創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー

（５年計画の１年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須田　　学・更科　元子・ 鈴木　清夫
須藤　雄生・田中　祥子・ 町田多加志
三井田裕樹

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

（５年計画の１年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須田　　学・更科　元子・鈴木　清夫
須藤　雄生・田中　祥子・町田多加志
三井田裕樹

要約

2002 年度から 5 年間，2007 年度から 5 年間，合計 10 年間の SSH 研究で，大学での学びにつながる数学に注目して「統計」，「微分方程式」などを含む 62 の教材とそれらを含んだカリキュラムを開発すると共に，教育研究会や教員研修会などを実施し，教材実践の内容を公開した。今年度から新たに 5 年間指定された SSH 研究では，生徒の国際交流や研究発表を意識しながら，これまでの取り組みを継続し，内容のさらなる充実を目指す。

また，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」の実施，サイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組み，数学オリンピックや数学科学研究部など生徒の数学的活動の支援，筑波大学学生に向けた基礎統計学の講義として自由科目「基礎から学ぶ統計の世界」なども継続して行っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. はじめに

本校数学科では，筑波大学や他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。2002 年度から指定を受けたスーパーサイエンスハイスクール（以下 SSH と略）研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』の中で数学科は，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」（集団の特徴を掴む考え方や手法）および「微分方程式」（微小な変化から関数の特徴を捉える考え方）に関する教材開発と授業実践を行った。また，それらを本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置するとともに，教育研究会などで公開し，その効果を確認することができた。さらに，2007 年度から 5 年間の指定を受けた SSH 研究『国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，これら以外の分野を含めて，生徒も教師も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を数多く開発し，中高一貫カリキュラムの充実を目指した. 指定最終の 2011 年度までに 62 の教材を開発し，カリキュラムに配置すると共に，教育研究会や教員研修会などで発表した。

今年度から新たに 5 年間指定された SSH 研究『幅広い教養と深い探究心をもつ国際性豊かな最先端研究者を育成する高大連携プログラムの研究と実施』では，生徒の国際交流や研究発表を意識しながら，教材・カリキュラム開発や教員研修会などを継続し，内容のさらなる充実，他校への普及を目指す。今年度，既に 2 つの教材を開発し，2 回の教員研修会も実施している。

また，教材・カリキュラム開発以外に，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した総合学習「ゼミナール」，「テーマ研究」，数学オリンピックや数学研究部など生徒の数学的活動の支援，筑波大学学生に向けた基礎統計学の講義などを実施している。以下，その取り組みを報告する。

2. 今年度の研究

2.1. 教材の開発

今回の５年計画の『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発～中高６カ年から大学へ』というタイトルには，中高一貫校である本校の特色を活かしたいという願いがこめられている。

本校に入学してくる多くの生徒は，受験勉強の影響で，

<Project research>
Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

答えを早く正確に出す能力を持っており，特に中学の新入生の殆どは算数に熟達している。しかし，計算・理解は速いけれども，中学以降の数学で理解が深まらない場合や，数学的思考・論理的思考になじめない場合，一般化・公式にとらわれ，思考が発展しないケースなども見受けられる。

中学の数学で文字に出会い，方程式を使えるようになると，それまでの算数的思考を節約して課題が解けてしまう。微積分や複素数などでも一歩高い手段を学び，一気に見晴らしが良くなる飛躍があるのは誰もが実感できるところだ。このような感激は実に大きい。また逆に，眺望のよい高いところでは小さい木々や花は見えない。一般性を追求すると課題に固有の意味や特殊性は見えにくくなるが，自然科学・社会現象に数学を応用するときには，より原始的な位置まで戻る場合もありうる。要するに普遍性も個別性も必要なのであって，数学の勉強は一般性・普遍性を追求しながらも，個別性・特殊性を味わうことも大切なのである。そのことは中高から大学への流れのなかで意識しておきたい。それには，適切な教材が欠かせない。

そのためにはこれまで開発してきた「統計」と「微分方程式」の教材だけでなく，様々な分野において，大学での学びにつながる数学教材，魅力的で有用な教材を開発する必要があると考えられる。そこでさまざまな場面の教材を開発することにした。充実したカリキュラム作成のために，生徒も教師も意欲的に取り組めるような教材をできるだけたくさん開発し，魅力的な学びを目指していきたいと考えている。

今年度新たに我々が研究し開発している教材は次の 2 つである。

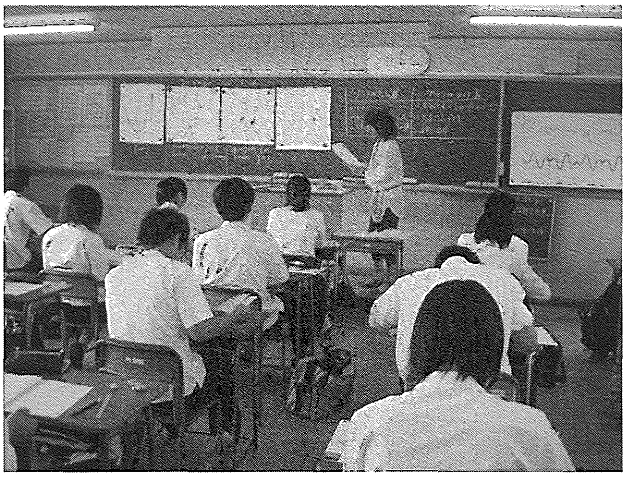
- 平方根の連分数展開
- 正多面体の面や辺の作る角

2.2. その他のSSHの取り組み

開発した教材・カリキュラムは教員研修会などで公開し，参加者から今後の研究の指針を得ている。本年度は以下の研修会を実施した。

（詳細は本校 SSH 報告書参照）

・SSH 数学科教員研修会　in 香川
（2012 年 8 月 29 日実施，会場　香川県立観音寺第一高校，参加者　約 30 名）



・SSH 交流会支援教員研修　数学科教員研修会
（2012 年 12 月 9 日実施，会場　本校オープンスペース，参加者　約 100 名）

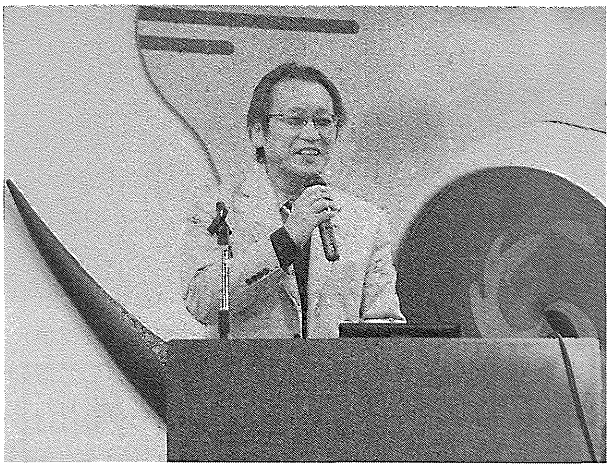
2.3. 数学特別講座

SSH 事業として，魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生や卒業生に実施していただいている。この講座の目的は，中学高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。なお，これらの内容も授業に取り込める教材として研究する必要があると考えている。

本年度は次の講座を実施した。

（詳細は本校 SSH 報告書，特別講座講義録参照）

・「高次元小標本のデータ科学」
講師　青嶋誠　筑波大学大学院数理物質系教授
日時　2012 年 12 月 11 日（火）13:30～15:00
参加生徒　中 1 から高 3 までの希望者 79 名



【アンケートの自由記述より抜粋】
（中 2）内容はとても難しく，あまりわからなかったが要点はなんとなくつかめた。
（中 3）高次元になればなるほど，ガウス分布では球状に，それ以外では十字状に分布するというのが面白いと思った。
（高 1）ガウス分布に基づけば球面集中，ノンガウスだと座標軸集中になるという鮮やかな説明が印象に残りました。
（高 2）マトリクス・ベクトルは大事ですね。固定観念を脱して相手の特徴をつかむ。実用性から飛ばなかったのでわかりやすかった。続編に期待。
（高 3）CDM法によって誤差の少ない推測ができると分かった。

・「素数の不思議」
講師　伊藤哲史　京都大学大学院准教授
（本校 44 期卒業生）
日時　2012 年 12 月 13 日（木）13:30～15:00
参加生徒　中 1 から高 3 までの希望者 45 名

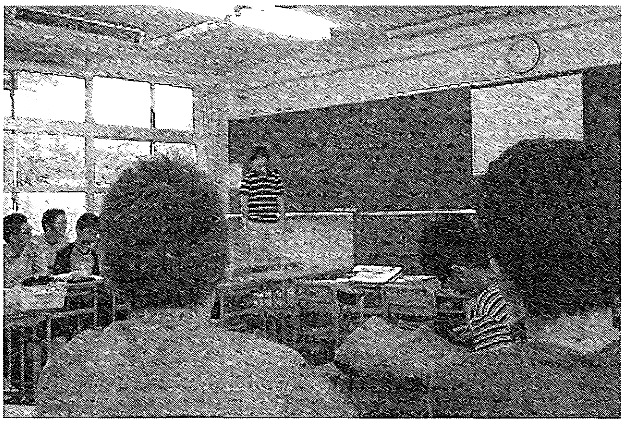
【アンケートの自由記述より抜粋】
（中 1）面積が素数で 3 辺が有理数の三角形が興味深かった。論理的な演算をコンピュータに行わせるという手法を自分でも使いたいと思った。
（中 3）現代数学ってすごいな！！
（高 1）保型形式の x の係数を見ることで，$p=$(2 次式) を満たす p を調べられるのが意外でした。
（高 2）一見何の法則もなさそうな素数について，すでにこのような相互法則が発見されていて，さらにあのような予想がなされているとは知らなかった。素数，スゲー！！
（高 3）素数定理が面白かった。N 以下の素数が $N/\log N$ で近似できるというのは興味深かった。

2.4. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校 2 年生の総合学習「ゼミナール」を，本校他学年の生徒や OB の学生も参加する形で実施している。これは，高校 3 年生の総合学習（テーマ研究）につながる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに，本校のテーマ研究発表会だけでなく，SSH 生徒研究発表会など学校外でも発表している。今年度も OB の大学生の発表，中学 3 年生も参加しての高 2 生徒のプレ発表，大学の先生の講義などを実施している。今までの参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることがうかがえ，効果的な取り組みであると考えている。

2012 年の研究内容予定一覧抜粋
・1 列を平面で
・コラッツの問題(名古屋大 HP より)
・自然数累乗の和，t 乗
・同値，背理法
・統計学
・チンチロリンゲーム
・幾何学
・フィボナッチ数，リュカ数，整数で公式
・微分方程式
・フィボナッチ数
・ゲーム(花札)の確率
・組合せ
・統計学必勝法
・必勝法
・モノイドの微分
・パスカルの三角形を 3 次元に
・3 次元で複素数のグラフ，断面

・統計学
・漸化式
・レゴ，点のラインの最小，シャボン玉
・ゲーム



なお，中学３年生対象の中学版ゼミナールであるテーマ学習を，昨年度７年ぶりに復活させた。今年は「身近にある統計学」という内容で，８名の生徒が数学的な課題研究に取り組んでいる。

これらの研究を基に，今年度に学外で生徒が発表した発表会のうち，「マス・フェスタ」，「高校生による MIMS 現象数理学研究発表会」について紹介する。

2.4.1. マス・フェスタ（数学生徒研究発表会）

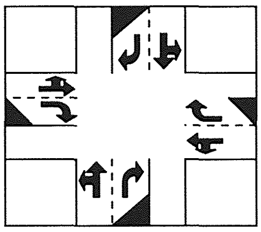
「マス・フェスタ（数学生徒研究発表会）」は，平成23年度にコアSSHの指定を受けた大阪府立大手前高校が，「数学」に特化した取り組みとして実施しているコアSSH事業の一環で，今回で４回目である。この発表会は，数学に関する生徒の取り組み等（課題研究，部活動等）の研究発表を行うことにより，数学に対しての興味・関心を高め，今後の数学教育活動の発展に資することを目的としている。そのため，全国から日頃，数学に興味・関心をもった高校生たちが集まり，互いの研究発表を通して交流し，研究を深めていくことができる発表会となっている。今回初めて本校より生徒２名が参加した。

日時：8月25日（土）9:00～16:00
会場：ドーンセンター（大阪市中央区大手前1-3-49）
内容：全国から30校，約500名の高校生が参加。生徒による数学研究（課題研究等）についての発表会（口頭発表34本，ポスター発表66本）を３つの分科会に分かれて実施し，その各発表について，大学の先生方から講評をいただく。

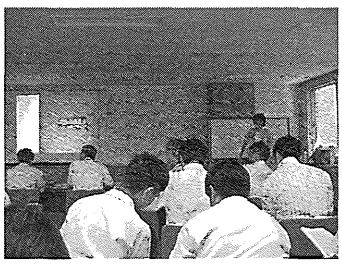
以下，本校生徒の作成した要旨から一部を示す。

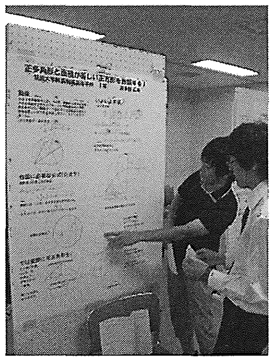
・「交通の最適化」
（高校１年　口頭発表＆ポスター発表）

目的：自動車が普及した現在において，交通の最適化は渋滞を減らすためには欠かせないものとなっている。その中で，どのように最適化することができるのかを考えるに当たり，まずは交差点における信号の最適化を数学で考えることにした。



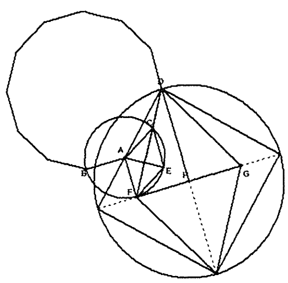
方法：まずは右図のような場合を考える。この縦直進を α [台/秒]，横直進を β [台/秒]，横右折・横左折・縦右折・縦左折を γ [台/秒]と置き，黄色は３秒，赤は３秒，車の間隔は１台目は青になった１秒後，それ以降は平均３秒おきに停止線を超えると設定し(学校前の計測データより)，計算を行った。また，今回は歩行者を考慮に入れないことにした。





・「正多角形の面積と等しい面積の正方形の作図」
（高校１年　ポスター発表）

目的：計算を利用することによって，正多角形の面積と同じ面積の正方形を作図できるか工夫する。



方法：正 n 角形を，合同な n 個の二等辺三角形に分割する。二等辺三角形の面積を三角関数を用いて求めて n 倍する。正方形の１辺の長さは面積に根号をつけた値であるから，これを作図できる形に変形する。

参加した生徒は，数学好きな高校生が全国にたくさんいることに感激して，次も是非この発表会に参加したいという思いを強くもったようで，早速，新たな研究に向けて取り組む意欲を示していた。このように，数学だけの生徒発表会に生徒が参加することで，数学についての興味・関心がさらに高まったと考えられる。

2.4.2. 高校生によるMIMS現象数理学研究発表会

「第2回 高校生によるMIMS現象数理学研究発表会」は，明治大学先端数理科学インスティテュートの主催で行われ，「身の回りの現象を数理の目で見る」というテーマのもとに，全国の高校生が研究発表を行うものである。今年が2回目の開催であり，本校では第1回より口頭発表，ポスター発表にて参加している。

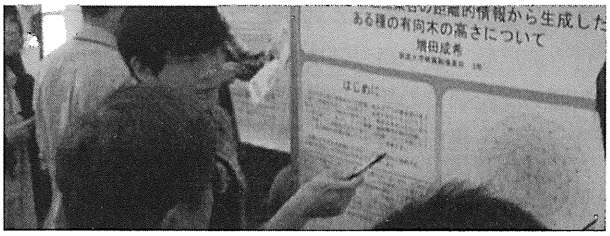
日時：10月8日（月・祝）10:00～16:30
会場：明治大学駿河台キャンパス　紫紺館
（東京都千代田区神田小川町3-22-14）
内容：全国から高校生が集まり，6件の口頭発表と12件のポスター発表を行う。その後，明治大学先端研の教員による生徒への講義の間に，中央大学藤田岳彦教授を審査委員長とする，大学教員による審査が行われ，優秀な発表が数件表彰される。

本校からは，口頭発表2件，ポスター発表3件の，計5件の生徒発表を出展した。題目と発表の様子は以下の通りである。

・口頭発表「交通の最適化」（高校1年3名）

・口頭発表「たし算とかけ算で自然数を作るときの最小値」（高校3年）

・ポスター発表「平面上の有限点集合の距離的情報から生成したある種の有向木の高さについて」（高校2年）



・ポスター発表「立体の切断についての考察」（高校2年）

・ポスター発表「四円柱の共通部分」（高校1年4名）

審査の結果，「交通の最適化」が奨励賞，「立体の切断についての考察」が最優秀ポスター賞として表彰されたが，その他のいずれも甲乙つけがたい優秀な発表であったとの講評を受けた。

生徒にとって，大学教員や全国の高校生に自分の研究成果を直接見てもらえる機会は非常に貴重なものであったように思う。また，今後継続して研究を深めていくためのヒントも大いに得られた様子で，発表を通して成長する生徒の姿を実感できる発表会であった。今後もこのような発表会に生徒が参加することを奨励し，実施していきたい。

2.5. 生徒の数学的活動の支援

特別講座同様，生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック（JMO）・数学ジュニアオリンピック（JJMO）への参加を募っている。今年度もJMOに89名，JJMOに133名（11年度はJMO 77名，JJMO 139名）が応募した。

また，数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行う部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。本年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに，研究レポート集を発行した。

2.6. 筑波大学　自由科目「基礎から学ぶ統計の世界」

筑波大学が2008年度から実施しているリメディアル教育は，昨年度より単位認定の自由科目として設定され，「統計学の基礎を学ぶ」という目標で，本校数学科および筑波大学附属高校（文京区）数学科の教員が授業を担当している。

本年度は5月と6月の土曜日10時～15時に，大学の普通教室とコンピュータルームで実施した。

大学への学びにつながる数学を目指す我々にとって，高大連携という意味でも有用な取り組みである。

3. 開発教材一覧

★印　今年度開発中のもの・本冊子に掲載したもの

「A. 代数(Algebra)」，「An. 解析(Analysis)」，「G. 幾何(Geometry)」，「P. 確率(Probability)」，
「S. 統計(Statistics)」，「D. 微分方程式(Differential Equation)」，「O. その他(Others)」

各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。

（例）an2.　**合成関数とグラフ**　中学2年の「解析」
G1-2.　**デカルトの円定理**　高校1年の「幾何」その2

以下，今年度に開発した2つの教材（★印）を記載する。

区分	教材名	年度
a1.	整数	2008
a1-2.	有理数	2007
a3.	暗号理論と整数論	2006
A1.	数と方程式	2008
A1-2.	平方根の連分数展開 ★	2012
A2.	離散な数列と連続な関数	2009
A2-2.	ΣK^4 と区分求積法	2011
A3.	置換と正多面体群	2007
A3-2.	1次変換の線形性	2008
an1.	2元1次方程式とその応用	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウェアによるグラフ描画	2010
An1.	2次関数	2007
An1-2.	2次関数（2）	2009
An1-3.	和や積のグラフ	2010
An2.	円周率の近似	2007
An2-2.	三角関数表を作る	2006
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011
g1.	四角形の合同条件	2008
g1-2.	作図の教材	2009
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角 ★	2012
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007
g3.	立方体の切断	2007
g3-2.	反転法	2007
g3-3.	立方体の切断（2）	2009
G1.	四面体の幾何	2008
G1-2.	デカルトの円定理	2009

区分	教材名	年度
G2.	正17角形の作図	2008
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
s1.	統計の基本	2006
s2.	標準偏差・近似直線	2006
s3.	正規分布と標準化	2006
s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
S1.	回帰直線，相関係数	2007
S1-2.	数理統計学入門	2009
S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
S3.	主成分分析入門	2007
S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007
d1-2.	『数える』	2010
d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
d3.	2次関数の接線	2006
d3-2.	面積・体積	2006
d3-3.	最大・最小	2006
D1.	包絡線	2006
D2.	グラフ描画の方法 ―テクノロジーへの挑戦―	2007
D3.	包絡線（その2）	2006
D3-2.	微分方程式	2006
D3-3.	微分方程式の応用	2006
D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
D3-5.	曲線と面積	2008
O1.	4元数を高校数学へ	2007
O2.	有限世界の数学	2007
p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
Pf1.	組合せの確率モデル	2007
Pf2.	EBI と確率・統計	2007
Pf3.	無限集合の確率	2008

A1-2. 平方根の連分数展開

関連分野	：代数分野，解析分野
高等数学	：解析
対象学年	：高校１年生
関連単元	：数と式
教 材 名	：平方根の連分数展開

《平方根の連分数展開》

数学Ⅰの基本事項である分母の有理化では，

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

のような計算が登場する。技能の習熟に終始していると見過ごしがちだが，この式は両辺に同じ平方根をもつにもかかわらず，左辺は分数，右辺は分数でないものが等号で結ばれている。これは一種の驚きをもって迎えられるべきものであろう。本稿では，このような平方根の計算に特有の現象から発展させ，正の数の平方根を連分数で表示することについて考える。

1. 平方根の連分数展開

上の例で，左辺と右辺をいれかえ，式を変形すると，$\sqrt{2}-1$，つまり$\sqrt{2}$ の小数部分について，

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} \quad \cdots ①$$

という式が得られる。右辺に再び$\sqrt{2}-1$が現れるので，①自身を代入してみると，

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}$$

以後も同様に，代入を無限に繰り返すことができる。これを，$\sqrt{2}$ の連分数展開という。

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

以下，これを高木貞治（1971）『初等整数論講義第２版』にならって，

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}\,{}_{+}\,\frac{1}{2}\,{}_{+}\,\frac{1}{2}\,{}_{+}\,\frac{1}{2}\,{}_{+}\cdots$$

と表記することにする。

同様にして，

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

から得られる式

$$\sqrt{3}-1=\frac{2}{2+(\sqrt{3}-1)}$$

を用いれば，$\sqrt{3}$ は次のように表されることがわかる。

$$\sqrt{3}=1+\frac{2}{2}\,{}_{+}\,\frac{2}{2}\,{}_{+}\,\frac{2}{2}\,{}_{+}\,\frac{2}{2}\,{}_{+}\cdots$$

2. 平方根の連分数展開の一般化

これら$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の連分数展開を一般化し，任意の平方根$\sqrt{x}$（x は整数）において連分数展開を行うには，もとになる式を次のようにすればよい。

$\sqrt{x}$ の整数部分を a とする。

$(\sqrt{x}+a)(\sqrt{x}-a)=x-a^2$ であるから，

$$\sqrt{x}-a=\frac{x-a^2}{\sqrt{x}+a}=\frac{x-a^2}{2a+(\sqrt{x}-a)}$$

よって，

$$\sqrt{x}=a+\frac{x-a^2}{2a}\,{}_{+}\,\frac{x-a^2}{2a}\,{}_{+}\,\frac{x-a^2}{2a}\,{}_{+}\cdots$$

例えば，整数部分が２である平方根は，次のような連分数で表される。

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}\,{}_{+}\,\frac{1}{4}\,{}_{+}\,\frac{1}{4}\,{}_{+}\,\frac{1}{4}\,{}_{+}\cdots$$

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4}\,{}_{+}\,\frac{2}{4}\,{}_{+}\,\frac{2}{4}\,{}_{+}\,\frac{2}{4}\,{}_{+}\cdots$$

$$\sqrt{7}=2+\frac{3}{4}\,{}_{+}\,\frac{3}{4}\,{}_{+}\,\frac{3}{4}\,{}_{+}\,\frac{3}{4}\,{}_{+}\cdots$$

$$\sqrt{8}=2+\frac{4}{4}\,{}_{+}\,\frac{4}{4}\,{}_{+}\,\frac{4}{4}\,{}_{+}\,\frac{4}{4}\,{}_{+}\cdots$$

整数部分が３である平方根についても同様である。

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{6}\,{}_{+}\,\frac{1}{6}\,{}_{+}\,\frac{1}{6}\,{}_{+}\,\frac{1}{6}\,{}_{+}\cdots$$

$$\sqrt{11}=3+\frac{2}{6}\,{}_{+}\,\frac{2}{6}\,{}_{+}\,\frac{2}{6}\,{}_{+}\,\frac{2}{6}\,{}_{+}\cdots$$

$$\sqrt{12}=3+\frac{3}{6}\,{}_{+}\,\frac{3}{6}\,{}_{+}\,\frac{3}{6}\,{}_{+}\,\frac{3}{6}\,{}_{+}\cdots$$

$$\sqrt{13}=3+\frac{4}{6}\,{}_{+}\,\frac{4}{6}\,{}_{+}\,\frac{4}{6}\,{}_{+}\,\frac{4}{6}\,{}_{+}\cdots$$

自然数の平方根は小数で表すと循環しない無限小数となることが知られているが，連分数で表すと循環することになる。また，この連分数展開によって得られる連分数に現れる数は，ある一定の規則性をもつことも見てとれる。（ただし，後述の通り，1つの数に対して，連分数による表現は何通りも存在する。）

3. 連分数の約分

ここまでの概要を生徒に投げかけてみたところ，次のような疑問があがった。

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\cdots$$

は，約分したら

$$2+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

になるように思えるが，先ほどの結果から，

$$2+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots=\sqrt{2}+1$$

である。これでは，$\sqrt{6}$ の小数部分と $\sqrt{2}$ の小数部分が同じということになってしまうではないか，というのである。本節では，この疑問を解決するために連分数の約分，通分について考えてみたい。

いまの例では，

$$\sqrt{6}=2+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cdots}}}$$

の約分を考えた。約分とは，分子と分母を同じ数で割ることであるから，分子と分母を2で割ってみる。

$$2+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{x}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}$$

であることに留意すると，

$$\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\boxed{\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{4+\cdots}}}}$$

である。ここで，囲みの部分についてはすでに分子が1になっていることに注目したい。次に約分が可能なのは，囲みの部分の分母で，“4＋”の後ろにある分数，つまり分子が2になっている部分である。

以上のことから，次の結果が推測される。

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots$$

この式には，次のようにすると根拠が与えられる。

$$\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots=x$$

とおくと，

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+x}}$$

が成り立つ。分母を払って整理すると，

$$x=\frac{4+x}{9+2x}$$

$$x(2x+9)=4+x$$

$$2x^2+8x-4=0$$

$$x^2+4x-2=0$$

$$x=-2\pm\sqrt{6}$$

明らかに $x>0$ であるから，$x=-2+\sqrt{6}$ を得る。

一方，このような例もある。

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

$$\sqrt{8}=2+\frac{4}{4+}\frac{4}{4+}\frac{4}{4+}\frac{4}{4+}\cdots$$

$\sqrt{2}$ の小数部分は $\sqrt{2}-1$，$\sqrt{8}$ すなわち $2\sqrt{2}$ の小数部分は $2\sqrt{2}-2$ であるから，$\sqrt{8}$ の小数部分は，$\sqrt{2}$ の小数部分のちょうど2倍である（整数部分への繰り上がりがない）。したがって，

$$\frac{4}{4+}\frac{4}{4+}\frac{4}{4+}\cdots=2\times\left(\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

であることが推測される。

実際に約分してみると，たしかに

$$\cfrac{4}{4+\cfrac{4}{4+\cfrac{4}{4+\cdots}}}=\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{4+\cfrac{4}{4+\cdots}}}$$

$$=\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{4+\cdots}}}$$

$$=\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

となるから，このことが示される。

これらのことから，連分数の約分については，次のように一般化してまとめられる。

$$\cdots+\frac{ap}{aq\,+}\,\frac{ar}{s\,+}\,\frac{t}{u\,+}\cdots=\cdots+\frac{p}{q\,+}\,\frac{r}{s\,+}\,\frac{t}{u\,+}\cdots$$

この計算規則によって，例えば，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}&=1+\frac{2}{2\,+}\,\frac{2}{2\,+}\,\frac{2}{2\,+}\,\frac{2}{2\,+}\cdots\\&=1+\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{2\,+}\,\frac{2}{2\,+}\,\frac{2}{2\,+}\cdots\\&=1+\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{2\,+}\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8}&=2+\frac{4}{4\,+}\,\frac{4}{4\,+}\,\frac{4}{4\,+}\,\frac{4}{4\,+}\cdots\\&=2+\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{4}{4\,+}\,\frac{4}{4\,+}\cdots\\&=2+\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{1\,+}\,\frac{1}{4\,+}\cdots\end{aligned}$$

のような約分も可能である。

さて，先ほどの$\sqrt{2}$と$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$のような例が他にもあるか見てみると，

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\cdots$$

について，

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\cdots<2+\frac{2}{4}$$

であるから，小数部分は$\frac{1}{2}$より小さい。一方，

$$\sqrt{24}=4+\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots$$

であり，小数部分を取り出してみると，たしかに

$$\begin{aligned}\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots&=2\times\left(\frac{4}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots\right)\\&=2\times\left(\frac{2}{4\,+}\,\frac{4}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots\right)\\&=2\times\left(\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\,\frac{4}{8\,+}\cdots\right)\\&=2\times\left(\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\,\frac{2}{4\,+}\cdots\right)\end{aligned}$$

となっている。あるいは，

$$\begin{aligned}\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots&=2\times\left(\frac{4}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots\right)\\&=2\times\left(\frac{1}{2\,+}\,\frac{2}{8\,+}\,\frac{8}{8\,+}\cdots\right)\\&=2\times\left(\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{4}{8\,+}\cdots\right)\\&=2\times\left(\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{2\,+}\cdots\right)\end{aligned}$$

のような変形も考えられる。

また，

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{4\,+}\cdots<2+\frac{1}{4}$$

であるから，$\sqrt{5}$については小数部分の4倍まで考えることができる。すなわち，

$$\sqrt{20}=4+\frac{4}{8\,+}\,\frac{4}{8\,+}\,\frac{4}{8\,+}\,\frac{4}{8\,+}\cdots$$

$$\sqrt{45}=6+\frac{8}{12\,+}\,\frac{8}{12\,+}\,\frac{8}{12\,+}\,\frac{8}{12\,+}\cdots$$

$$\sqrt{80}=8+\frac{16}{16\,+}\,\frac{16}{16\,+}\,\frac{16}{16\,+}\,\frac{16}{16\,+}\cdots$$

をそれぞれ約分してみると，たしかに小数部分が2倍，3倍，4倍になっていることが見て取れる。同様のことは$\sqrt{10}$でも（この場合は6倍まで）可能である。

4. 正則連分数

前の節では，

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{4\,+}\,\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{4\,+}\cdots$$

であることを2次方程式によって示したが，この式は，次のような方法によっても導くことができる。

$\sqrt{6}-2=\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}$ より

$$\begin{aligned}\sqrt{6}-2&=\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2+\left(\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}\right)}\cdots②\end{aligned}$$

また，$\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$ より

$$\frac{\sqrt{6}-2}{2}=\frac{1}{4+(\sqrt{6}-2)}\cdots③$$

したがって，

$$\sqrt{6}-2=\cfrac{1}{2+\left(\cfrac{\sqrt{6}-2}{2}\right)} \quad (\because ②)$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+(\sqrt{6}-2)}} \quad (\because ③)$$

以下繰り返し代入して，求める連分数展開を得る。

連分数において，分子がすべて１である形のものを正則連分数という。すなわち，

$$\sqrt{6}=2+\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\cdots$$

は正則連分数ではないが，

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots$$

は正則連分数である。

正則連分数を得るには約分をすればよいが，一方で，

$$\sqrt{7}=2+\frac{3}{4+}\frac{3}{4+}\frac{3}{4+}\frac{3}{4+}\cdots$$

のように，約分しても正則連分数にできそうもないものもある。そのときは，本節の冒頭にあげた方法を用いれば，正則連分数に展開することができる。

具体的には，次のようにする。まず，

$\sqrt{7}-2=\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}$ より

$$\sqrt{7}-2=\cfrac{1}{\left(\cfrac{\sqrt{7}+2}{3}\right)}$$

$$=\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{\sqrt{7}-1}{3}\right)}\cdots ④$$

このように分子は１にしておき，分母は整数部分と小数部分に分けておく。次に，

$\sqrt{7}-1=\dfrac{6}{\sqrt{7}+1}$ より

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3}=\frac{2}{\sqrt{7}+1}$$

$$=\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right)}\cdots ⑤$$

ここでも同様に，つねに分子を１にし，分母を整数部分と小数部分に分ける。これ繰り返してゆく。

続けて $\sqrt{7}-1=\dfrac{6}{\sqrt{7}+1}$ より

$$\frac{\sqrt{7}-1}{2}=\frac{3}{\sqrt{7}+1}$$

$$=\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{\sqrt{7}-2}{3}\right)}\cdots ⑥$$

さらに，$\sqrt{7}-2=\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}$ より

$$\frac{\sqrt{7}-2}{3}=\frac{1}{\sqrt{7}+2}$$

$$=\frac{1}{4+(\sqrt{7}-2)}\cdots ⑦$$

これでようやく分母に $\sqrt{7}-2$ そのものが現れたので，④〜⑦より

$$\sqrt{7}-2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+(\sqrt{7}-2)}}}}$$

であることがわかり，次の正則連分数展開が得られた。

$$\sqrt{7}=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots$$

このアルゴリズムは，有理数に対して行うと，ユークリッドの互除法のアルゴリズムそのものとなる。すなわち，

$$\frac{132}{57}=2+\frac{18}{57}$$

$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{57}{18}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{18}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{18}{3}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6}}$$

といった具合である。分子を１にする操作は逆数を取る操作，整数部分と小数部分に分ける操作が整除に対応し，これによって除数（分母）が次のステップにおける被除数（分子）に，剰余（小数部分の分子）が次の除数（分母）となっていることがわかる。

5. 連分数の収束

これまでの連分数展開は，すべて平方根の整数部分と小数部分に着目して式変形を行ってきたものであった。しかし，両辺に同じ平方根を含む式であれば，どのような式から出発しても連分数展開は得られるのか，ということも生徒から疑問としてあがった。例えば，

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdots⑧$$

$$\sqrt{2}=\frac{2}{1+(\sqrt{2}-1)}\cdots⑨$$

という2本の式を用いると，

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\quad(\because ⑧)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{1+(\sqrt{2}-1)}}\quad(\because ⑨)$$

であるから，連分数展開として

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\cdots$$

が得られる。しかし，

$$\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

という式だけを用いて，

$$\sqrt{2}=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{2}}}}=\cdots$$

すなわち，

$$\sqrt{2}=\frac{2}{0}+\frac{2}{0}+\frac{2}{0}+\frac{2}{0}+\cdots$$

と連分数展開すると，これは許されそうにない。なぜなら，

$$a=\frac{2}{\frac{2}{a}}$$

という式は，0 でない任意の数aについて成り立つものであり，連分数

$$\frac{2}{0}+\frac{2}{0}+\frac{2}{0}+\frac{2}{0}+\cdots$$

が1つの値をとるとは考えられないからである。すると，同様に先にあげた

$$1+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\cdots$$

なる連分数もまた，値が定まらないかもしれない。

この疑問を解決するには，連分数として表現された数が，有限の値に収束するかということを考える必要がある。すなわち，無限連分数で表された数

$$a_0+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\cdots\frac{b_n}{a_n}+\cdots=\alpha$$

に対して，これをn番目で打ち切ったものを

$$a_0+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\cdots\frac{b_n}{a_n}=\alpha_n$$

とおく。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

が成り立っているかどうかを調べればよい。

その証明に踏み込むことは本稿の趣旨から外れると思われるので割愛するが，次のことが知られている。

各 a_k，b_k（$k=1,\ 2,\ 3,\ldots$）が $0<b_k\leqq a_k$ を満たすならば，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

1節から4節まででであげた連分数は，その展開アルゴリズムの性質から，すべて各a_k，b_k が$0<b_k\leqq a_k$を満たすようになっている。一方で，先にあげた

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\cdots$$

のような連分数が，単なる形式的なものでなく，値として意味をもつかどうかについては，収束についてさらに検証することが必要である。

参考文献

[1] 木村俊一（2012）『連分数のふしぎ・無理数の発見から超越数まで』講談社ブルーバックス

[2] 高木貞治（1971）『初等整数論講義　第2版』共立出版

（2012 須藤）

g1-4. 正多面体の面や辺の作る角

関連分野	：空間図形、ベクトル
高等数学	：幾何学
対象学年	：中学１，２，３年生
関連単元	：空間図形
教 材 名	：正多面体の面や辺の作る角

≪正多面体を通して空間図形に親しむ≫

図形の性質は論理的な思考を養成する格好の題材であるが、魅力的なものほど難しい。特に空間図形は立体をイメージする必要があり苦手とする生徒も多い。三平方の定理や相似の応用として空間図形が題材になるが、それ以前には基本的な空間図形しか扱っておらず、突然複雑な立体の計量に取り組むことも影響していると思われる。中学１年で正多面体を通して空間図形に親しみ、空間での平面や直線の位置関係などの基本事項や、切断面に注目する考え方を体得させたい。

具体的には、作図を通して平面図形の基本性質を確認した後、それらの応用を兼ねて空間図形を扱う。空間図形の基本性質（平面や直線の位置関係、及び柱体や円錐などの立体の構成など）を確認した後、実際に**正多面体の模型を作成**する。そして作った正多面体を手元に置きながら、面や辺の位置関係について考察する。

面や辺の位置関係について、立方体（正６面体）や正４面体は基本的であるが、正８面体、正 12 面体、正 20 面体は考えにくい。しかし、模型を手にしていれば様々なことに気がつく。そしてそれらの作る角を作図することを通して、正多面体の対称性や切断面に注目することになる。

なお、教材『g3-1. 立方体の切断』は切断面の計量を行わなければ中学１年生で実施可能なものである。こちらを先に扱うとより理解が深まるであろう。

以下、正多面体の面や辺の作る角について記載する。平面や直線の作る角は通常 0°～90° の方をいうが、面や辺なので、ここでは特にこだわらない。また、正 12 面体や正 20 面体については模型を見ながら考察することを前提にしている。

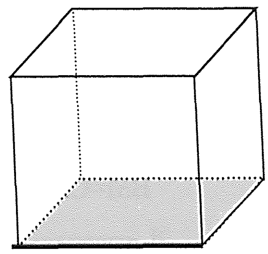
末尾に、正多面体が５種類であることについての指導例、正 12 面体の模型を作るために必要な正５角形の作図についての指導例、及び事前に指導確認すべき空間図形の基本性質ついて、【補足】として記載する。いずれも本校中学１年生に指導したものである。

g1-4. 1. 立方体・正４面体の辺や面の作る角

基本的な立方体（正６面体）の場合で「面や辺の作る角」についてどのように調べていくのかを確認する。

なおここでは、面は平面に、辺は直線に広げ、平面や直線の位置関係を考える。

正６面体（辺は 12 本）



面と面の位置関係

ある特定の面に注目して考える。
注目した面と他の面との位置関係には次の２通りがある。

① 平行（1 個）
② 垂直（4 個）

面と辺の位置関係

ある特定の面に注目して考える。
その面と 12 本の辺との位置関係は次の３通り。

① 面上（4 本）
② 平行（①を除く、4 本）
③ 垂直（4 本）

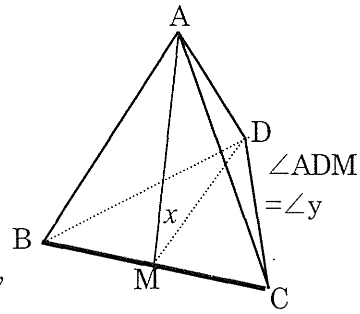
辺と辺の位置関係

ある特定の辺に注目して考える。
その辺と他の 11 本の辺との位置関係は次の３通り。

① 同一平面上で、作る角が 90°（4 本）
② 同一平面上で、平行（3 本）
③ ねじれの位置で、作る角が 90°（4 本）

正４面体について、同様に考察すると、次のようになる。

正４面体（辺は６本）



面と面

①交わる　(3 個)
→このときの作る角を$\angle x$

面と辺

①面上（3 本）
②交わる（3 本）
→このときの作る角を$\angle y$

辺と辺

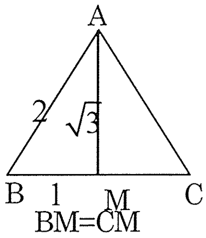
①同一平面上　(作る角は 60°、4 本)
②ねじれの位置（作る角は 90°、1 本）

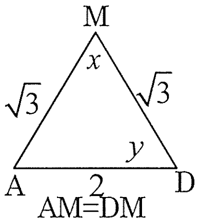
位置関係が把握できたら、面や辺の作る角について見取り図で確認し、その大きさを作図して示す。

面 ABC と面 BCD の作る$\angle x$、

面 BCD と辺 AD の作る$\angle y$　　の作図例

（以下、参考までに、図に主な長さを記載するが、作図は定規とコンパスで行う。）





【参考】　$\cos x=\dfrac{1}{3},\ \cos y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　である。

g1-4.2.正 8 面体の辺や面の作る角

正 8 面体の見取り図は下の図 1 がよく見かけるものだが、図 2 も位置関係を把握しやすい。また、平行移動しても作る角の大きさは変わらないので、交わる 2 面の位置関係は 1 通りである。

正 8 面体（辺$\dfrac{8\cdot 3}{2}=12$本）

面と面
①平行（1 個）
②交わる（6 個）　→　$\angle x$

面と辺
①面上（3 本）
②平行（3 本）
③交わる（6 本）→$\angle y$

辺と辺
①同一平面上 60°　（4 本）
②同一平面上 90°　（2 本）
③同一平面上平行（1 本）
④ねじれの位置 60°（4 本）

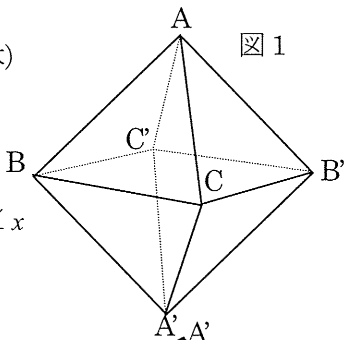


図 1

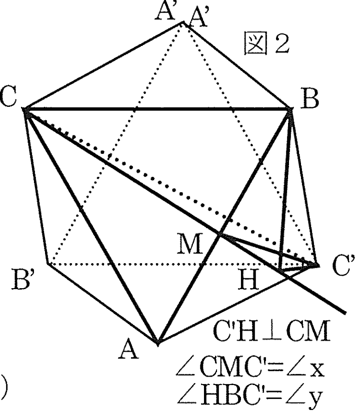


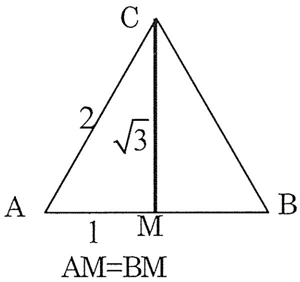
図 2

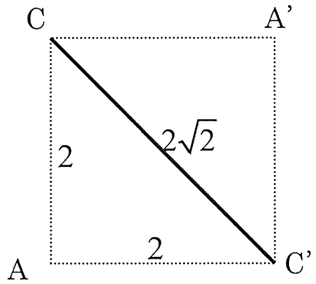
x, y の作図は色々な方法が考えられる。

面 ABC と面 ABC' の作る$\angle x$、

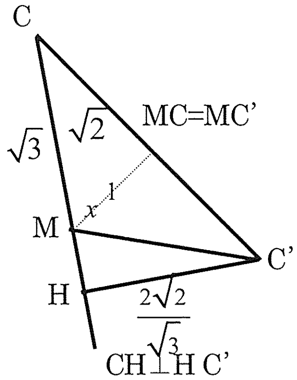
面 ABC と辺 BC' の作る$\angle y$　の作図例

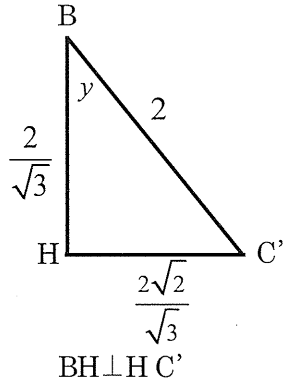
正三角形 ABC　　正方形 ACA'C'





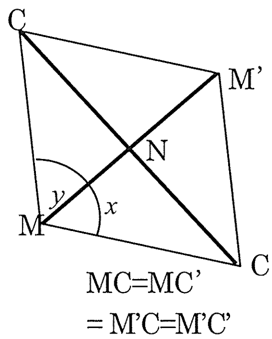
上図の CM,CC' を用いて、





別解）

辺 AB,A'B'の中点を M,M'とすると、四角形 CMC'M'はひし形で、その対角線 CC'は、正方形 ACA'C'の対角線。△ABC と△A'B'C の作る角



$\angle$MCM'=180°$-x$　も

交わる 2 面の作る角である。

また、線分 CC'の中点を N とすると、四角形 AB'A'B は正方形だから、NM//A'B。

よって、∠CMN は面 ABC と辺 A'B の作る角であり、

∠CMN＝$\angle y$、また、$x=2y$　が成り立つ。

【参考】

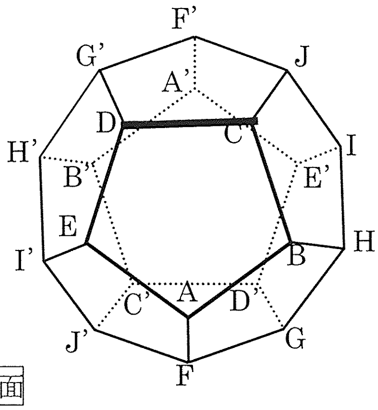
$$\cos x=-\frac{1}{3},\ \cos(180^\circ-x)=\frac{1}{3},\ \cos y=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

これらは正 4 面体と同じであり、正 4 面体と正 8 面体を、面を合わせて繋げると、3 組の面がそれぞれ平面で繋がる。

g1-4. 3. 正 12 面体の辺や面の作る角

正 12 面体は面や辺が多いので考えにくいが、模型を手にしながら、対称性に注目して考える。2 辺の作る角はすべて求まる。

正 12 面体 (辺 $\dfrac{12\cdot 5}{2}=30$ 本)



面と面

① 平行　(1 個)

② 交わる (10 個) →∠x

面と辺

① 面上 (5 本)

② 平行 (①以外、5 本)

③ 交わる(交点が頂点) (5+5＝10 本) →∠y

④ 交わる (③以外) (10 本) →∠z

辺と辺

① 同一平面上 108°　(4 本)

② 同一平面上 36°　(4 本)

③ 同一平面上平行　(1 本)

④ 同一平面上 60°　(CD と GH,IE'など 4 本)

⑤ ねじれ 90°　(CD と IH,AF など 4 本)

⑥ ねじれ 108°　(CD と C'B',C'J'など 4 本)

⑦ ねじれ 36°　(CD と A'B',J'F など 4 本)

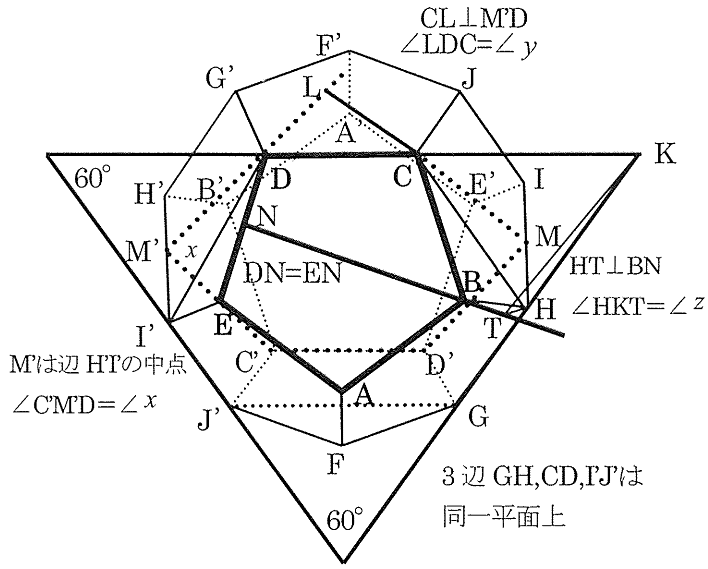
⑧ ねじれ 60°　(CD と G'H',I'E など 4 本)

x, y, z の作図には色々な方法があるが、いずれにしても、頂点から面への垂線や、面と辺の交点などを、対称性を考えて、2 直線の交点として見取り図に書き込むと良い。

例えば、頂点 H から平面 ABCDE への垂線 HT は、B を通る正 5 角形の 2 等分線 NB と交わる。同様に、頂点 C から平面 DEI'H'G'へ引いた垂線は、D を通る正 5 角形の 2 等分線 M'D と交わる。

また、直線 GH と面 ABCDE との交点は、2 辺 GH,CD が同一平面上にあるので、2 直線 GH,CD の交点 K である。

なお、3 辺 GH,CD,I'J'は同一平面上にあり、3 直線 GH,CD,I'J'で出来る三角形は正三角形である。



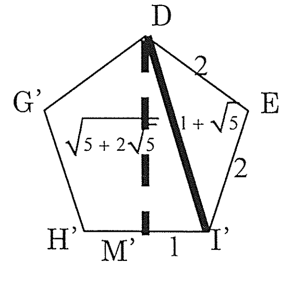
面 DG'H'I'E と面 H'I'J'C'B'の作る∠x、

面 DG'H'I'E と辺 CD の作る∠y

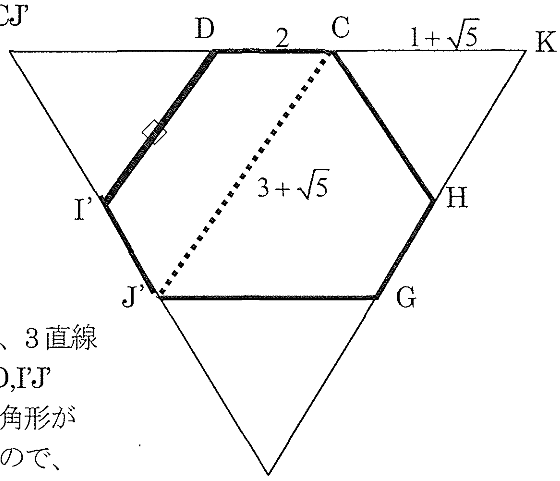
面 ABCDE と辺 GH の作る∠z　の作図例

x, y は平行な 2 辺 CD,C'D'を通る平面での切断面に表れる。

そこでまず正 5 角形 DG'H'I'E の高さ DM'、対角線 DI' を作図する。(正 5 角形の作図は末尾の【補足】参照)



また、CD//C'D',CJ//C'J'　及び対称性から、
DC'＝CJ'

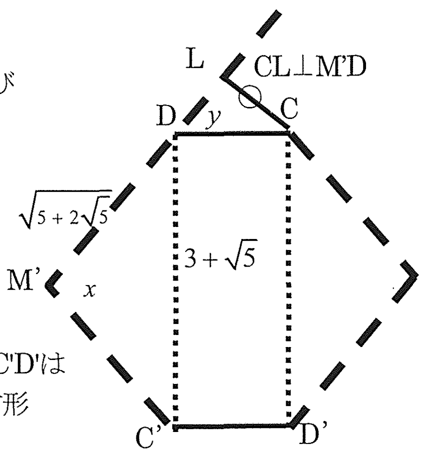


さらに、3直線
GH,CD,I'J'
で正三角形が
できるので、
DI'=KC=KH
DC'＝CJ'=CD+CK

よって、切断面及び

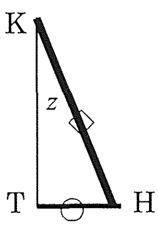
x, y は右のように

作図できる。



CDC'D'は
長方形

また、z は、
見取り図の∠HKT であり、
HT=CL、
KT⊥TH,
KH=DI'
であるから、
右のように作図できる。

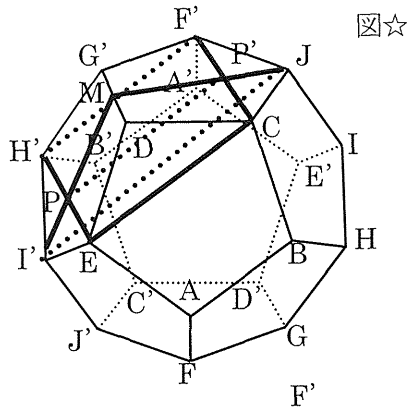


別解）

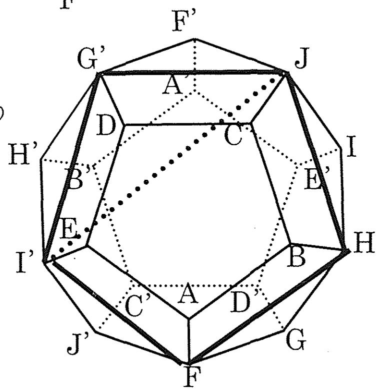
交わる2面の作る∠x

①図で、**H'ECF'は正方形**であるから、
線分 EH',CF' の中点を P,P'とすると、
PP'=EC

図☆



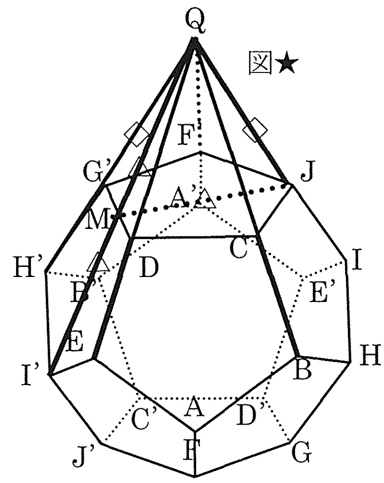
また、右図の
FHJG'I'は
正５角形
で、I'J は
その対角線。

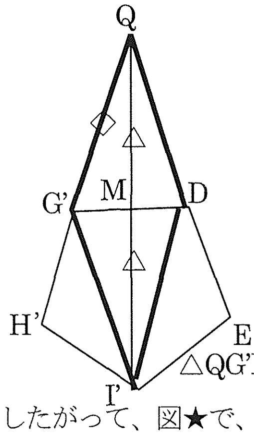


したがって、図☆で、△MJI'、△MPP'は作図でき、
∠JMI'=∠PMP'=∠x　である。

②右図のように、
IJ,BC,ED,H'G',A'F'は
１点 Q で交わる。
また、下図より
QM=MI'=MJ

図★

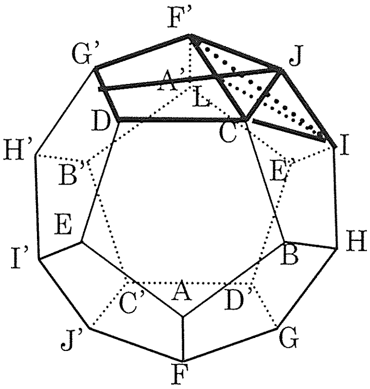




△QG'D≡△I'G'D

したがって、図★で、△QMJ は作図でき、
∠I'MJ==∠x　である。

頂点で交わる面と辺の作る∠y

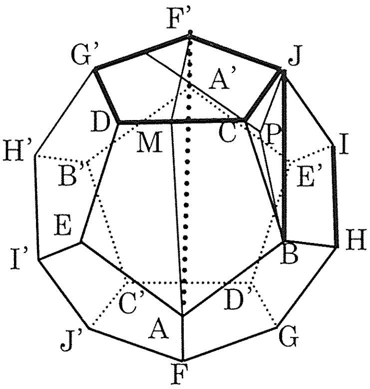


上の図で、△IF'C は正三角形。
線分 CF'中点を L とすると、△JLI は作図でき、

∠LJI= $180^\circ - y$　である。

頂点以外で交わる面と辺の作る∠z

面 CJF 'G'D と辺 IH の作る角 z について、
IH//F'A//JB　であるから、
面 CJF'G'D とこれらの作る角を考える。



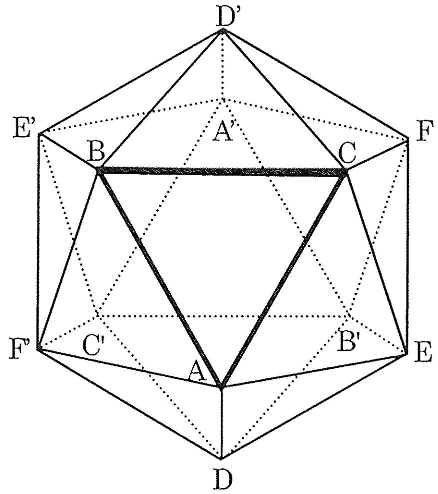
①面 CJF'G'D と F'A
CD の中点を M として、△MAF 'を作図すれば良い。
MA,MA'は５角形の２等分線。また、AF//A'F'より
F'A=（正５角形の辺と対角線の和）
＝（対角線を１辺とする正５角形の対角線）
②面 CJF'G'D と JB
B から面 CJF'G'D に引いた垂線を BP とすると、P は C を通る面 CJF'G'D の２等分線上にあり、∠PJB を作図すれば良い。
【参考】

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \cos y = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},\ \cos z = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$y + z = 90^\circ,\ x + 2z = 180^\circ$$

g1-4.4.正 20 面体の辺や面の作る角

正 20 面体はさらに面や辺が多く考えにくい。これも模型を手にしながら、対称性に注目して考える。ACFB'D,ACD'E'F'などが正 5 角形であることを活用する。また、2 辺の作る角はすべて求まる。



正 20 面体　（辺$\dfrac{20\cdot 3}{2} = 30$本）

面と面
① 平行　（1 個）
② 交わる（辺を共有、　3+3＝6 個）→∠x
③ 交わる（頂点を共有、6+6＝12）　→∠y

面と辺
① 面上（3 本）
② 平行（①以外、3 本）
③ 交わる（頂点が交点、△BE'F'と BC など、 3+3）→∠z
④ 交わる（頂点が交点で ③以外、6+6）　→∠w
⑤ 交わる（③④以外、△BE'F'と AC など、6）→∠u

辺と辺
① 同一平面上 60°　（4 本）
② 同一平面上 108°（4 本）
③同一平面上 36°　（4 本）
④ 同一平面上平行　（1 本）
⑤ ねじれ 90°　（BC と EF,AD など 4 本）
⑥ ねじれ 108°　（BC と B'F,B'E など 4 本）
⑦ ねじれ 36°　（BC と A'F,AE など 4 本）
⑧ ねじれ 60°　（BC と A'B',DB'など 4 本）

面 CEF と面 B'EF の作る∠x、

面 ABC と面 ADE の作る∠y、

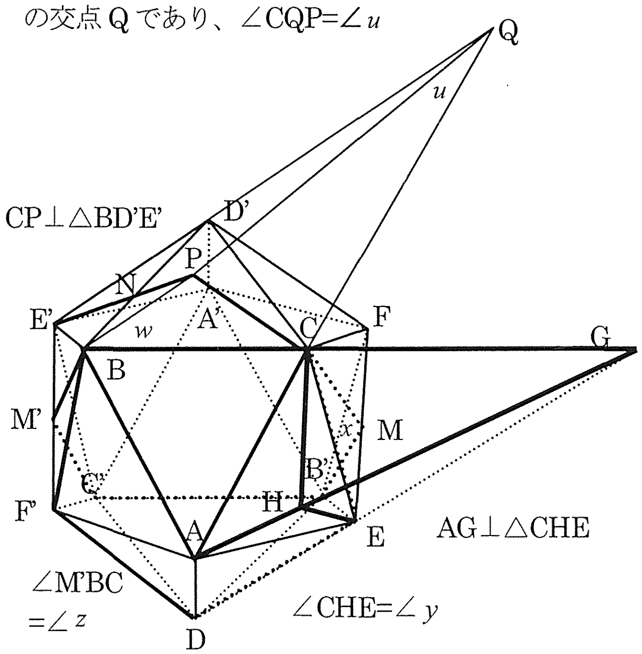
面 BE'F'と辺 BC の作る∠z、
面 BD'E'と辺 BC の作る∠w、
面 BD'E'と辺 AC の作る∠u の作図例

見取り図で、辺 EF の中点を M とすると、
∠CMB'=∠x
２直線 BC,DE の交点を G とすると、
面 ABC と面 ADE の交線は直線 AG である。
C から AG に引いた垂線を CH とすると、

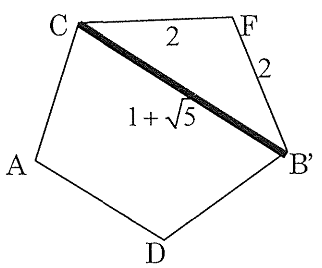
∠CHE=∠y

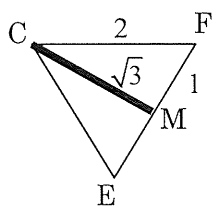
辺 E'F'の中点を M'とすると、∠M'BC=∠z

C から面 BD'E'へ引いた垂線 CP は、三角形の２等分線 E'N と交わり、∠CBP=∠w
また、直線 AC と面 BD'E'の交点は、２直線 E'D',AC の交点 Q であり、∠CQP=∠u

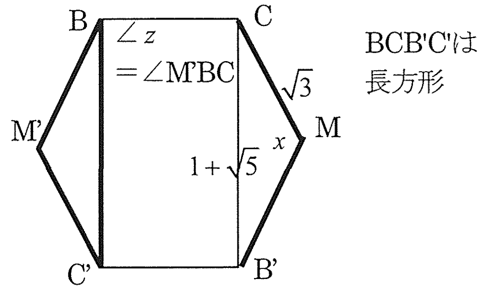


以上を作図するために、まず、正５角形 ACFB'D の対角線 CB'、正三角形 CEF の高さ CM を作図する。

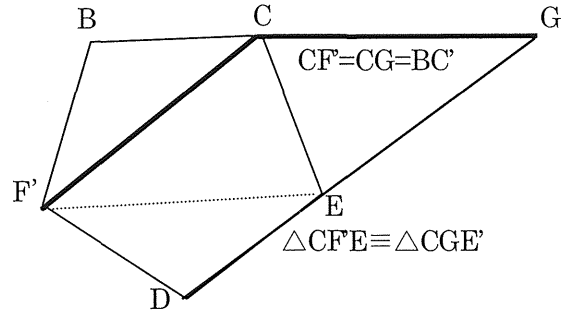




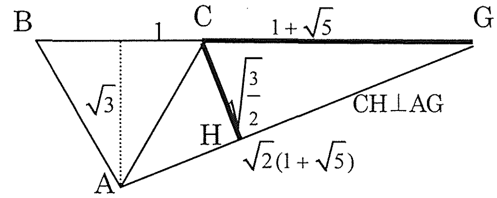
これらで平行な２辺 BC,B'C'を通る平面での切断面が作図でき、x, z は次のようになる。



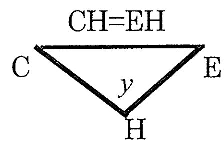
また、線分 CG は正５角形の対角線と同じ。



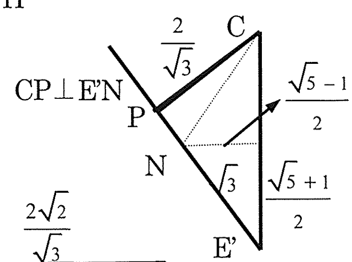
これを用いて△ABG を作図し、垂線 CH を引く。



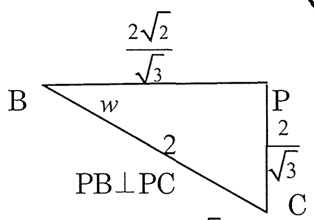
よって、∠CHE=∠y は次のようになる。



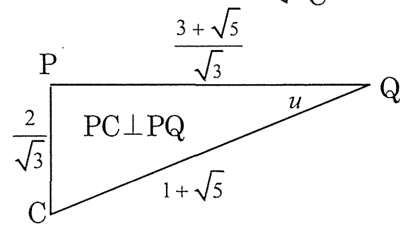
CP は初めと同じ図で、右のように作図できる。



よって、∠CBP=∠w は右の通り。



また CQ=CG であり、∠CQP=∠u は右の通り。

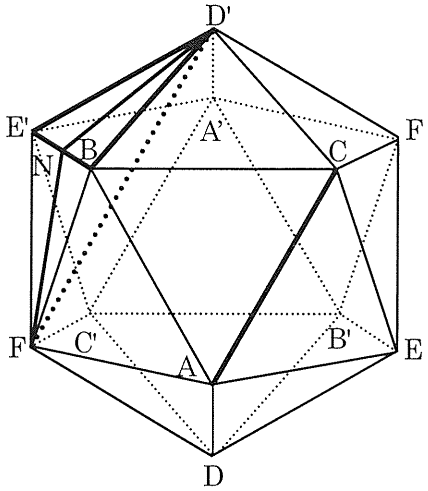


頂点が交点でない面と辺の作る角の別解）

面 BD'E'と辺 AC の作る$\angle u$

正5角形 ACD'E'F に注目して、AC//D'F'

よって、△BD'E'と D'F'の作る角を作図すれは良い。



辺 BE'の中点を N とすると、△ND'F'は作図でき、

$\angle$ND'F=$\angle u$

【参考】

$$\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos y=-\frac{1}{3},\ \cos z=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

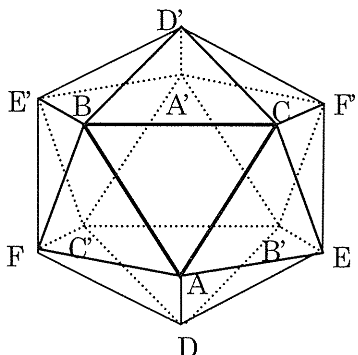
$$\cos w=\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ \cos u=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

【発展】

2012 年本校高校入試問題

(1) 1辺の長さが2㎝である正5角形の対角線の長さを求めよ。

(2) 1辺の長さが2㎝の正20面体について、



(ア) 線分 AA'の長さをx㎝とするとき、x^2の値を求めよ。

(ィ) この正20面体を水平な平面上に、一つの面を下にしておいたときの高さをh㎝とする。

h^2の値を求めよ。

略解）

(1) $1+\sqrt{5}$

(2) （ア）$x^2=(1+\sqrt{5})^2+2^2=10+2\sqrt{5}$

（ィ） 平行な面△ADE,△A'D'E'の中心を P,P'とすると、PP'=hである。

$$h^2=x^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=10+2\sqrt{5}-\frac{16}{3}=\frac{14+6\sqrt{5}}{3}$$

【ベクトルへの応用】

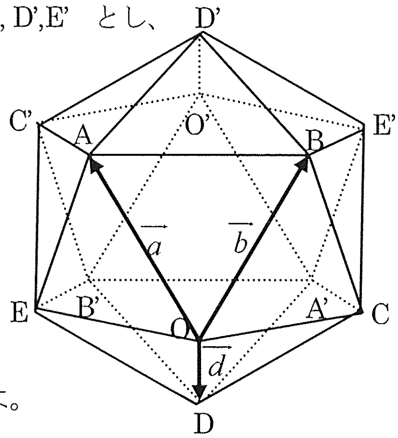
2011 年度　本校高校3年生実力試験問題

一辺の長さが1の正20面体の頂点を、図のように、

O,A,B,C,D,E,O',A',B',C', D',E'　とし、

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,

$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とする



次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{d}$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE'}$ を、それぞれ、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ で表せ。

(3) この正20面体を水平な平面上に、一つの面を下にしておいたときの、高さhを求めよ。

略解）(1) $\vec{a}\cdot\vec{d}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

(2) $\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\vec{d}-\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{OE'}=\vec{d}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{b}$

(3) O から平面 O'A'B'に引いた垂線を OP とすると、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$h=|\overrightarrow{OP}|=|\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{d}|=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

【補足】１．正多面体の種類について

正多面体とは、すべての面が合同な正多角形で、各頂点に集まる面の数が等しい凸多面体である。

正多面体がちょうど５種類であることについて、１つの頂点に注目して次の様に必要条件を求め、実際に模型を作ることでその十分性を確認する。

問. 正多面体にはどのようなものがあると考えられるか？　１つの頂点に集まる面の形や個数に注目して考察せよ。

解答例）

１つの頂点に集まる面の個数nは３以上で、集まる角aの和anは360°未満であることが必要。

1)面が正三角形の時、

$a=60^\circ$だから、$60n<360$　よって、$n=3,4,5$

2)面が正方形の時、

$a=90^\circ$だから、$90n<360$　よって、$n=3$

3)面が正５角形の時、

$a=108^\circ$だから、$108n<360$　よって、$n=3$

4)面が正m角形（$m \geqq 6$）のとき、

$a \geqq 120^\circ$であり、条件を満たすnはない。

したがって、正多面体が作れるとすれば、次の場合に限る。

①正三角形が各頂点に３枚ずつ集まっているもの。
②正三角形が各頂点に４枚ずつ集まっているもの。
③正三角形が各頂点に５枚ずつ集まっているもの。
④正方形が各頂点に３枚ずつ集まっているもの。
⑤正５角形が各頂点に３枚ずつ集まっているもの。

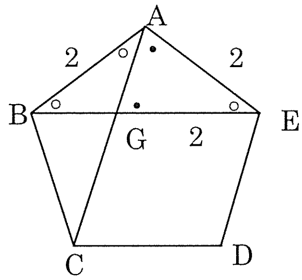
十分性については、『オイラーの多面体公式』を用いることも考えられるが、実際に作って確認させる。

工作用紙などで実際に作ってみると、順に、正４面体、正８面体、正20面体、正６面体（立方体）、正12面体ができることがわかる。

なお、正５角形の作図については、三平方の定理が既知ならば、拡大縮小した図形の辺の比について確認して、次の様に指導できる。

正５角形ABCDEの対角線AC, BEの交点をGとすると、△ABEと△GBAは形が同じ（3角がそれぞれ同じ）であるから、AB：BE=GB：BA　---①

AB=AE=２、BE＝xとすると、
△EAGは２等辺三角形であるから、
EG=EA=２、
GB=$x-2$



よって①より
２：x
＝$x-2$：２
$x(x-2)=2^2$

ここで、

$x-1=y$とすると、

$(y+1)(y-1)=2^2,\ \ y^2-1^2=2^2$

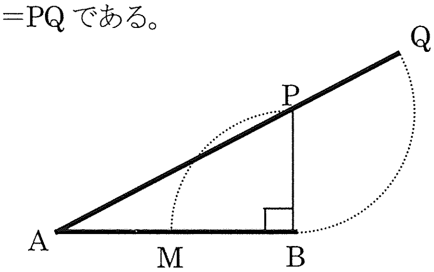
$y^2=2^2+1^2$

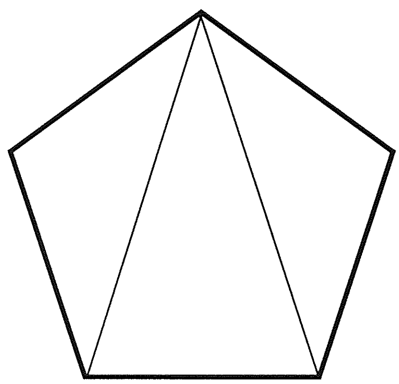
よって、三平方の定理より、

yは、直角を挟む２辺が２，１の直角三角形の斜辺の長さであり、対角線の長さはそれに１を加えたものである。

したがって、線分ABを一辺とする正５角形の対角線の長さは、下図のAQに等しい。

なお、図のMはABの中点で、BM⊥BP、
BM＝BP＝PQである。





【補足】２．空間図形の基本性質

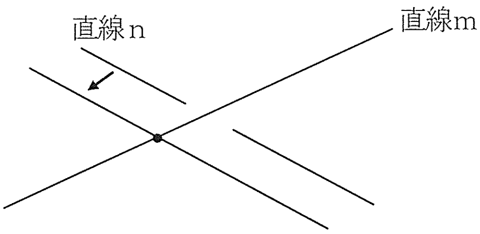
事前に指導しておくべき基本性質は以下の通り。

(1) 異なる２直線の位置関係

交わる or 平行 or ねじれの位置

交わる２直線及び平行な２直線は、それぞれ、同一平面上にある。

また、２直線m，nがねじれの位置にある場合、平行移動して交点を持つようにしたときに作る角を、もとの２直線の作る角という。

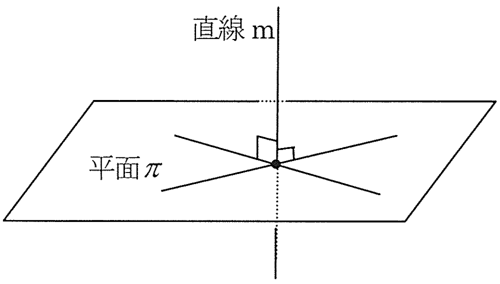


(2) 直線と平面の位置関係

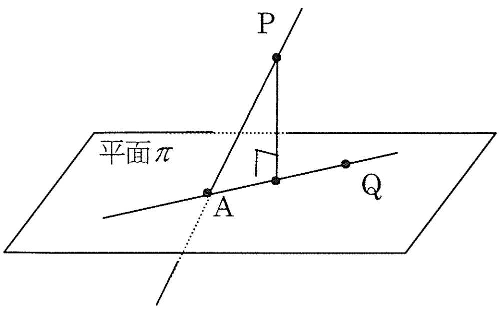
一点で交わる or 平行

or 同一平面上（直線が平面上にある）

平面πと直線mが一点で交わる場合で、直線mが平面π上の２本の直線と垂直であるとき、直線mは平面π上の全ての直線と垂直となる。このようなとき、平面πと直線mは垂直であるという。



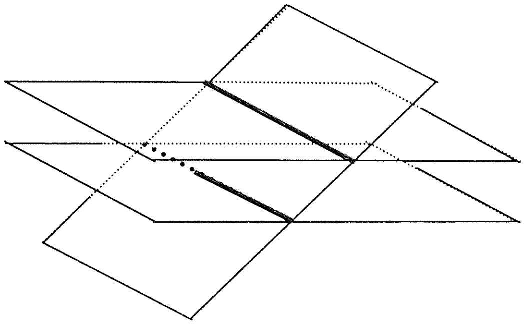
また、直線と平面の交点をＡとし、直線上に点Ｐ、平面上に点Ｑをとり∠ＰＡＱを考えると、∠ＰＡＱが最小になるのは、図のように、Ｐから平面πに引いた垂線が直線ＱＡと交わるときである。このときの∠ＰＡＱを平面と直線の作る角という。



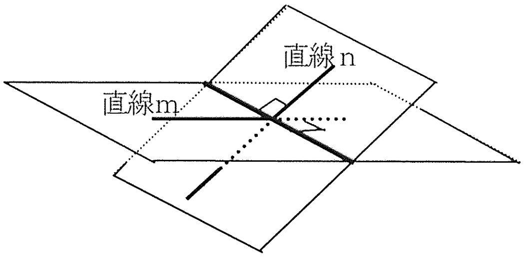
(3) 異なる２平面の位置関係

平行 or 交わる

平行な２平面にもう１つの平面が交わってできる２本の交線は、平行である。



交わる２平面は交線を軸として回転すると重なる。それぞれの平面上にある直線で、交線に垂直なものが作る角を、２平面の作る角という。（２通りできるが、通常は 90° 以下の方をいう。）



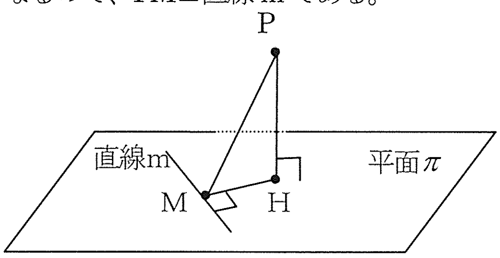
(4) 平面の決定条件

次の点及び直線で、それぞれ一つの平面が決まる。

- **一直線上にない３点**
- **１つの直線とその直線上にない１点**
- **交わる２直線**
- **平行な２直線**

(5) 三垂線の定理

平面π上に直線 m、平面π上にない点Ｐがある。Ｐから平面πに引いた垂線を PH、H から直線 m に引いた垂線を HM とすると、面 PHM は直線 m に垂直となるので、PM⊥直線 m である。



(2012　鈴木)