

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540155

研究課題名（和文）双曲型方程式の超局所構造の解析とコーシー問題が適切となる双曲型方程式の特徴付け

研究課題名（英文）Analysis of microlocal structure of hyperbolic equations and characterization of hyperbolic equations for which the Cauchy problem is well-posed

研究代表者

若林 誠一郎（WAKABAYASHI SEIICHIRO）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：10015894

研究成果の概要（和文）：

主要部の係数が時間変数にのみ依存する2階双曲型作用素に対するコーシー問題について考察した。主要部の係数が時間変数の実解析関数である場合に、 $C^\infty$ 適切性のための十分条件を得た。また、この十分条件が、空間次元が2以下のとき、または主要部の係数が時間変数の半代数関数（例えば多項式）のとき、必要条件でもあることを示した。さらに、この十分条件の下で、コーシー問題の解の特異性が2重特性点で零特性帯を分岐させたものに沿って伝播することを示した。

研究成果の概要（英文）：

I considered the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable. In the case where the coefficients are real analytic functions of the time variable, I obtained a sufficient condition for  $C^\infty$  well-posedness. And I showed that this sufficient condition is also a necessary one when the space dimension is less than 3 or the coefficients of the principal part are semi-algebraic functions (e.g., polynomials) of the time variable. Moreover, under this sufficient condition I proved that the singularities of solutions to the Cauchy problem propagate along broken null bicharacteristics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	0	0	0
年度			
総 計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：双曲型作用素、コーシー問題、 $C^\infty$ 適切性、2階双曲型方程式

## 1. 研究開始当初の背景

双曲型方程式に対するコーシー問題が $C^\infty$ 適切になるためには、一般に低階項 (の表象) に条件を課す必要があり、これに関しては多くの先行研究があった。単独高階双曲型方程式に限って記せば、まず ペトロフスキーの狭義双曲型方程式の $C^\infty$ 適切性 ( $L^2$ 適切性) についての研究やゴールドディングによる定数係数双曲型方程式の $C^\infty$ 適切性の特徴付けの研究が挙げられる。1970年代以降、変係数の弱双曲型方程式に対する $C^\infty$ 適切性の研究が活発に続けられてきて、特性根の重複度が一定な双曲型作用素に対する低階項の満たすべき条件 (大矢・溝畑・シャザラン・フラシュカーストラングの各氏による) や強双曲型作用素 (どんな低階に対しても $C^\infty$ 適切になる双曲型作用素) の特徴付け (イブリー・ペトコフ・岩崎・西谷の各氏による) 等の結果が得られている。さらに主要部が定数係数である場合の $C^\infty$ 適切性の特徴付け (若林による) や、2階2変数で係数が解析的である双曲型作用素に対する $C^\infty$ 適切性の特徴付け (西谷氏による) が得られている。最近、特性根の重複度が一定である場合や主要部が定数係数である場合を含むより広いクラスに対して、必要十分条件を得た。このように主要部に制限を置いて、 $C^\infty$ 適切性の必要十分条件を与えるいくつかの結果が知られているのみであった。係数が時間変数にのみ依存する双曲型方程式に対してすら、意味のある $C^\infty$ 適切性の必要十分条件は知られていなかった。このように基本的な場合に対しても、満足すべき結果が得られていない状況であった。

## 2. 研究の目的

(1) 係数が時間変数にのみ依存する2階双

曲型方程式に対するコーシー問題の $C^\infty$ 適切性の必要十分条件を得る。

(2) ついで、主要部の係数が時間変数のみに依存する2階双曲型方程式に対するコーシー問題の $C^\infty$ 適切性の必要十分条件を得る。

(3) これらの研究を通して、 $C^\infty$ 適切性の必要十分条件が得られるような双曲型方程式のクラスを広げていく。

(4) コーシー問題の解の性質 (特異性の伝播等) について考察する。

## 3. 研究の方法

(1) 係数が時間変数にのみ依存する2階双曲型方程式に対して

① 係数が解析的で空間次元2次元、または

② 係数が半代数関数

を仮定して、 $C^\infty$ 適切性の必要十分条件を与える。十分性については、重み関数を導入してエネルギー不等式を導く。必要性については、条件を満たさないとき、エネルギー不等式を満たさない漸近解を構成して、イブリー・ペトコフの方法を適用する。

(2) ついでこの結果を、主要部のみが時間変数に依存し、低階は空間変数にも依存する2階双曲型方程式に一般化する。重み関数の選択が(1)に比して難しくなる。

(3) さらに、一般の変数係数2階双曲型方程式に対して、従来より弱い仮定 (十分条件) の下でコーシー問題の $C^\infty$ 適切性を証明する。

(4) 以上の研究を通して、コーシー問題の $C^\infty$ 適切性の必要十分条件の研究につなげる。

(5) 研究集会・セミナー等での発表・議論を通して国内外の研究者との研究交流を図り本研究を発展させる。

## 4. 研究成果

(1) 係数が時間変数にのみ依存する2階双曲型作用素を考察して、主要部の係数が実解析的であると仮定して、時間関数の考え方をういて重み関数を構成し、それをういてエネルギー不等式を導くことにより、そのコーシー問題が $C^\infty$ 適切になるための十分条件を得た。さらに、係数が時間変数の半代数関数 (例えば多項式) のとき、タルスキー・ザイデンベルグの定理を適用してピュイゼー級数の形で漸近解を構成することにより、その条件が必要条件であることも示した。

(2) 主要部の係数が時間変数にのみ依存する2階双曲型作用素を考察して、主要部の係数が実解析的であると仮定して、(1)とは異なる重み関数を導入する必要があったが、エネルギー不等式を導くことにより、そのコーシー問題が $C^\infty$ 適切になるための十分条件

を得た。結果としては、(1)の場合と同じ条件であった。

(3) 主要部の係数が実解析的で空間次元が2の場合に(時間・空間あわせて3次元)、そのコーシー問題が $C^\infty$ 適切になるための必要十分条件を得た。また、主要部の係数が時間変数の半代数関数(例えば多項式)であるときにも、そのコーシー問題が $C^\infty$ 適切になるための必要十分条件を得た。(1)とは異なり、低階が空間変数・時間変数について単に $C^\infty$ であるとのみ仮定して、(1)の方法を改良することにより、十分条件が必要条件であることを示した。

(4) 空間次元が3以上で主要部の係数が半代数関数でないとき、不十分ではあるが、滑らかな固有ベクトルを用いて2次形式が表現できることに注意して、そのコーシー問題が $C^\infty$ 適切になるためのいくつかの必要条件を得た。

(5) (3)、(4)の結果を2重特性的な高階双曲型方程式に拡張することを考えて、いくつかの基本的な結果を得た。但し、結果をきれいな形で与えることは今後の課題である。この部分の考察を進めることにより、主要部の係数が時間変数のみに依存する高階双曲型方程式に対するコーシー問題が $C^\infty$ 適切性になるための必要十分条件を得るためのヒントが得られるものと期待している。

(6) (2)の問題に対して解の特異性の伝播について考察し、以前に私が一般の双曲型方程式に対して予想を与えたように(実解析関数の空間及び指数2未満のジュブレー族では証明を与えている)、特異性が一般化されたハミルトン流に沿って伝播することを示した。さらに、この場合は一般化されたハミルトン流が、2重特異点で零特性帯を分岐させたものに一致することを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 若林誠一郎、On the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, Funkcialaj Ekvacioj, vol. 55 no. 1, 99-136, 2012年. 査読有り
- ② 若林誠一郎、On the Cauchy problem for hyperbolic operators of second order whose coefficients depends only on the time variable, J. Math. Soc. Japan, vol. 62 no. 1, 95-133, 2010年. 査読有り,  
DOI:10.2969/jmsj/06210095

- ③ 若林誠一郎、On the Cauchy problem for hyperbolic operators with nearly constant coefficient principal part, Funkcialaj Ekvacioj, vol. 51 no. 3, 395-430, 2008年. 査読有り

[学会発表] (計6件)

- ① 若林誠一郎、Singularities of solutions to the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, 第26回松山キャンプ, 2011年1月8日, 龍谷大学セミナーハウス「ともいき荘」(京都)
- ② 若林誠一郎、On the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, 第8回 AIMS, 2010年5月27日, Dresden University of Technology (Germany)
- ③ 若林誠一郎、On the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, 名古屋微分方程式研究集会, 2010年3月16日, 名古屋大学理学研究科
- ④ 若林誠一郎、On the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, 研究集会「Linear and nonlinear waves」, 2009年11月4日, ピアザ淡海(大津)
- ⑤ 若林誠一郎、On the Cauchy problem for hyperbolic operators of second order whose coefficients depend only on the time variable, 京都大学数理解析研究所研究集会「超局所解析とその周辺」, 2009年10月19日, 関西学院大学梅田キ

キャンプ

- ⑥ 若林誠一郎、On second order hyperbolic operators of three independent variables whose coefficients depend only on the time variable, 第24回松山キャンプ, 2009年3月15日, 山口大学

〔その他〕

ホームページ

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~wkbysh/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

若林 誠一郎 (WAKABAYASHI SEIICHIRO)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：10015894