

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月15日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540202

研究課題名（和文） 非線形双曲型システムのライフスパンの解析

研究課題名（英文） On the study of the lifespan for nonlinear hyperbolic systems

研究代表者

木下 保（KINOSHITA TAMOTU）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：90301077

研究成果の概要（和文）：

時間変数に依存した係数をもつ双曲型方程式およびシステムに対して、初期値問題の well-posedness と ill-posedness に関する結果を得るのに成功した。well-posedness はライフスパンが無限に伸びることを意味し、ill-posedness はライフスパンが有限で解が爆発 (blow-up) することを意味する。また特に、解の具体的な表示公式(ライフスパンの値を直ちに与えることが可能)や、近似解の構成法（ライフスパンのオーダーの予想に役立つことが可能）を得ることに成功した。

研究成果の概要（英文）：

We have succeeded to obtain the results concerned with well-posedness and ill-posedness of the Cauchy problem for hyperbolic equations and systems with coefficients depending on the time variable. The well-posedness means that the life span tends to infinity, and the ill-posedness means that the solution blows up in a finite life span. In particular, we have also succeeded to get a representation formula of the solution (which possibly shows the exact value of the life span) and a construction of the approximate solution (which can be expected to give the order of the life span).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総 計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論、双曲型システム、ライフスパン

1. 研究開始当初の背景

一般に偏微分方程式に対する初期値問題

が解けるかどうかは、初期値の滑らかさや大きさに決まる。そして、実際にどのよ

うな初期値を与えればよいかを定めるには、その偏微分方程式の特性根の挙動を詳しく調べる必要がある。特性根は偏微分方程式のタイプを分類し、特性根が実数値であるときの偏微分方程式を双曲型と呼ぶ。最も有名な双曲型のタイプである波動方程式の場合、特性根は時間変数に依存せず常に一定であり、その線形問題および非線形問題は国内外を問わず広く研究が行われている。

一方近年になって、特性根が時間変数に依存する場合も、研究が目覚しく発展してきている（特に、2階の単独の方程式に対する線形問題が多い）。システムに対する線形問題から非線形問題への応用は未だ十分に進んでいない現状にある。

2. 研究の目的

本研究は、変数係数をもつシステムに対する線形問題の結果のさらなる発展と同時に、非線形問題への応用である。より具体的には、双曲型システムに対して次の観点から解のライフスパンや爆発 (blow-up) のオーダーとの関連を見いだすことが目的である。

(1) サイズ: 単独の方程式の場合の階数に相当するが、波動方程式 (2階の単独の方程式) とプレート方程式 (4階の単独の方程式) はいずれも、波やプレートの振動といった物理現象を記述する方程式として有名である。

(2) ランク: 特性根の重複度がわかり、双曲型のタイプもさらに細分化される。特に特性根が重複しないときを狭義双曲型と呼び、特性根が2重3重と重複するときも含めて全体を弱双曲型と呼ぶ。

(3) 非線形項の形: 定数係数の場合の既存の結果から、変数係数の場合も主部から制限される非線形項の形の特徴的な形をしていると考えられる。

3. 研究の方法

物理現象の忠実なモデルは非線形問題であり、それを近似するのが線形問題である。したがって、まずは線形問題に取り組み、できるだけ精度の高い結果を得てから、次に非線形問題へ応用し、解のライフスパンの増大度等を明らかにしたい。

また、数値解析的なシミュレーションを通して、ライフスパンの研究を進める。そこではウェーブレットの理論を用いて、より精度の高い近似解を構成する手法も発展させる。そして、ライフスパンのオーダーの予測に役立てる方針である。

4. 研究成果

次のような研究成果を得ることができた。

(1) 変数係数の双曲型 2×2 システムに対して、特性根の挙動と well-posedness と ill-posedness に関する結果を得るのに成功した。well-posedness はライフスパンが無限に伸びることを意味し、ill-posedness はライフスパンが有限で解が爆発 (blow-up) することを意味する。

(2) 2階の単独方程式に対して、係数の滑らかさと ill-posedness に関する興味深い反例を構成することができた。これによりシステムの場合にも同等の結果が得られるのではないかと大いに期待できる。しかも、ここでは線形の方程式に対する爆発解を構成したので、これをもとに非線形の方程式に対しても係数の相乗効果で解のライフスパンがさらに強く爆発するような例も構成できると思われる。解の爆発を与えるような係数の特徴を十分とらえることが出来たので、ウェーブレット変換を利用してそのような係数を検知する手法の開発にも取り組んだ。

(3) ライフスパンの研究において、解の表示を行なうことは非常に意義がある。具体的な表示ができた場合は、直ちにライフスパンの値を求めることも可能となり、かなりの威力を発揮する。A. Galstian 氏と K. Yagdjian 氏と、ある種の変数係数の2階の方程式に対する解の具体的な表示に成功した。この結果は物理学の発展にも大きく貢献し、公表した論文雑誌からは、ダウンロードされた回数が非常多いという高い評価も受けている。

(4) 高階の方程式を含むシステムの場合、解の具体的な表示が不可能である。それ故、数値解析的に近似解が求まるような構成法を見いだすことは大変に意義があると考えられる。N. Fukuda 氏と T. Kubo 氏と、スプライン関数以外の基底で、偏微分方程式への応用に優れた基底を導出することができた。特に、高階の微分方程式の離散化に成功し、4階のプレート方程式の近似解に関するシミュレーションを行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計5件)

1. N. Fukuda and T. Kinoshita,

On the construction of new families of wavelets,

査読有り Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, vol 29 (2012), 63-82.

DOI:10.1007/s13160-011-0050-0

2. T. Kinoshita and G. Taglialatela,
Time regularity of the solutions to 2nd order hyperbolic equations,

査読有り Arkiv for Matematik, vol 49 (2011), 109-127.

DOI:10.1007/s11512-009-0120-6

3. T. Kinoshita,
Generalized Duhamel's principle for some semi-linear hyperbolic type of equations.
査読有り, Nonlinear Functional Analysis and Application, vol 15 (2010), 355-370.
<http://nfaa.kyungnam.ac.kr/jour-nfaa.html>

4. T. Kinoshita and M. Reissig,
The Log-effect for 2 by 2 hyperbolic systems,

査読有り Journal of Differential Equations, vol 248 (2010), 470-500.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609003878>

5. A. Galstian, T. Kinoshita and K. Yagdjian,

A note on wave equation in Einstein & de Sitter spacetime.

査読有り

Journal of Mathematical Physics, vol 51 (2010), 052501.

DOI:10.1063/1.3387249

〔学会発表〕(計5件)

1. 木下保 On the Galerkin finite element method with Riesz bases.

仙台偏微分方程式研究会2011年10月8日

東北大学

2. 木下保 On new families of wavelets interpolating to the Shannon wavelet.

2010年10月22日RIMS共同研究「ウェーブレットの発展と理工学的应用」

京都大学

3. 木下保 Time regularity of the solutions to second order hyperbolic equations.

微分方程式セミナー2009年11月27日

大阪大学

4. 木下保 A note on wave equation in Einstein & de Sitter spacetime.

偏微分方程式研究会2009年10月20日

関西学院大学

5. 木下保 A note on wave equation in Einstein & de Sitter spacetimes.

八王子偏微分方程式研究会2009年10月10日

八王子セミナーハウス

〔図書〕(計1件)

磯崎 洋, 筧 知之, 木下 保, 籠屋 恵嗣, 砂川 秀明, 竹山美宏,
微積分学入門—例題を通して学ぶ解析学,
培風館, (2008), 1-211 ページ

6. 研究組織
(1) 研究代表者

木下 保 (KINOSHITA TAMOTU)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号: 90301077

(2) 研究分担者

梶谷 邦彦 (KAJITANI KUNIHICO)
筑波大学・名誉教授
研究者番号：00026262

石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：70375393

(3) 連携研究者

廣澤 史彦 (HIROSAWA FUMIHIKO)
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：50364732