

(ii) 標準正規分布において下側面積がB_l/Bとなる正規偏差z_0を求める．

(iii) $2z_0+z_{\alpha/2}$を正規偏差とする下側面積α_lを求める．また，$2z_0+z_{1-\alpha/2}$を正規偏差とする下側面積α_uを求める．ここで，$z_{\alpha/2}$は標準正規分布において下側面積が$\alpha/2$となる正規偏差，$z_{1-\alpha/2}$は下側面積が$1-\alpha/2$となる正規偏差の値である．

(iv) $100\alpha_l$パーセンタイルのブートストラップ推定値と$100\alpha_u$パーセンタイルのブートストラップ推定値を，それぞれ信頼区間の下限値と上限値とする．

実験１－モデル１－

真値

2値的変数の数を5，因子数を1とするモデルを想定した．モデル母数の真値をTable 1に示す．また，被験者sの因子jの得点ξ_{sj}として標準正規乱数を用いた．

標本の大きさ

$N=500$とした．

2値的変数データの生成

次の手順に従って2値的変数の観測値を生成した．

(i) 項目母数の値（β_i,α_{i1}）と因子得点（ξ_{sj}）を式（5）と式（7）に代入して正答確率$p(\xi_{sj}^*)$を計算する．

(ii) 0～1の一様乱数rを発生して正答確率$p(\xi_{si}^*)$の値と比較し，

Table 1　実験1に用いたモデル1の真値

多次元項目反応モデル			因子分析モデル		
項目 (i)	切片 (β_i)	傾き (α_{i1})	閾値 (τ_i)	因子パターン (λ_{i1})	独自分散 (ψ_i^2)
1	−1.0	1.0	−1.4142	0.7071	0.5000
2	−0.5	1.0	−0.7071	0.7071	0.5000
3	0.0	1.0	0.0000	0.7071	0.5000
4	0.5	1.0	0.7071	0.7071	0.5000
5	1.0	1.0	1.4142	0.7071	0.5000

Table 2　実験2に用いたモデル2の真値

多次元項目反応モデル				因子分析モデル			
項目	切片	傾き		閾値	因子パターン		独自分散
(i)	(β_i)	(α_{i1})	(α_{i2})	(τ_i)	(λ_{i1})	(λ_{i2})	(ψ_i^2)
1	−1.0	1.0	0.0	−1.4142	0.7071	0.0000	0.5000
2	−0.5	1.0	0.0	−0.7071	0.7071	0.0000	0.5000
3	0.0	1.0	0.0	0.0000	0.7071	0.0000	0.5000
4	0.5	1.0	0.0	0.7071	0.7071	0.0000	0.5000
5	1.0	1.0	0.0	1.4142	0.7071	0.0000	0.5000
6	−1.0	0.0	1.0	−1.4142	0.0000	0.7071	0.5000
7	−0.5	0.0	1.0	−0.7071	0.0000	0.7071	0.5000
8	0.0	0.0	1.0	0.0000	0.0000	0.7071	0.5000
9	0.5	0.0	1.0	0.7071	0.0000	0.7071	0.5000
10	1.0	0.0	1.0	1.4142	0.0000	0.7071	0.5000

$$u_{si} = \begin{cases} 1, & \pi_{si}^* \geq r \text{の場合} \\ 0, & \pi_{si}^* < r \text{の場合} \end{cases} \tag{23}$$

として2値的反応を生成する．
(iii) (i) と (ii) を全被験者 ($N=500$) と全項目 ($p=5$) について繰り返す．

実験回数

大きさ500の標本を発生させてモデル母数の標準誤差と95%信頼区間をブートストラップ推定する ($B=1,000$)，という実験を1,000回行った．

実験2－モデル2－

2値的変数の数を10，因子数を2，因子間相関を0とするモデルを仮定した．モデル母数の真値をTable 2に示す． 標本の大きさ，因子得点の与え方，2値的変数の素データの生成方法，実験回数は実験1の場合と同様である．

標準誤差と信頼区間の理論値

ブートストラップ法の成否は，単にブートストラップ標準誤差と信頼区間を求めただけではわからない．ブートストラップ法とは別にモンテカルロ実験により正確な標準誤差と信頼区間を調べておく必要がある．そのため，本稿では母集団から大きさ$N=500$の標本Uを100,000個抽出して，そのモンテカルロ推定値の標準偏差を標準誤差の理論値とみなした．

また，信頼度$100(1-\alpha)$ ％の信頼区間の理論的な下限値として$100\alpha/2$パーセンタイルのモンテカルロ推定値，理論的な上限値として$100(1-\alpha/2)$パーセンタイルのモンテカルロ推定値を用いた．

因子軸と符号

因子パターンは軸の回転の不定性と，列ごとに符号の不定性がある．このため，ブートストラップ標本で得られた因子軸の順番と因子パターンの符号が母集団の順番と符号に一致するとは限らない．本稿では以下の手順に従いブートストラップ推定値の因子軸と符号を定めた．なお，モンテカルロ実験の場合は，下記のブートストラップ推定値をモンテカルロ推定値に読み替えた手順に従った．
(i) 母集団の因子パターンの真値をλ_{ij}，ブートストラップ推定値を$\hat{\lambda}_{ij}^*$とする．母集団の因子jの番号を固定して，ブートストラップ推定値のすべての因子j' ($j'=1, 2, \cdots, p$) について

$$d_{(+)j'} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{ij} - \hat{\lambda}_{ij'}^*| \tag{24}$$

$$d_{(-)j'} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{ij} - \hat{\lambda}_{ij'}^*| \tag{25}$$

を計算する．
(ii) $d_{(+)j'}$および$d_{(-)j'}$ ($j'=1, 2, \cdots, p$) の中で最小値を与える因子kを探す．最小値が$d_{(+)k}$の場合，母集団の因子jに対応する因子パターンとして$\hat{\lambda}_{ik}^*$をブートストラップ推定値とする．また，最小値が$d_{(-)k}$の場合，$-\hat{\lambda}_{ik}^*$をブートストラップ推定値とする．
(iii) 上記の (i) と (ii) を母集団のすべての因子について実行する．ただし，いったん母集団の因子へ対応させたブートストラップ推定値の因子kは，母集団の他の因子へ対応させない．

実験3－一般化最小自乗法－

Muthén (1978) の一般化最小自乗法は因子パターンの標準誤差を推定できる．ここでは，ブートストラップ法による推定精度と比較するため，実験1で用いたモデル1を想定し，一般化最小自乗法を用いて因子パターンと標準誤差の推定精度を調べた．

標本の大きさ

$N=500$と$N=2,000$の2通りとした.

2値的変数の生成

手順は以下の通りである.

(i) 次式のλ_{ij}にモデル1の因子パターンの真値, ξ_jに標準正規乱数, ε_iに平均0, 分散ψ_i^2の正規乱数を代入して, ξ_i^*を求める.

$$\xi_i^* = \lambda_{ij}\xi_i + \varepsilon_i \tag{26}$$

(ii) ξ_i^*と閾値の真値τ_iとを比較し,

$$u_i = \begin{cases} 1, & \xi_i^* \geq \tau_i \text{の場合} \\ 0, & \xi_i^* < \tau_i \text{の場合} \end{cases} \tag{27}$$

とする.

(iii) (i)と(ii)をすべての被検者 ($N=500$, 2,000) と項目について繰り返す.

実験回数

2通りの被験者について, 上記の手順で生成した2値的データを用いて因子パターンと独自分散を推定する, というモンテカルロ実験を10,000回実行した. 計算にはMuthén (1987) のLISCOMPを利用した.

なお, 本稿の実験1・2には倍精度の自作FORTRANプログラムを利用したが, その中で四分相関係数の計算にBrown (1977), 固有値と逆行列の計算と一様乱数の発生にそれぞれ渡部・名取・小国 (1989) のEIGRS, LUINV, URAND2, 基準化バリマックス回転解の計算に芝 (1979) を引用した.

Table 3　モデル1の因子パターンの標準誤差

[推定法]	モンテカルロ推定		ブートストラップ推定 $\hat{\lambda}_{i1}^*$	ブートストラップ推定 $SE(\hat{\lambda}_{i1})$
変数	平均	標準偏差 †	平均	平均 (SD)
[最小自乗法]				
1	.6928	.0592	.6931	.0591(.0053)
2	.7050	.0532	.7044	.0529(.0044)
3	.7099	.0511	.7092	.0509(.0039)
4	.7051	.0528	.7040	.0529(.0044)
5	.6923	.0592	.6961	.0589(.0056)
[最尤法]				
1	.6932	.0604	.6951	.0627(.0060)
2	.7047	.0540	.7011	.0564(.0051)
3	.7090	.0519	.7058	.0543(.0050)
4	.7046	.0542	.7047	.0561(.0052)
5	.6935	.0604	.6972	.0624(.0061)

† この値を標準誤差の理論値とみなす.

Table 4　モデル1の独自分散の標準誤差

[推定法]	モンテカルロ推定		ブートストラップ推定 $\hat{\psi}_i^*$	ブートストラップ推定 $SE(\hat{\psi}_i)$
変数	平均	標準偏差 †	平均	平均 (SD)
[最小自乗法]				
1	.5165	.0819	.5127	.0815(.0069)
2	.5001	.0748	.4979	.0740(.0047)
3	.4934	.0724	.4920	.0717(.0042)
4	.5000	.0743	.4986	.0739(.0048)
5	.5173	.0818	.5083	.0815(.0072)
[最尤法]				
1	.5158	.0837	.5091	.0867(.0083)
2	.5005	.0759	.5023	.0784(.0061)
3	.4947	.0734	.4962	.0760(.0055)
4	.5006	.0762	.4974	.0785(.0060)
5	.5155	.0837	.5062	.0865(.0083)

† この値を標準誤差の理論値とみなす.

結果と考察

実験1

因子分析モデルを念頭に置き, 因子パターンと独自分散を中心に結果をまとめる.

標準誤差

因子パターンのモンテカルロ推定値の平均と標準偏差 (これを標準誤差SEの理論値とみなす), ブートストラップ推定値の平均, ブートストラップ標準誤差の平均と標準偏差をTable 3に示す. また, 独自分散に関する同様の統計量をTable 4に示す. まず, 最小自乗法について吟味すると, 因子パターンと独自分散は, 双方ともブートストラップ標準誤差が理論値に極めて近いことがわかる. 一方, 最尤法ではブートストラップ標準誤差が一貫して理論値よりもわずかに大きく, 正のバイアスが見られる. しかし, バイアスの大きさ自体は最大値でもきわめて小さな値であり, 実用上は問題とはならない大きさであろう.

信頼区間

因子パターンの信頼区間をTable 5に示す. 本稿はパーセンタイル法と, それよりも高い精度が期待されるBC法を用いたが, 必ずしもBC法がパーセンタイル法よりも良好な結果を示したとは限らない. 変数1の最尤推定値のように, BC法によって

上限値のバイアスが修正されたが，逆に下限値のバイアスが0.0093ほど大きくなっているケースもある．しかし，最小自乗法と最尤法ともに推定誤差は小さく，ブートストラップ法によって高い精度で区間推定ができたといえる．また，独自分散の信頼区間をTable 6に示す．因子パターンよりも推定誤差はいくらか大きいが，実用上は十分な精度である．

Table 5 モデル1の因子パターンの信頼区間

[推定法]			ブートストラップ推定			
			パーセンタイル法		BC法	
	モンテカルロ推定		下限値	上限値	下限値	上限値
変数	下限値†	上限値†	平均 (*SD*)	平均 (*SD*)	平均 (*SD*)	平均 (*SD*)
[最小自乗法]						
1	.5739	.8060	.5744(.0648)	.8051(.0538)	.5664(.0647)	.7997(.0534)
2	.5978	.8067	.5974(.0625)	.8041(.0503)	.5961(.0629)	.8040(.0505)
3	.6063	.8073	.6059(.0553)	.8048(.0447)	.6064(.0558)	.8060(.0451)
4	.5985	.8056	.5971(.0611)	.8035(.0492)	.5957(.0616)	.8033(.0496)
5	.5728	.8052	.5776(.0674)	.8079(.0556)	.5701(.0675)	.8025(.0555)
[最尤法]						
1	.5724	.8094	.5688(.0692)	.8144(.0581)	.5595(.0672)	.8075(.0560)
2	.5964	.8078	.5862(.0617)	.8069(.0499)	.5869(.0604)	.8082(.0492)
3	.6043	.8078	.5947(.0599)	.8071(.0475)	.5983(.0585)	.8106(.0464)
4	.5950	.8084	.5906(.0598)	.8099(.0475)	.5913(.0588)	.8113(.0468)
5	.5719	.8098	.5716(.0689)	.8155(.0569)	.5621(.0672)	.8088(.0554)

†この値を理論値とみなす．

Table 6 モデル1の独自分散の信頼区間

[推定法]			ブートストラップ推定			
			パーセンタイル法		BC法	
	モンテカルロ推定		下限値	上限値	下限値	上限値
変数	下限値†	上限値†	平均 (*SD*)	平均 (*SD*)	平均 (*SD*)	平均 (*SD*)
[最小自乗法]						
1	.3503	.6706	.3457(.0869)	.6636(.0746)	.3556(.0856)	.6721(.0735)
2	.3493	.6427	.3482(.0808)	.6370(.0747)	.3487(.0811)	.6388(.0749)
3	.3482	.6324	.3478(.0718)	.6276(.0668)	.3460(.0728)	.6273(.0675)
4	.3509	.6417	.3492(.0791)	.6375(.0729)	.3499(.0798)	.6393(.0731)
5	.3516	.6718	.3412(.0901)	.6594(.0780)	.3508(.0891)	.6677(.0771)
[最尤法]						
1	.3449	.6723	.3299(.0951)	.6691(.0789)	.3425(.0906)	.6795(.0756)
2	.3475	.6442	.3436(.0810)	.6501(.0727)	.3418(.0799)	.6498(.0714)
3	.3475	.6348	.3436(.0765)	.6404(.0712)	.3380(.0752)	.6367(.0701)
4	.3464	.6459	.3389(.0769)	.6452(.0700)	.3371(.0756)	.6449(.0689)
5	.3441	.6730	.3282(.0930)	.6660(.0783)	.3407(.0895)	.6764(.0754)

†この値を理論値とみなす．

実験2

紙数を節約するために，数表では2値的変数u_1，u_3，u_5について実験結果をまとめた．

因子パターンの標準誤差

因子パターンの標準誤差をTable 7に示す．初期解では2つの推定法とも，因子2に対する因子パターンのモンテカルロ推定値の標準偏差（これを標準誤差の理論値とみなす）が大きい．これは，標本が極めて大きいときは（例えば，$N=100,000$）因子パターンの初期推定値がTable 2の真値のような単純構造を示すが，本実験のように標本が小さいときは（$N=500$）四分相関係数の標本変動が大きくなり，初期解が真値のような単純構造を示すことが少ないためである．つまり，標本が小さいとき，すべての観測変数が1つの因子に同一符号で中程度の大きさの負荷を示し，他方の因子には観測変数の半数が正で，残る半数が負で中程度の大きさの負荷を示すことが多い．このため，因子2におけるモンテカルロ推定値の標準偏差が大きくなったものと考えられる．同様の理由により，ブートストラップ推定値の変動も大きい．

一方，バリマックス回転解とプロマックス回転解の標準誤差の理論値は，おおよそ0.05～0.06の範囲で安定している．ブートストラップ法による標準誤差の推定値は，最尤推定法で0.005程度のバイアスが見られるが，最小自乗法ではすべて0.001未満の誤差である．ブートストラップ法により，高い精度で因子パターンの標準誤差を推定できたといえる．

独自分散の標準誤差

独自分散の標準誤差をTable 8に示す．最尤法では0.005～0.006程度の小さな正のバイアスが見られるが，最小自乗法ではブートストラップ推定値は理論値にほぼ一致している．独自分散についてもブートストラップ法の推定精度は高いといえる．

因子パターンの信頼区間

因子パターンの信頼区間の推定値をTable 9に示す．因子パターンの初期解は標本変動の影響を強く受け，適切な推定値を得ることができなかった．しかし，バリマックス回転解とプロマックス回転解は，パーセンタイル法とBC法ともに理論値に近い信頼区間が得られた．2つの回転解におけるパーセンタイル法とBC法の相違は小さく，回転解の信頼区間の推定には，いずれの方法を用いてもよいであろう．

Table 7　モデル2の因子パターンの標準誤差

[推定法]/[解]		モンテカルロ推定		ブートストラップ推定 $\hat{\lambda}^*_{ij}$	ブートストラップ推定 $SE(\hat{\lambda}_{ij})$
因子	変数	$\hat{\theta}$	$SD(\hat{\theta})$†	平均	平均 (SD)
[最小自乗法]					
[初期解]					
1	1	.6071	.0889	.5717	.1190(.0321)
	3	.6218	.0840	.5820	.1157(.0340)
	5	.6073	.0886	.5716	.1183(.0321)
2	1	−.0003	.3339	−.0020	.2231(.0596)
	3	−.0007	.3403	−.0066	.2243(.0601)
	5	−.0010	.3335	−.0054	.2228(.0588)
[バリマックス回転解]					
1	1	.6931	.0592	.6989	.0589(.0054)
	3	.7097	.0511	.7103	.0510(.0040)
	5	.6931	.0589	.6974	.0594(.0051)
2	1	.0006	.0636	.0017	.0636(.0029)
	3	.0001	.0559	−.0014	.0559(.0021)
	5	−.0001	.0635	.0005	.0636(.0028)
[プロマックス回転解]					
1	1	.6934	.0594	.6994	.0593(.0055)
	3	.7102	.0512	.7111	.0513(.0040)
	5	.6934	.0590	.6978	.0597(.0051)
2	1	.0004	.0586	.0021	.0589(.0038)
	3	−.0001	.0512	−.0011	.0515(.0031)
	5	−.0003	.0585	.0008	.0590(.0036)
[最尤法]					
[初期解]					
1	1	.6383	.0864	.6141	.1198(.0420)
	3	.6519	.0804	.6192	.1141(.0430)
	5	.6384	.0860	.6137	.1190(.0425)
2	1	−.0001	.2727	.0040	.2300(.0389)
	3	−.0005	.2769	−.0007	.2310(.0405)
	5	−.0006	.2725	.0007	.2300(.0386)
[バリマックス回転解]					
1	1	.6938	.0611	.6990	.0653(.0073)
	3	.7087	.0526	.7044	.0572(.0063)
	5	.6938	.0606	.6972	.0654(.0073)
2	1	.0006	.0641	.0043	.0662(.0038)
	3	.0001	.0562	−.0010	.0581(.0029)
	5	−.0001	.0639	.0002	.0662(.0038)
[プロマックス回転解]					
1	1	.6941	.0612	.6996	.0657(.0074)
	3	.7091	.0528	.7051	.0576(.0064)
	5	.6941	.0608	.6976	.0658(.0074)
2	1	.0004	.0592	.0033	.0617(.0045)
	3	−.0001	.0516	−.0020	.0540(.0039)
	5	−.0002	.0590	−.0008	.0617(.0045)

†この値を標準誤差の理論値とみなす．

Table 8　モデル2の独自分散の標準誤差

[推定法]			ブートストラップ推定	
	モンテカルロ推定		$\hat{\psi}_i^*$	$SE(\hat{\psi}_i)$
変数	平均	標準偏差†	平均	平均 (SD)
[最小自乗法]				
1	.5121	.0820	.4962	.0822(.0069)
3	.4905	.0723	.4840	.0720(.0042)
5	.5121	.0816	.4986	.0827(.0066)
[最尤法]				
1	.5107	.0847	.4949	.0908(.0102)
3	.4918	.0744	.4911	.0794(.0069)
5	.5108	.0842	.4972	.0909(.0105)

†この値を標準誤差の理論値とみなす．

独自分散の信頼区間

独自分散の区間推定値をTable10に示す．最小自乗法のパーセンタイル法に基づく信頼区間に－0.0068～－0.0186程度のバイアスが見られる．特に閾値 τ_i の小さい変数1と大きい変数5のバイアスが目立つ．ところが，BC法により2つの変数のバイアスが修正されている．同様に最尤法でも変数1と変数5のバイアスがやや大きいが，BC法によりそれが修正されている．パーセンタイル法も実用的には満足できる精度を示したが，それ以上にBC法の精度が高いといえよう．

因子間相関の標準誤差と信頼区間

因子間相関の標準誤差をTable11に示す．また，因子間相関の区間推定をTable12に示す．いずれの条件においても標準誤差と信頼区間の推定精度は高い．ただし，本稿の実験は真の相関が0.0であり，相関のある因子構造についてはさらに数値実験を行い，推定精度を検討する必要があろう．

実験3

10,000回のモンテカルロ実験で推定した因子パターンの平均と標準偏差をTable13に示す．この標準偏差を因子パターンの標準誤差の理論値とみなす．また，一般化最小自乗法により理論的に推定された標準誤差の平均と標準偏差をTable13に示す．

2つの条件で標本の大きさを設定したが，いずれの場合も一般化最小自乗法による標準誤差の推定値は負のバイアスを受けている．標本の大きさが500のときはバイアスが特に大きく，標準誤差の推定値は理論値の0.6倍～0.8倍程度の大きさでしかない．これは，この程度の大きさの標本では一般化最小自乗法を用いて正確な標準誤差を推定することが困難であることを示している．一方，標本の大きさが2,000のときも負のバイアスが見られるが，実用的には許容できる範囲のバイアスであるといえよう．

一般化最小自乗法では理論的に標準誤差を推定できるが，ブートストラップ法を適用して標準誤差を推定することも可能である．ブートストラップ法による標準誤差の推定精度，さらに，それと一般化最小自乗法による理論的な推定値との比較については今後の検討課題としたい．

なお，Knol & Berger (1991) により，一般化最小自乗法による因子パターンの推定精度は四分相関係数行列の因子分析とほぼ等しいことが示されている．実験3の条件設定はわずか1つのモデルに過ぎないが，Table 3とTable13に示したモンテカルロ実験の推定値とを比較すると，標本の大きさが500の場合は一般化最小自乗推定値のほうがバイアスは大きく，Knolら (1991) を支持する結果となっている．ただし，$N=2{,}000$として最小自乗法と最尤法を用いて同一条件で10,000回のモンテカルロ実験を行ってみたところ，平均推定値と真値の間の平均自乗誤差の平方根は最小自乗法が0.0103，最尤法が0.0101，一般化最小自乗法が0.0031であった．理論通り，標本が大きくなるに従い一般化最小自乗推定値の精度は高くなる．

母数の推定方法について

本稿は四分相関係数行列に最小自乗法と最尤法を適用して因子パターンと独自分散を推定した．2つの推定法は独自分散の初期値が不適切なとき，繰り返し計算において解が発散してしまうことがある．そのため，本稿で作成したプログラムは反復主因子法の推定手順を利用して独自分散の初期値を求めた．実データを用いたところ，SMC法で共通性の初期値を与えただけでは解が発散してしまうことがあったが，反復主因子法を併用することにより解を正しく推定できた．結果的に計算量は増えたが，反復主因子法を併用して独自分散の初期値を求めたことは成功であろう．

ところで，Waller (1995) のMicroFACTも四分相関係数行列を用いて因子分析を実行するが，反復主因子法だけを用いて解を推定する．反復主因子法の解は，解が正しく収束すれば最小自乗解に一致する．しかも，本稿で用いたアルゴリズム以上に長い演算時間を必要とする．したがって，反復主因子法を利用する積極的な理由はないといえよう．

母集団の因子とブートストラップ推定値の因子を照合するために，本稿は式 (24) と式 (25) に示す誤差関数を利用した．誤差関数として因子パターンの自乗誤差や，因子パターンを共通性で基準化した

上での自乗誤差を利用することもできる．さらに，別の誤差関数を定義することができる．したがって，誤差関数の定義によっては母集団の因子へ対応付けされるブートストラップ推定値の因子と符号が異なる可能性はある．そこで，モデル2を用いて，1回だけ自乗誤差を用いて因子の順番と符号を定めてみたが（$B=1,000$），絶対値誤差を誤差関数とした場合と同様の結果であった．確実に因子を対応付

Table 9　モデル2の因子パターンの信頼区間

[推定法]/[解]				ブートストラップ推定			
				パーセンタイル法		BC法	
		モンテカルロ推定		下限値	上限値	下限値	上限値
因子	変数	下限値 †	上限値 †	平均 (SD)	平均 (SD)	平均 (SD)	平均 (SD)
[最小自乗法]							
[初期解]							
1	1	.4309	.7696	.3033(.1317)	.7632(.0643)	.3527(.1679)	.7876(.0707)
	3	.4566	.7725	.3176(.1373)	.7627(.0535)	.3793(.1785)	.7868(.0596)
	5	.4326	.7704	.3054(.1330)	.7629(.0601)	.3562(.1683)	.7874(.0670)
2	1	−.5135	.5137	−.4113(.2715)	.4044(.2721)	−.4134(.2657)	.4073(.2661)
	3	−.5190	.5189	−.4156(.2694)	.4007(.2706)	−.4171(.2666)	.4030(.2676)
	5	−.5131	.5142	−.4137(.2711)	.4015(.2679)	−.4155(.2653)	.4042(.2625)
[バリマックス回転解]							
1	1	.5734	.8059	.5804(.0686)	.8107(.0563)	.5719(.0689)	.8047(.0564)
	3	.6071	.8067	.6071(.0571)	.8062(.0460)	.6079(.0579)	.8077(.0467)
	5	.5745	.8064	.5780(.0622)	.8101(.0516)	.5697(.0627)	.8041(.0519)
2	1	−.1248	.1250	−.1237(.0638)	.1248(.0637)	−.1243(.0643)	.1256(.0642)
	3	−.1092	.1094	−.1118(.0569)	.1070(.0569)	−.1121(.0575)	.1078(.0574)
	5	−.1248	.1245	−.1250(.0674)	.1239(.0679)	−.1253(.0680)	.1247(.0685)
[プロマックス回転解]							
1	1	.5734	.8063	.5800(.0689)	.8119(.0565)	.5711(.0690)	.8054(.0565)
	3	.6072	.8074	.6073(.0572)	.8076(.0461)	.6074(.0580)	.8085(.0468)
	5	.5744	.8069	.5778(.0624)	.8112(.0519)	.5688(.0629)	.8048(.0520)
2	1	−.1147	.1154	−.1140(.0575)	.1159(.0581)	−.1143(.0579)	.1167(.0585)
	3	−.1007	.1007	−.1025(.0531)	.0987(.0527)	−.1028(.0537)	.0995(.0532)
	5	−.1154	.1151	−.1155(.0619)	.1152(.0619)	−.1159(.0625)	.1158(.0626)
[最尤法]							
[初期解]							
1	1	.4556	.7928	.3420(.1532)	.8003(.0668)	.3617(.1922)	.8132(.0765)
	3	.4779	.7901	.3537(.1496)	.7864(.0540)	.3921(.1990)	.8035(.0628)
	5	.4563	.7927	.3441(.1518)	.7992(.0668)	.3651(.1904)	.8122(.0751)
2	1	−.4841	.4823	−.4290(.2099)	.4304(.2085)	−.4165(.2608)	.4162(.2559)
	3	−.4900	.4892	−.4333(.2063)	.4261(.2070)	−.4179(.2555)	.4103(.2540)
	5	−.4838	.4851	−.4321(.2059)	.4271(.2082)	−.4198(.2557)	.4132(.2544)
[バリマックス回転解]							
1	1	.5712	.8109	.5694(.0683)	.8226(.0584)	.5596(.0665)	.8155(.0562)
	3	.6026	.8088	.5886(.0608)	.8096(.0486)	.5951(.0587)	.8152(.0479)
	5	.5721	.8111	.5673(.0678)	.8214(.0591)	.5579(.0655)	.8145(.0568)
2	1	−.1258	.1261	−.1257(.0658)	.1323(.0658)	−.1262(.0663)	.1331(.0664)
	3	−.1103	.1104	−.1151(.0572)	.1110(.0570)	−.1154(.0577)	.1117(.0578)
	5	−.1256	.1258	−.1302(.0679)	.1282(.0676)	−.1308(.0678)	.1288(.0674)
[プロマックス回転解]							
1	1	.5710	.8116	.5693(.0685)	.8239(.0586)	.5588(.0666)	.8163(.0564)
	3	.6029	.8094	.5886(.0610)	.8110(.0488)	.5943(.0590)	.8161(.0480)
	5	.5722	.8119	.5669(.0681)	.8226(.0594)	.5569(.0655)	.8152(.0570)
2	1	−.1158	.1165	−.1178(.0611)	.1227(.0611)	−.1182(.0617)	.1235(.0617)
	3	−.1014	.1014	−.1078(.0520)	.1022(.0524)	−.1082(.0529)	.1028(.0530)
	5	−.1164	.1160	−.1222(.0613)	.1185(.0611)	−.1225(.0611)	.1192(.0608)

† この値を理論値とみなす．

Table 10 モデル2の独自分散の信頼区間

[推定法]			ブートストラップ推定			
			パーセンタイル法		BC法	
	モンテカルロ推定		下限値	上限値	下限値	上限値
変数	下限値 †	上限値 †	平均 (SD)	平均 (SD)	平均 (SD)	平均 (SD)
[最小自乗法]						
1	.3462	.6671	.3278(.0907)	.6485(.0793)	.3476(.0906)	.6649(.0787)
3	.3459	.6287	.3391(.0737)	.6199(.0691)	.3435(.0755)	.6247(.0703)
5	.3454	.6660	.3289(.0834)	.6519(.0718)	.3488(.0834)	.6677(.0713)
[最尤法]						
1	.3380	.6695	.3067(.0965)	.6608(.0780)	.3308(.0919)	.6790(.0749)
3	.3427	.6338	.3325(.0786)	.6409(.0705)	.3309(.0778)	.6406(.0695)
5	.3378	.6692	.3082(.0982)	.6629(.0773)	.3319(.0935)	.6808(.0735)

† この値を理論値とみなす.

Table 11 因子間相関の標準誤差

[推定法]			ブートストラップ推定	
	モンテカルロ推定		$\hat{\phi}^*_{21}$	$SE(\hat{\phi}_{21})$
相関	平均	標準偏差 †	平均	平均 (SD)
[最小自乗法]				
ϕ_{21}	.0004	.0653	−.0008	.0636(.0024)
[最尤法]				
ϕ_{21}	.0004	.0653	.0025	.0640(.0027)

† この値を標準誤差の理論値とみなす.

Table 12 因子間相関の信頼区間

[推定法]			ブートストラップ推定			
			パーセンタイル法		BC法	
	モンテカルロ推定		下限値	上限値	下限値	上限値
相関	下限値 †	上限値 †	平均 (SD)	平均 (SD)	平均 (SD)	平均 (SD)
[最小自乗法]						
ϕ_{21}	−.1274	.1287	−.1259(.0642)	.1222(.0634)	− .1264(.0697)	.1227(.0687)
[最尤法]						
ϕ_{21}	−.1273	.1287	−.1229(.0621)	.1256(.0623)	− .1232(.0677)	.1263(.0675)

† この値を理論値とみなす.

ける方法はないのであるから，本稿の方法でも問題はなかったと考えられる.

結 論

本稿は2つの因子分析モデルを想定したが，いずれのモデルにおいても，ブートストラップ法により回転後の因子パターンと独自分散の標準誤差を高い

Table 13　一般化最小自乗法による標準誤差の推定

	$N=500$				$N=2{,}000$			
	因子パターン ($\hat{\lambda}_{i1}$)		$SE(\hat{\lambda}_{i1})$		因子パターン ($\hat{\lambda}_{i1}$)		$SE(\hat{\lambda}_{i1})$	
変数	平均	$SD\dagger$	平均	SD	平均	$SD\dagger$	平均	SD
1	.6459	.0995	.0612	.0130	.7108	.0411	.0377	.0058
2	.7464	.0923	.0594	.0090	.7098	.0340	.0322	.0016
3	.7143	.0691	.0568	.0061	.7086	.0300	.0293	.0013
4	.7490	.0934	.0593	.0090	.7099	.0339	.0321	.0016
5	.6429	.1001	.0610	.0129	.7112	.0410	.0377	.0058

† この値を因子パターンの標準誤差の理論値とみなす.

(注) モンテカルロ実験回数 $=10{,}000$

精度で推定できた．また，因子パターンと独自分散の信頼区間の推定値も高い精度を示していた．従来は研究者の経験的な判断から有意な因子パターンの大きさとして0.3あるいは0.4という基準を設けて因子を解釈していたが，ブートストラップ推定値を用いることにより，因子パターンの検定・区間推定が可能となった．

ただし，本稿の実験で用いたモデルは観測変数の数が比較的少なく，因子得点にも正規分布だけを仮定していた．観測変数の数，因子得点の分布の偏り，さらに閾値の大きさが推定精度へ与える影響については，本稿の実験だけでは知ることができない．こうした点については今後の課題となる．

また，一般化最小自乗法へブートストラップ法を適用する可能性が示唆された．

要　約

本研究は2値的変数の因子分析において，因子パターンと独自分散の標準誤差と信頼区間をブートストラップ法を用いて推定する方法を提案した．シミュレーション実験では，独自分散と因子パターンを最小自乗法と最尤法を用いて推定し，因子パターンを基準化バリマックス法とプロマックス法を用いて回転した．実験の結果，以下の点が示された．(1) ブートストラップ法により高い精度で回転後の因子パターンと独自分散の標準誤差と信頼区間を推定できる．(2) 独自分散の信頼区間の推定では，パーセンタイル法の精度も高いが，BC法はそれ以上に良い精度を示す．(3) 標本がある程度の大きさであっても ($N=500$)，LISCOMP (Muthén, 1987) の完全加重一般化最小自乗法を用いた場合，因子パターンの標準誤差の推定値は負のバイアスを受ける．

引用文献

Archer, C.O. & Jennrich, R.I. 1973 Standard errors for rotated factor loadings. *Psychometrika*, **38**, 581–592.

Bentler, P.M. & Wu, E.J.C. 1995 *EQS for Windows User's Guide*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc.

Bock, R.D. & Aitkin, M. 1981 Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: Application of an EM algorithm. *Psychometrika*, **46**, 443–459.

Bock, R.D., Gibbons, R. & Muraki, E. 1988 Full-information item factor analysis. *Applied Psychological Measurement*, **12**, 261–28

Bock, R.D. & Lieberman, M. 1970 Fitting a response model for a dichotomously scored items. *Psychometrika*, **35**, 283–319.

Brown, M.B. 1977 Algorithm AS 116: The tetrachoric correlation and its standard error. *Applied Statistics*, **26**, 343–351.

Browne, M.W., Cudeck, R., Tateneni, K. & Mels, G. 1998 *CEFA: Comprehensive exploratory factor analysis*. Ohio: The Ohio State University.

Christoffersson, A. 1975 Factor analysis of dichotomized variables. *Psychometrika*, **40**, 5–32.

Delvin, S.J., Gnadadesikan, R. & Kettenring, J.R. 1975 Robust estimation and outlier detection with correlation coefficients. *Biometrika*, **62**, 531–545.

Divgi, D.R. 1979 Calculation of the tetrachoric correlation coefficient. *Psychometrika*, **44**, 169–172.

Efron, B. & Tibshirani, R.J. 1993 *An introduction* *to the bootstrap*, London: Chapman & Hall.

Fraser, C. & McDonald, R.P. 1988 NOHARM: Least squares item factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, **23**, 267-269.

Hayashi, K. & Yung, Y.F. 1999 Standard errors of the class of orthomax-rotated factor loadings: Some matrix results. *Psychometrika*, **64**. 451-46

Hendrickson, A.E. & White, P.O. 1983 PROMAX: A quick method for rotation to oblique simple structure. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **17**, 65-7

市川雅教 1990 因子分析における推定 柳井晴夫・繁桝算男・前川眞一・市川雅教 1990 因子分析ーその理論と方法ー 朝倉書店 Pp.49-92.

Ichikawa, M. & Konishi, S. 1995 Application of the bootstrap methods in factor analysis. *Psychometrika*, **60**, 1, 77-93.

Jennrich, R.I. 1973 Standard errors for obliquely rotated factor loadings. *Psychometrika*, **38**, 593-604.

Jennrich, R.I. & Robinson, S.M. 1969 A Newton-Raphson algorithm for maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **34**, 111-123.

Jöreskog, K.G. 1990 New developments in LISREL: Analysis of ordinal variables using polychoric correlations and weighted least squares. *Quality and Quantity*, **24**, 387-404.

Jöreskog, K.G. 1994 On the estimation of polychoric correlations and their asymptotic covariance matrix. *Psychometrika*, **59**, 381-389.

Jöreskog, K.G. & Sörbom, D. 1996a *PRELIS 2 User's Reference Guide*. Chicago: Scientific Software International.

Jöreskog, K.G. & Sörbom, D. 1996b *LISREL 8: Structural Equation Modeling with the SIMPLIS Command Language*. Chicago: Scientific Software International.

Kaiser, H.F. 1958 The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, **23**, 187-20

Kirk, D.D. 1973 On the numerical approximation of the bivariate normal (tetrachoric) correlation coefficient. *Psychometrika*, **38**, 259-268.

Knol, D.L. & Berger, M.P. 1991 Empirical comparison between factor analysis and multidimensional item response models. *Multivariate Behavioral Research*, **46**, 457-477.

McKinley, A.L. & Reckase, M.D. 1983 MAXLOG: A computer program for the estimation of the parameters of a multidimensional logistic model. *Behavior Research Methods & Instrumentation*, **15**, 389-39

McDonald, R.P. 1967 Nonlinear Factor Analysis, *Psychometric Monograph No.15*.

McDonald, R.P. 1997 Normal ogive multidimensional model. In W.J. Van der Linden, & R.K. Hambleton (Eds.), *Handbook of item response theory* (Pp.258-269). New York: Springer-Verlag.

McDonald, R.P. 1999 *Test theory: A unified treatment.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mooney, C.Z. & Duval, R.D. 1993 *Bootstrapping: A nonparametric approach to statistical inference*. SAGE University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07-095. Newbury Park, CA:Sage.

Muthén, B. 1978 Contribution to factor analysis of dichotomous variables. *Psychometrika*, **43**, 551-560.

Muthén, B. 1987 *LISCOMP: Analysis of linear structural equations with a comprehensive measurement model*. Chicago: Scientific Software.

Muthén, B. 1989 Dichotomous factor analysis of symptom data. *Sociological Methods and Research*, **18**, 19-65.

Muthén, B. & Muthén, L. 1999 M*plus*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

小笠原春彦 1996 規準化オーソマックス法における因子負荷の標準誤差, 行動計量学, **23**, 122-129.

Ogasawara, H. 1998 Standard errors for rotation matrices with an application to the promax solution. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **51**, 163-178.

Ogasawara, H. 2000 *ROSEF Version* 1.0 *User's guide: A subroutine library for the ROtated solutions with their asymptotic Standard Errors in Factor analysis*. Otaru: Otaru University of Commerce.

Parry, C.D. & McArdle, J.J. 1991 An applied comparison of methods for least-squares factor analysis of dichotomous variables. *Applied Psychological Measurement*, **15**, 35-46

Reckase, M.D. 1997 A linear logistic multidimensional model. In W.J. Van der Linden, & R.K. Hambleton (Eds.), *Handbook of item response* *theory* (Pp.271-286). New York: Springer-Verlag.

芝　祐順　1979　因子分析　第2版　東京大学出版会.

Takane, Y. & de Leeuw, J. 1987 On the relationship between item response theory and factor analysis of discretized variables. *Psychometrika*, **52**, 393-408.

Waller, N.G. 1995 *MicroFACT 1.0: A Microcomputer Factor Analysis Program for Ordered Polytomous Data and Mainframe Size Problems*. Minneapolis: Assessment Systems Corporation.

渡部　力・名取　亮・小国　力　1989 Fortran77による数値計算ソフトウェア　丸善株式会社.

Wilson, D.T., Wood, R. & Gibbons, R.T. 1991 *TESTFACT: Test scoring, item statistics, and item factor analysis*. Chicago, IL: Scientific Software.

Yung, Y. & Hayashi, K. 2001 Computationally efficient method for obataining stadard error estimates for the promax and related solutions. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **54**, 125-138.

— 2001. 9. 28 受稿 —