Tsukuba Psychological Research
2004, **27**, 7-19

ブートストラップ法を用いたFABIN推定値の標準誤差の推定

筑波大学心理学系　服部　環

Bootstrap standard error estimates for FABIN

Tamaki Hattori (*Institute of Psychology, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8572, Japan*)

Standard errors for parameter estimates are used to evaluate the precision of the parameter estimates in empirical studies. The bootstrap technique can often provide a convenient means of estimating standard errors when there is either no algebraic solution for obtaining standard errors, or the requisite distributional assumptions are untenable and, accordingly, would yield distorted results. The purpose of the present study is to propose an application of the bootstrap technique to estimate standard errors for FABIN parameter estimators, and evaluate the accuracy of bootstrap estimates, especially when the observed variables are not normally distributed. The results of Monte Carlo simulation studies show that when observed variables are not normally distributed, inferences based on bootstrap standard error estimates are more accurate than inferences based on algebraically obtained asymptotic estimates. Furthermore, bootstrap standard error estimates are extremely precise, when an algebraic solution of standard errors is unobtainable.

Key words: FABIN, bootstrap standard errors, Monte Carlo simulation

1　はじめに

FABIN (Factor Analysis By INstrumental variables) とは Hägglund (1980, 1981, 1982) によって提案された因子分析法である．最尤法や一般化最小自乗法は因子パターン，独自分散，因子間共分散などの推定に反復計算を必要とするが，FABINはそのような反復計算を必要としない，いわゆる非反復推定法の1つである（非反復推定法に関する研究として，この他にも Cudeck (1991), Jennrich (1987), Kano (1990), Toyoda (1997) などがある）．

現在，FABINは簡易推定法としての位置にあり，最尤法や一般化最小自乗法を用いた確認的因子分析を実行する際の初期値を与える方法の1つとして利用されている (Jöreskog & Sörbom, 1996)．しかし，FABINには計算量が少ないという利点に加え，標本サイズが小さいときにも不適解が生じにくいという特徴がある．しかも，Hägglund (1983) のシミュレーション実験によれば，標本サイズが小さくても（例えば，N=200以下），FABIN推定値のバイアスは最尤法や最小自乗法よりも小さく，標本サイズが比較的大きい場合でも（例えば，N=200～400），バイアスの大きさは最尤法と最小自乗法とほぼ同様であった．

一方，FABINにはこのような利点がある反面，独自分散と因子間共分散の標準誤差を推定できないという問題がある．そこで，本稿はブートストラップ法をFABINに適用して独自分散と因子間共分散の標準誤差および信頼区間を推定し，その推定精度を評価する．また，FABINは因子パターンの標準誤差を推定できるので，標準誤差のFABIN推定値の精度とブートストラップ標準誤差の精度を比較する．

2 方法

FABIN（FABIN2とFABIN3）による因子パターン，独自性，因子間共分散，因子パターンの標準誤差の推定方法は付録に示した通りである．ここでは，本稿で適用したブートストラップを説明する．

2．1 ブートストラップ法

本稿で用いたブートストラップ法の手順（Efron & Tibshirani, 1993; Mooney & Duval, 1993）を以下に示す．

(1) バイアスの推定

(i) 大きさNの標本$U=(u_1, u_2, \cdots, u_N)$があるとする．そして，この標本$U$に基づくモデル母数（因子パターン，独自分散，因子の分散共分散）の推定値を$\hat{\theta}$とする．

(ii) 標本Uから重複を許して大きさNのブートストラップ標本$U_b^*=(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*)$を無作為抽出する．

(iii) ブートストラップ標本U_b^*を用いてモデル母数（因子パターン，独自分散，因子の分散共分散）を推定する．その推定値を$\hat{\theta}_b^*$とする．

(iv) 上記の（ii）と（iii）をB回繰り返す．本稿では$B=1{,}000$とした．

(v) 以上のステップで得られたB個のブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$を用いて，ブートストラップバイアス推定値は

$$\mathrm{Bias}=\hat{\theta}_{\cdot}^{*}-\hat{\theta} \tag{1}$$

と定義される．ここで，

$$\bar{\hat{\theta}}_{\cdot}^{*}=\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\hat{\theta}_b^{*} \tag{2}$$

である．

(2) 標準誤差の推定

バイアスを推定するための手順（ii）～（iv）と同様の手順を踏み，B個のブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$を求める．そして，その標準偏差を母数の標準誤差の推定値$\mathrm{SE}(\hat{\theta})$とする．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathrm{SE}(\hat{\theta})&=\sqrt{S^2(\hat{\theta}^{*})}\\&=\sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\theta}_b^{*}-\bar{\hat{\theta}}_{\cdot}^{*}\right)^2}\end{aligned} \tag{3}$$

である．

(3) 信頼区間の推定

本稿はパーセンタイル法を用いた．その手順は以下の通りである．

(i) 標準誤差を推定する手順の（i）～（v）を実行し，B個のブートストラップ推定値$\hat{\theta}_b^*$を求める．

(ii) 信頼度の大きさを$100(1-\alpha)\%$とすると，信頼区間はB個のブートストラップ推定値のうち，$100(1-\alpha)B$個の推定値が入る区間である．したがって，$100\alpha/2$パーセンタイルのブートストラップ推定値を信頼区間の下限値，$100(1-\alpha/2)$パーセンタイルのブートストラップ推定値を上限値とする．

なお，信頼区間に関する実験結果については紙数を節約するために本稿では報告しないが，一部は服部（2001）において発表されている．

2．2 モデルの真値と標本データの生成

(1) 因子分析モデルと母数の真値

以下の3つのモデルを仮定した．

(i) 6変数1因子モデル

(ii) 12変数2因子モデル

(iii) 18変数3因子モデル

ここで，（ii）と（iii）の多因子モデルは各因子に負荷する観測変数の数を6とした．母数の真値は1因子モデルでは因子パターンと独自分散を全て1，因子分散を2とした．また，2因子モデルと3因子モデルではTable 1とTable 2の通りとした．

(2) 標本の大きさ

$N=100$，300，500の3通りとした．

(3) 標本データの生成

以下の手順に従い観測変数を生成した．

(i) モデル母数（因子パターン，独自分散，因子間共分散）の真値θを用いて母集団の分散共分散行列$\Sigma(\theta)(p\times p)$を再生し，次式のようにLU分解する．

$$\Sigma(\theta)=\Sigma_L\,\Sigma_U \tag{4}$$

(ii) 後述の乱数を入れた行列を$\boldsymbol{D}(N\times p)$とし，次式を用いて標本データ行列$\boldsymbol{X}(N\times p)$を生成する．

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\Sigma_U \tag{5}$$

(iii) $\boldsymbol{X}$を標本の観測値とみなし，観測変数の分散共

Table 1　2因子モデルの真値

項目 (i)	因子パターン (λ_{i1})	(λ_{i2})	独自分散 (ψ_i^2)
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	0	1	1
5	1	0	1
6	1	0	1
7	1	0	1
8	1	0	1
9	0	1	1
10	0	1	1
11	0	1	1
12	0	1	1
因子間共分散	2.0		
	0.6	2.0	

Table 2　3因子モデルの真値

項目 (i)	因子パターン (λ_{i1})	(λ_{i2})	(λ_{i3})	独自分散 (ψ_i^2)
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	1
4	1	0	0	1
5	0	1	0	1
6	0	0	1	1
7	1	0	0	1
8	1	0	0	1
9	1	0	0	1
10	1	0	0	1
11	0	1	0	1
12	0	1	0	1
13	0	1	0	1
14	0	1	0	1
15	0	0	1	1
16	0	0	1	1
17	0	0	1	1
18	0	0	1	1
因子間共分散	2.0			
	0.6	2.0		
	0.6	0.6	2.0	

分散行列Sを計算する．

(4) 行列Dに代入した乱数

以下に示す3通りの乱数を用いた．(i) は正規分布に従う観測変数，(ii) と (iii) は正規分布から逸脱した分布に従う観測変数を生成するねらいがある．

(i) 標準正規乱数
(ii) 自由度3のχ^2分布に従う乱数
(iii) 自由度1のχ^2分布に従う乱数

2.3　シミュレーション実験

上記の因子分析モデル，標本の大きさ，乱数の発生条件により27通りの標本データ生成条件が設定された．各条件についてブートストラップ標本の大きさを$B=1,000$とした上で，1,000回の繰り返し実験 ($R=1,000$) を行った．

(1) 推定値の理論値

27通りの標本データ生成条件ごとに指定の標本の大きさでモデル母数を推定する，というモンテカルロ実験を500,000回実行し，FABIN推定値のバイアス，標準誤差，信頼区間を求めた．これを理論値としてブートストラップ推定値の精度を評価する．

(2) 観測変数の分布

因子分析モデルと乱数発生条件の9通りの組み合わせについて，大きさ$N=2\times10^8$のデータを生成して観測変数の分布形を調べた．

(3) 不適解

独自分散の推定値が負値，あるいは因子分散共分散の推定値行列が負値行列となったとき，解は不適解である．バイアスと標準誤差の理論値を求めるために行ったモンテカルロ実験では，FABIN2あるいはFABIN3において不適解が得られたとき，そのデータを捨てて改めて観測データを生成した．また，ブートストラップ推定値を求めた実験でも不適解が得られた標本を捨てた．さらに，ブートストラップ標本で不適解が生じた場合は，改めてブートストラップ標本を抽出した．

3　結果と考察

3.1　観測変数の分布

Mardia (1970) の$g_{2,p}$係数とκ_1係数，観測変数の平均歪度と平均尖度をTable 3に示す．$g_{2,p}$係数とκ_1係数の計算には次式を用いた．

$$g_{2,p} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \bar{x}\right)'S^{-1}\left(x_i - \bar{x}\right)\right]^2 - p(p+2) \tag{6}$$

$$\kappa_1 = \frac{g_{2,p}}{p(p+2)} \tag{7}$$

ここで，Nは標本の大きさ，pは観測変数の数，$\boldsymbol{S}$は標本の分散共分散行列，x_iは標本iの観測値ベクトル，$\bar{x}$は観測変数の平均値ベクトルである．

本稿は式（5）の行列$\boldsymbol{D}$に乱数を代入して観測変数を生成したため，直接的に観測変数の分布形を操作していない．しかし，Table 3に示した通り，χ^2乱数条件では正規分布から逸脱した観測変数を生成できた．特に自由度1のχ^2乱数を用いて生成した観測変数の分布形は正規分布から大きく逸脱している．一方，標準正規乱数を用いて生成した観測変数は正規分布に従っている．

3．2　不適解

バイアスおよび標準誤差の理論値を求めるために行ったモンテカルロ実験において，500,000個の解が得られるまでに発生した不適解の個数をTable 4に示す．

乱数の分布が正規分布から逸脱するにつれて，不適解の発生件数が増加する傾向にある．しかし，N＝300とN＝500条件の場合，不適解は1回の発生である．したがって，観測変数の分布形が大きく正規分布から逸脱しても，標本の大きさが300程度を越えた場合，不適解は発生しにくいと考えてもよいであろう．

また，N＝100の条件でも，［χ^2，df＝3］乱数条件では1,500,000個の解を得るまでに不適解は43回の発生に過ぎない．不適解の発生は［χ^2，df＝1］乱数条件のN＝100の場合に集中し，総計1,413回の不適解が発生した．これを率に直すと9.42×10^{-2}%程度であり，発生率は小さい．観測変数が分布が正規分布から逸脱しても，FABIN法は不適解が発生しにくいと言えよう．

3．3　バイアスの推定

500,000回のモンテカルロ実験によって求めたFABIN推定値の平均から真値を引いた値をバイアスの理論値とみなし，この理論値からブートストラップ法によって求めたバイアス推定値（繰り返し数R＝1,000）の平均を引いた値をバイアス推定値の精度とした．ここでは紙数を節約するために3因子モデルにおけるバイアス推定値の精度をTable 5に示し，考察する．

Table 3　観測変数の分布形

	乱数発生条件								
	[正規]			$[\chi^2, df=3]$			$[\chi^2, df=1]$		
統計量＊	6変数 1因子	12変数 2因子	18変数 3因子	6変数 1因子	12変数 2因子	18変数 3因子	6変数 1因子	12変数 2因子	18変数 3因子
$g_{2,p}$ 係数	0.00	0.00	0.01	24.03	48.07	72.10	72.10	144.15	216.26
κ_1 係数	0.00	0.00	0.00	0.50	0.29	0.20	1.50	0.86	0.60
平均歪度	0.00	0.00	0.00	1.13	1.10	1.07	1.95	1.90	1.86
平均尖度	0.00	0.00	0.00	2.04	1.96	1.90	6.12	5.88	5.69

サンプルサイズを2×10^8として計算した．

Table 4　不適解の発生回数

	データ生成条件 (乱数と標本の大きさ)								
	[正規]			$[\chi^2, df=3]$			$[\chi^2, df=1]$		
モデル	100	300	500	100	300	500	100	300	500
1因子モデル (6変数)	0	0	0	13	0	0	405	0	0
2因子モデル (12変数)	0	0	0	18	0	0	513	1	0
3因子モデル (18変数)	0	0	0	12	0	0	495	0	0

数値は500,000回のモンテカルロ実験が終了する前に発生した不適解の回数である．

(1) 因子パターン

N=300とN=500条件では，推定法によらずブートストラップバイアス推定値の誤差は小さい．最大の誤差でも，[χ^2, $df=1$] 乱数のN=100条件で見られたλ_{41}の0.0020である．

一方，N＝100条件の場合はλ_{41}の誤差が他の因子パターンの誤差と比べてやや大きい．最大の誤差はFABIN2の場合，[χ^2, $df=1$] 乱数条件で0.0174，また，FABIN3の場合，正規乱数条件で−0.0142である．このように観測変数1の誤差がやや大きいが，全体的に因子パターンのバイアス推定値の誤差は小さい．

(2) 独自分散

FABIN2のブートストラップバイアス推定値の絶対値誤差は，すべての条件において0.01未満であり，推定精度は高いといえよう．一方，FABIN3の場合，参照変数の誤差が観測変数の分布が正規分布から逸脱するにつれて大きくなっている．しかも，ブートストラップバイアス推定値は一貫して過小推定されている．N=300とN=500条件の場合は誤差も比較的小さいが，N=100条件の場合は参照変数に絶対値で0.03～0.09程度の誤差がある．観測変数の分布が正規分布から外れたとき，参照変数の誤差が大きいのは2因子モデルも同様である．FABIN3を適用する場合は，観測変数の分布形に留意すべきであろう．

(3) 因子の分散共分散

分散の誤差が共分散の誤差よりも一貫して大きい

Table 5　3因子モデルにおけるバイアス推定値の精度

推定方法 [乱数]	母数	標本の大きさ (N) 100	300	500	推定方法 [乱数]	母数	標本の大きさ (N) 100	300	500
FABIN2	$\lambda_{41}(1)$	0.0012	0.0000	0.0001	FABIN3	$\lambda_{41}(1)$	−0.0078	−0.0008	−0.0002
[正規]	$\lambda_{42}(1)$	−0.0002	0.0001	−0.0001	[$\chi^2, df=3$]	$\lambda_{42}(1)$	0.0031	0.0002	0.0001
	$\lambda_{43}(1)$	−0.0003	0.0000	0.0001		$\lambda_{43}(1)$	0.0039	0.0006	0.0000
	$\psi_{11}(1)$	0.0065	0.0026	0.0019		$\psi_{11}(1)$	−0.0595	−0.0058	−0.0015
	$\psi_{22}(1)$	0.0054	0.0030	0.0017		$\psi_{22}(1)$	−0.0569	−0.0058	−0.0014
	$\psi_{33}(1)$	0.0057	0.0029	0.0018		$\psi_{33}(1)$	−0.0569	−0.0057	−0.0012
	$\psi_{44}(1)$	0.0079	0.0032	0.0018		$\psi_{44}(1)$	0.0047	0.0028	0.0016
	$\phi_{11}(2)$	0.0245	0.0069	0.0043		$\phi_{11}(2)$	0.0886	0.0157	0.0074
	$\phi_{21}(0.6)$	0.0058	0.0019	0.0010		$\phi_{21}(0.6)$	0.0038	0.0020	0.0008
	$\phi_{22}(2)$	0.0236	0.0072	0.0042		$\phi_{22}(2)$	0.0873	0.0165	0.0068
FABIN3	$\lambda_{41}(1)$	−0.0142	−0.0016	−0.0005	FABIN2	$\lambda_{41}(1)$	0.0174	0.0020	0.0012
[正規]	$\lambda_{42}(1)$	0.0048	0.0004	0.0001	[$\chi^2, df=1$]	$\lambda_{42}(1)$	−0.0025	−0.0001	−0.0002
	$\lambda_{43}(1)$	0.0048	0.0008	0.0002		$\lambda_{43}(1)$	−0.0038	−0.0005	−0.0002
	$\psi_{11}(1)$	−0.0391	−0.0027	0.0001		$\psi_{11}(1)$	−0.0074	0.0005	0.0007
	$\psi_{22}(1)$	−0.0415	−0.0024	−0.0002		$\psi_{22}(1)$	−0.0092	0.0004	0.0008
	$\psi_{33}(1)$	−0.0394	−0.0025	−0.0003		$\psi_{33}(1)$	−0.0086	0.0007	0.0012
	$\psi_{44}(1)$	0.0138	0.0036	0.0019		$\psi_{44}(1)$	0.0095	0.0026	0.0018
	$\phi_{11}(2)$	0.0703	0.0122	0.0060		$\phi_{11}(2)$	0.0357	0.0086	0.0055
	$\phi_{21}(0.6)$	0.0041	0.0017	0.0010		$\phi_{21}(0.6)$	0.0029	0.0016	0.0014
	$\phi_{22}(2)$	0.0704	0.0126	0.0062		$\phi_{22}(2)$	0.0382	0.0101	0.0044
FABIN2	$\lambda_{41}(1)$	0.0069	0.0007	0.0003	FABIN3	$\lambda_{41}(1)$	0.0052	0.0015	0.0011
[$\chi^2, df=3$]	$\lambda_{42}(1)$	−0.0017	−0.0003	−0.0002	[$\chi^2, df=1$]	$\lambda_{42}(1)$	0.0023	0.0002	0.0000
	$\lambda_{43}(1)$	−0.0009	−0.0001	−0.0001		$\lambda_{43}(1)$	0.0018	−0.0003	−0.0002
	$\psi_{11}(1)$	0.0011	0.0022	0.0016		$\psi_{11}(1)$	−0.0905	−0.0127	−0.0048
	$\psi_{22}(1)$	0.0015	0.0021	0.0017		$\psi_{22}(1)$	−0.0940	−0.0129	−0.0045
	$\psi_{33}(1)$	0.0017	0.0024	0.0018		$\psi_{33}(1)$	−0.0904	−0.0122	−0.0038
	$\psi_{44}(1)$	0.0077	0.0033	0.0020		$\psi_{44}(1)$	−0.0104	−0.0010	0.0005
	$\phi_{11}(2)$	0.0279	0.0077	0.0042		$\phi_{11}(2)$	0.1188	0.0217	0.0111
	$\phi_{21}(0.6)$	0.0053	0.0021	0.0010		$\phi_{21}(0.6)$	0.0027	0.0020	0.0014
	$\phi_{22}(2)$	0.0288	0.0087	0.0038		$\phi_{22}(2)$	0.1230	0.0234	0.0097

数値は，理論値 − ブートストラップ推定値の平均である．

こと，観測変数の分布形が正規分布から逸脱するにつれて大きくなること，FABIN2の方がFABIN3よりも誤差が小さいこと，観測変数の分布が正規分布から逸脱しても共分散のバイアスがほぼ正確に推定できることを指摘できる．この点は2因子モデルも同様である．また，FABIN3は$N=100$条件のとき，因子分散のブートストラップバイアスは過小推定される傾向が強い．

3．4　標準誤差の推定

500,000回のモンテカルロ実験によって求めたFABIN推定値の標準偏差を標準誤差の理論値とみなした．

そして，この理論値をブートストラップ法によって求めた標準誤差（繰り返し数=1,000）の平均値で割った値をTable 6に示した．ここでは，この値に基づいてブートストラップ法の推定精度を評価する．紙数を節約するために1因子モデルと2因子モデルの結果については省略する．

(1) 因子パターン

［χ^2, $df=1$］乱数を用いた$N=100$条件において，FABIN3に基づくλ_{41}の標準誤差の理論値とブートストラップ標準誤差の比が1.1840とやや大きいが，他の条件では相違は小さい．観測変数が正規分布から逸脱するにつれて標準誤差の推定精度は低下

Table 6　3因子モデルにおける標準誤差推定値の精度

推定方法 [乱数]	母数	標本の大きさ (N) 100	300	500	推定方法 [乱数]	母数	標本の大きさ (N) 100	300	500
FABIN2	$\lambda_{41}(1)$	0.9852	0.9883	0.9962	FABIN3	$\lambda_{41}(1)$	1.1140	1.0469	1.0342
[正規]	$\lambda_{42}(1)$	0.9916	0.9896	0.9923	[$\chi^2, df=3$]	$\lambda_{42}(1)$	1.0258	1.0030	0.9961
	$\lambda_{43}(1)$	0.9941	0.9853	0.9981		$\lambda_{43}(1)$	1.0222	1.0000	1.0019
	$\psi_{11}(1)$	1.0999	1.0329	1.0161		$\psi_{11}(1)$	1.1385	1.0758	1.0586
	$\psi_{22}(1)$	1.1072	1.0318	1.0188		$\psi_{22}(1)$	1.1293	1.0826	1.0509
	$\psi_{33}(1)$	1.0917	1.0383	1.0243		$\psi_{33}(1)$	1.1384	1.0845	1.0545
	$\psi_{44}(1)$	1.0510	1.0176	1.0133		$\psi_{44}(1)$	1.0336	1.0000	1.0078
	$\phi_{11}(2)$	1.0196	1.0137	1.0066		$\phi_{11}(2)$	1.0938	1.0327	1.0245
	$\phi_{21}(0.6)$	1.0164	1.0100	1.0061		$\phi_{21}(0.6)$	1.0358	1.0076	1.0199
	$\phi_{22}(2)$	1.0246	1.0107	1.0077		$\phi_{22}(2)$	1.0719	1.0254	1.0339
FABIN3	$\lambda_{41}(1)$	1.0119	1.0000	1.0020	FABIN2	$\lambda_{41}(1)$	1.0480	1.0352	1.0195
[正規]	$\lambda_{42}(1)$	1.0231	1.0015	1.0000	[$\chi^2, df=1$]	$\lambda_{42}(1)$	0.9385	0.9837	0.9874
	$\lambda_{43}(1)$	1.0317	0.9985	1.0039		$\lambda_{43}(1)$	0.9486	0.9904	0.9891
	$\psi_{11}(1)$	1.0536	1.0265	1.0175		$\psi_{11}(1)$	1.1964	1.0847	1.0654
	$\psi_{22}(1)$	1.0645	1.0275	1.0189		$\psi_{22}(1)$	1.2230	1.0865	1.0511
	$\psi_{33}(1)$	1.0473	1.0318	1.0216		$\psi_{33}(1)$	1.1940	1.0819	1.0460
	$\psi_{44}(1)$	0.9652	0.9776	0.9872		$\psi_{44}(1)$	1.1837	1.1008	1.0587
	$\phi_{11}(2)$	0.9938	1.0025	0.9989		$\phi_{11}(2)$	1.2058	1.0702	1.0721
	$\phi_{21}(0.6)$	0.9911	0.9994	1.0000		$\phi_{21}(0.6)$	1.1829	1.0495	1.0512
	$\phi_{22}(2)$	0.9993	0.9987	1.0005		$\phi_{22}(2)$	1.1629	1.0735	1.0533
FABIN2	$\lambda_{41}(1)$	1.0487	1.0091	1.0118	FABIN3	$\lambda_{41}(1)$	1.1840	1.0987	1.0584
[$\chi^2, df=3$]	$\lambda_{42}(1)$	0.9819	0.9870	0.9868	[$\chi^2, df=1$]	$\lambda_{42}(1)$	1.0114	1.0087	1.0037
	$\lambda_{43}(1)$	0.9804	0.9842	0.9925		$\lambda_{43}(1)$	1.0164	1.0175	1.0038
	$\psi_{11}(1)$	1.1529	1.0511	1.0381		$\psi_{11}(1)$	1.2473	1.1388	1.1045
	$\psi_{22}(1)$	1.1413	1.0566	1.0285		$\psi_{22}(1)$	1.2630	1.1385	1.0960
	$\psi_{33}(1)$	1.1472	1.0622	1.0320		$\psi_{33}(1)$	1.2407	1.1338	1.0878
	$\psi_{44}(1)$	1.1403	1.0310	1.0258		$\psi_{44}(1)$	1.0445	1.0650	1.0412
	$\phi_{11}(2)$	1.1180	1.0419	1.0294		$\phi_{11}(2)$	1.1805	1.0623	1.0666
	$\phi_{21}(0.6)$	1.0592	1.0154	1.0258		$\phi_{21}(0.6)$	1.1585	1.0416	1.0470
	$\phi_{22}(2)$	1.0966	1.0345	1.0391		$\phi_{22}(2)$	1.1396	1.0648	1.0481

数値は，理論値 / ブートストラップ推定値の平均である．

する傾向にあるものの，ブートストラップ推定値は全般的に高い精度を示している．

(2) 独自分散

観測変数が正規分布から逸脱するにつれて推定精度は落ちる傾向にあり，参照変数については，FABIN2とFABIN3では様相が異なる．FABIN2の場合，観測変数が正規分布から逸脱しても，参照変数と非参照変数の標準誤差の推定精度はほぼ等しい．また，FABIN3の場合，観測変数の分布が正規分布から逸脱するにつれて参照変数の標準誤差は過小推定される傾向が強くなり，一方，非参照変数の標準誤差は比較的良い精度を保つ．

(3) 因子の分散共分散

全般的にブートストラップ標準誤差は過小推定される傾向にあるが，正規乱数条件では標本の大きさに関係なく推定精度は高い．一方，観測変数が正規分布から逸脱するにつれて，ブートストラップ推定値の精度は低下する．例えば，[χ^2, $df=1$] 乱数を用いた$N=100$条件では，理論値とブートストラップ標準誤差の比が1.15前後となっている．標本が小さくて観測変数が正規分布に従わないときは，標準誤差がやや過小推定される傾向にあるといえよう．

3.5　FABIN推定値とブートストラップ推定値

FABIN2とFABIN3は，因子パターンの標準誤差をそれぞれ式（16）と式（18）の正平方根として推定できる．ここでは，標準誤差のFABIN推定値とブートストラップ標準誤差とを比較する．Table 7からTable 9に，モンテカルロ実験によって求めた標準誤差の理論値と標準誤差のFABIN推定値の平均（B-Mean），およびブートストラップ法（$B=1{,}000$）を適用して求めた標準誤差の推定値の平均（B-SE）（$R=1{,}000$）を示す．ただし，紙数を節約するため，表には全体の考察が歪まないように配慮した上で，一部の因子パターンのみの結果を示す．

(1) 1因子モデル

正規乱数条件ではFABIN推定値（B-MEAN）と理論値との相違が小さい．同様にブートストラップ標準誤差（B-SE）も理論値との相違が小さい．

一方，[χ^2, $df=3$] 乱数条件と [χ^2, $df=1$] 乱数条件では，FABIN推定値は過小推定されている．特に$N=100$条件において，λ_{31}の標準誤差の推定値は理論値の0.5～0.6倍程度の大きさである．これに対し，λ_{31}のブートストラップ標準誤差もいくらか過小推定されているが，FABIN推定値ほどではない．他の因子パターンについても，ブートストラップ推定値はFABIN推定値よりも理論値に近い値となっている．したがって，観測変数の分布が正規分布から逸脱しているときは，ブートストラップ法を適用することが望まれよう．

(2) 2因子モデル

正規乱数条件ではFABIN推定値もブートストラップ標準誤差も理論値と極めて近い値となっている．

ところが，観測変数の分布が正規分布から逸脱するにつれて，λ_{31}のFABIN推定値が過小推定されている．特に，[χ^2, $df=1$] 乱数条件では理論値とFABIN推定値との相違が大きい．一方，ブートストラップ標準誤差は [χ^2, $df=1$] 乱数条件でも，FABIN推定とほどは過小推定されていない．1因子モデルと同様，ブートストラップ法の有効性が示されたと言える．

(3) 3因子モデル

2因子モデルの実験結果と同様，正規乱数条件ではFABIN推定値もブートストラップ標準誤差も理論値と極めて近い値である．

また，観測変数の分布が正規分布から逸脱するにつれて，λ_{41}のFABIN推定値が過小推定されている．これに対し，ブートストラップ標準誤差は観測変数が歪んでいても，FABIN推定値ほどは過小推定されていない．

4　結論

モンテカルロ実験の結果，観測変数が正規分布に従う場合，因子パターンのFABIN標準誤差推定値は高い精度を示したが，観測変数の分布が正規分布から逸脱するのにしたがい，推定精度は落ちた．これに対して，ブートストラップ法を適用して求めた標準誤差推定値は，FABIN標準誤差推定値よりも高い精度を示した．

また，独自分散と因子間共分散のブートストラップ標準誤差推定値も同様に，観測変数の分布が正規分布から逸脱している場合でも，実用的には十分な高さの精度を示した．以上により，ブートストラップ法による標準誤差推定値が実用的であることが示された．

Table 7 1因子モデルにおける標準誤差推定値の比較

[乱数] 標本の大きさ	母数	FABIN2 M–SE	FABIN2 F–Mean	FABIN2 B–SE	FABIN3 M–SE	FABIN3 F–Mean	FABIN3 B–SE
[正規]	λ_{21}	0.1092	0.1074	0.1096	0.1070	0.1064	0.1066
$N = 100$	λ_{31}	0.1094	0.1074	0.1098	0.1072	0.1064	0.1065
	λ_{41}	0.1091	0.1074	0.1100	0.1069	0.1064	0.1067
	λ_{61}	0.1092	0.1074	0.1101	0.1070	0.1064	0.1069
[正規]	λ_{21}	0.0617	0.0615	0.0617	0.0613	0.0613	0.0611
$N = 300$	λ_{31}	0.0619	0.0615	0.0617	0.0615	0.0613	0.0612
	λ_{41}	0.0618	0.0615	0.0618	0.0614	0.0613	0.0612
	λ_{61}	0.0616	0.0615	0.0619	0.0612	0.0613	0.0613
[正規]	λ_{21}	0.0477	0.0475	0.0479	0.0475	0.0475	0.0477
$N = 500$	λ_{31}	0.0477	0.0475	0.0480	0.0475	0.0475	0.0477
	λ_{41}	0.0477	0.0475	0.0479	0.0475	0.0475	0.0476
	λ_{61}	0.0477	0.0475	0.0479	0.0475	0.0475	0.0476
[$\chi^2, df = 3$]	λ_{21}	0.1509	0.1106	0.1450	0.1445	0.1091	0.1337
$N = 100$	λ_{31}	0.1421	0.1106	0.1407	0.1356	0.1091	0.1296
	λ_{41}	0.1402	0.1107	0.1388	0.1335	0.1091	0.1273
	λ_{61}	0.1402	0.1107	0.1388	0.1330	0.1092	0.1267
[$\chi^2, df = 3$]	λ_{21}	0.0835	0.0621	0.0836	0.0824	0.0618	0.0813
$N = 300$	λ_{31}	0.0788	0.0621	0.0790	0.0776	0.0618	0.0768
	λ_{41}	0.0780	0.0621	0.0777	0.0768	0.0618	0.0753
	λ_{61}	0.0777	0.0621	0.0778	0.0764	0.0618	0.0752
[$\chi^2, df = 3$]	λ_{21}	0.0642	0.0478	0.0625	0.0637	0.0477	0.0615
$N = 500$	λ_{31}	0.0607	0.0478	0.0595	0.0601	0.0477	0.0585
	λ_{41}	0.0599	0.0478	0.0590	0.0593	0.0477	0.0579
	λ_{61}	0.0597	0.0478	0.0589	0.0591	0.0477	0.0577
[$\chi^2, df = 1$]	λ_{21}	0.2263	0.1171	0.2230	0.2130	0.1147	0.1982
$N = 100$	λ_{31}	0.2044	0.1173	0.2080	0.1881	0.1146	0.1797
	λ_{41}	0.1998	0.1175	0.2020	0.1815	0.1146	0.1722
	λ_{61}	0.1987	0.1177	0.2015	0.1783	0.1148	0.1683
[$\chi^2, df = 1$]	λ_{21}	0.1178	0.0633	0.1142	0.1157	0.0629	0.1098
$N = 300$	λ_{31}	0.1067	0.0633	0.1041	0.1038	0.0629	0.0983
	λ_{41}	0.1045	0.0634	0.1020	0.1012	0.0629	0.0957
	λ_{61}	0.1040	0.0634	0.1019	0.1002	0.0629	0.0948
[$\chi^2, df = 1$]	λ_{21}	0.0897	0.0484	0.0870	0.0887	0.0482	0.0850
$N = 500$	λ_{31}	0.0812	0.0484	0.0793	0.0799	0.0482	0.0766
	λ_{41}	0.0795	0.0484	0.0773	0.0780	0.0482	0.0742
	λ_{61}	0.0792	0.0484	0.0776	0.0774	0.0482	0.0741

M–SE：モンテカルロ実験によって求めた理論値

F–Mean：モンテカルロ実験によって求めた FABIN 法に基づく推定値の平均

B–SE：ブートストラップ標準誤差の平均 ($R = 1{,}000$)

Table 8　2因子モデルにおける標準誤差推定値の比較

[乱数]		FABIN2			FABIN3		
標本の大きさ	母数	M–SE	F–Mean	B–SE	M–SE	F–Mean	B–SE
[正規]	λ_{31}	0.1158	0.1139	0.1181	0.1101	0.1112	0.1103
$N=100$	λ_{41}	0.1143	0.1125	0.1155	0.1095	0.1098	0.1080
	λ_{51}	0.1161	0.1140	0.1172	0.1104	0.1113	0.1095
	$\lambda_{12,1}$	0.1144	0.1125	0.1163	0.1095	0.1098	0.1091
[正規]	λ_{31}	0.0654	0.0651	0.0659	0.0643	0.0646	0.0644
$N=300$	λ_{41}	0.0647	0.0644	0.0647	0.0638	0.0639	0.0634
	λ_{51}	0.0655	0.0651	0.0654	0.0644	0.0646	0.0639
	$\lambda_{12,1}$	0.0649	0.0644	0.0649	0.0640	0.0639	0.0635
[正規]	λ_{31}	0.0504	0.0504	0.0508	0.0499	0.0501	0.0501
$N=500$	λ_{41}	0.0500	0.0498	0.0501	0.0495	0.0496	0.0494
	λ_{51}	0.0505	0.0504	0.0509	0.0500	0.0501	0.0501
	$\lambda_{12,1}$	0.0500	0.0498	0.0501	0.0496	0.0496	0.0495
$[\chi^2, df=3]$	λ_{31}	0.1565	0.1174	0.1558	0.1422	0.1140	0.1330
$N=100$	λ_{41}	0.1220	0.1155	0.1266	0.1153	0.1121	0.1154
	λ_{51}	0.1479	0.1174	0.1467	0.1343	0.1140	0.1264
	$\lambda_{12,1}$	0.1210	0.1157	0.1252	0.1142	0.1123	0.1139
$[\chi^2, df=3]$	λ_{31}	0.0870	0.0658	0.0857	0.0844	0.0652	0.0811
$N=300$	λ_{41}	0.0670	0.0650	0.0678	0.0659	0.0643	0.0659
	λ_{51}	0.0823	0.0658	0.0810	0.0797	0.0652	0.0765
	$\lambda_{12,1}$	0.0666	0.0650	0.0669	0.0653	0.0644	0.0649
$[\chi^2, df=3]$	λ_{31}	0.0669	0.0507	0.0664	0.0657	0.0504	0.0642
$N=500$	λ_{41}	0.0515	0.0501	0.0518	0.0510	0.0498	0.0509
	λ_{51}	0.0631	0.0507	0.0624	0.0619	0.0504	0.0604
	$\lambda_{12,1}$	0.0511	0.0501	0.0514	0.0506	0.0498	0.0505
$[\chi^2, df=1]$	λ_{31}	0.2306	0.1246	0.2116	0.2015	0.1197	0.1677
$N=100$	λ_{41}	0.1377	0.1215	0.1440	0.1268	0.1165	0.1256
	λ_{51}	0.2086	0.1248	0.1969	0.1785	0.1196	0.1548
	$\lambda_{12,1}$	0.1345	0.1223	0.1415	0.1229	0.1172	0.1223
$[\chi^2, df=1]$	λ_{31}	0.1214	0.0672	0.1181	0.1166	0.0663	0.1086
$N=300$	λ_{41}	0.0718	0.0661	0.0731	0.0701	0.0653	0.0698
	λ_{51}	0.1102	0.0672	0.1076	0.1049	0.0663	0.0979
	$\lambda_{12,1}$	0.0703	0.0663	0.0722	0.0683	0.0654	0.0684
$[\chi^2, df=1]$	λ_{31}	0.0925	0.0513	0.0907	0.0903	0.0509	0.0864
$N=500$	λ_{41}	0.0545	0.0506	0.0552	0.0537	0.0502	0.0538
	λ_{51}	0.0839	0.0513	0.0833	0.0814	0.0509	0.0786
	$\lambda_{12,1}$	0.0533	0.0507	0.0543	0.0524	0.0503	0.0525

M–SE：モンテカルロ実験によって求めた理論値
F–Mean：モンテカルロ実験によって求めたFABIN法に基づく推定値の平均
B–SE：ブートストラップ標準誤差の平均 ($R=1{,}000$)

Table 9　3因子モデルにおける標準誤差推定値の比較

[乱数] 標本の大きさ	母数	FABIN2 M–SE	FABIN2 F–Mean	FABIN2 B–SE	FABIN3 M–SE	FABIN3 F–Mean	FABIN3 B–SE
[正規]	λ_{41}	0.1195	0.1176	0.1213	0.1104	0.1130	0.1091
$N=100$	λ_{51}	0.1184	0.1161	0.1188	0.1105	0.1116	0.1077
	λ_{61}	0.1185	0.1161	0.1197	0.1107	0.1116	0.1082
	$\lambda_{18,1}$	0.1182	0.1161	0.1198	0.1104	0.1116	0.1082
[正規]	λ_{41}	0.0677	0.0673	0.0685	0.0659	0.0664	0.0659
$N=300$	λ_{51}	0.0668	0.0664	0.0677	0.0653	0.0656	0.0654
	λ_{61}	0.0671	0.0664	0.0673	0.0655	0.0656	0.0650
	$\lambda_{18,1}$	0.0669	0.0664	0.0674	0.0654	0.0656	0.0650
[正規]	λ_{41}	0.0521	0.0520	0.0523	0.0513	0.0516	0.0512
$N=500$	λ_{51}	0.0515	0.0514	0.0516	0.0508	0.0510	0.0505
	λ_{61}	0.0516	0.0514	0.0517	0.0509	0.0510	0.0507
	$\lambda_{18,1}$	0.0516	0.0514	0.0517	0.0508	0.0510	0.0506
$[\chi^2, df=3]$	λ_{41}	0.1593	0.1213	0.1519	0.1378	0.1158	0.1237
$N=100$	λ_{51}	0.1253	0.1193	0.1277	0.1153	0.1139	0.1130
	λ_{61}	0.1248	0.1193	0.1288	0.1150	0.1139	0.1133
	$\lambda_{18,1}$	0.1241	0.1195	0.1277	0.1142	0.1141	0.1128
$[\chi^2, df=3]$	λ_{41}	0.0890	0.0680	0.0882	0.0848	0.0670	0.0810
$N=300$	λ_{51}	0.0689	0.0671	0.0700	0.0671	0.0661	0.0670
	λ_{61}	0.0687	0.0671	0.0698	0.0669	0.0661	0.0667
	$\lambda_{18,1}$	0.0684	0.0671	0.0691	0.0665	0.0661	0.0659
$[\chi^2, df=3]$	λ_{41}	0.0686	0.0523	0.0678	0.0666	0.0519	0.0644
$N=500$	λ_{51}	0.0529	0.0517	0.0533	0.0520	0.0512	0.0519
	λ_{61}	0.0527	0.0517	0.0529	0.0519	0.0512	0.0515
	$\lambda_{18,1}$	0.0524	0.0517	0.0529	0.0516	0.0512	0.0515
$[\chi^2, df=1]$	λ_{41}	0.2316	0.1289	0.2210	0.1885	0.1215	0.1592
$N=100$	λ_{51}	0.1399	0.1257	0.1466	0.1250	0.1184	0.1240
	λ_{61}	0.1389	0.1257	0.1469	0.1241	0.1184	0.1233
	$\lambda_{18,1}$	0.1368	0.1265	0.1453	0.1219	0.1191	0.1211
$[\chi^2, df=1]$	λ_{41}	0.1234	0.0694	0.1192	0.1158	0.0682	0.1054
$N=300$	λ_{51}	0.0730	0.0683	0.0751	0.0705	0.0670	0.0706
	λ_{61}	0.0725	0.0683	0.0736	0.0699	0.0670	0.0691
	$\lambda_{18,1}$	0.0714	0.0684	0.0730	0.0687	0.0671	0.0683
$[\chi^2, df=1]$	λ_{41}	0.0940	0.0530	0.0922	0.0906	0.0524	0.0856
$N=500$	λ_{51}	0.0554	0.0522	0.0566	0.0542	0.0516	0.0545
	λ_{61}	0.0549	0.0522	0.0564	0.0537	0.0516	0.0543
	$\lambda_{18,1}$	0.0543	0.0523	0.0558	0.0530	0.0517	0.0536

M–SE：モンテカルロ実験によって求めた理論値
F–Mean：モンテカルロ実験によって求めた FABIN 法に基づく推定値の平均
B–SE：ブートストラップ標準誤差の平均 ($R=1{,}000$)

5　引用文献

Bentler, P.M. 1995 *EQS: Structural Equations Program Manual*. Encino, CA: Multivariate Software, Inc.

Cudeck, R. 1991 Noniterative factor analysis estimators, with alrorithms for subset and instrumentral variable selection. *Journal of Educational Statistics*, **16**, 35-41.

Efron, B. & Tibshirani, R.J. 1993 *An introduction to the bootstrap*. London: Chapman & Hall.

Hägglund, G. 1980 Factor analysis by instrumental variables methods: A comparison of three estimation procedures. *Research Report 80-2*. University of Uppsala, Department of Statistics.

Hägglund, G. 1981 Factor analysis by instrumental variables methods: Least squares justification and standard errors. *Research Report 81-1*. University of Uppsala, Department of Statistics.

Hägglund, G. 1982 Factor analysis by instrumental variables methods. *Psychometrika*, **47**, 209-222.

Hägglund, G. 1983 Factor analysis by instrumental variables methods: A Monte Carlo study of some estimation procedures. *Research Report 83-3*. University of Uppsala, Department of Statistics.

Hägglund, G. 1985 Factor analysis by instrumental variables methods: The confirmatory case. *Research Report 85-2*. University of Uppsala, Department of Statistics.

服部　環　2001　ブートストラップ法によるFABIN推定値に関する検討　日本心理学会第65回大会発表論文集，**38**.

Ihara, M. & Kano, Y. 1986 A new estimator of the uniqueness in factor analysis. *Psychometrika*, **51**, 563-566.

Jennrich, R.J. 1987 Tableau algorithms for factor analysis by instrumental variable methods. *Psychometrika*, **52**, 469-476.

Jöreskog, K.G. & Sörbom, D. 1996a *LISREL 8: User's Reference Guide*. Chicago: Scientific Software International.

Jöreskog, K.G. & Sörbom, D. 1996b *LISREL 8: Structural Equation Modeling with the SIMPLIS Command Language*. Chicago: Scientific Software International.

Kano, Y. 1990 Noniterative estimation and the choice of the number of factors in exploratory factor analysis. *Psychometrika*, **55**, 277-291.

Mardia, K.V. 1970 Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, **57**, 519-530.

Mooney, C.Z. & Duval, R.D. 1993 *Bootstrapping: A nonparametric approach to statistical inference*. SAGE University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07-095. Newbury Park, CA: Sage.

Toyoda, H. 1997 A noniterative estimation in confirmatory factor analysis by an instrumental variable method. *Behaviormetrika*, **24**, 147-158.

（受稿９月29日：受理10月22日）

付録1 FABIN2

観測変数の数をp，因子数をk，ただし，$p \geq 2k+1$とする．FABINは，各因子には当該の因子のみに負荷する観測変数が少なくとも1つはあるという仮定を置き，その観測変数を要素とするベクトルを$x_1(k\times 1)$とする．また，他の観測変数から任意に選んだ1つの観測変数をx_2，x_1およびx_2以外の観測変数を要素とするベクトルを$x_3((p-k-1)\times 1)$とする．そして，因子分析のモデル式を次のように表す．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

ここで，$f(k\times 1)$は因子得点を要素とするベクトル，$\Lambda_1(k\times k)$，$\lambda_2(1\times k)$，$\Lambda_3((p-k-1)\times k)$は因子パターン行列である．ただし，前述の仮定により，

$$\Lambda_1 = I \tag{9}$$

である．これはモデルを識別するための仮定である．また，$e_1(k\times 1)$，$e_2(1\times 1)$，$e_3((p-k-1)\times 1)$はそれぞれ独自因子得点を要素とするベクトルである．x_3がe_1，e_2と独立であると仮定して，観測変数x_2の因子パターンベクトルλ_2を式（10）によって推定する．これは重み付けをしない最小自乗推定値になっている．

$$\hat{\lambda}_2 = s_{23}S_{31}(S_{13}S_{31})^{-1} \tag{10}$$

ここで，s_{23}はx_2とx_3の共分散ベクトル，S_{31}とS_{13}はx_3とx_1の共分散行列，およびその転置行列である．

式（10）により観測変数x_2の因子パターンベクトルを推定できるが，残るx_3内の観測変数の因子パターンベクトルについては，x_3内の観測変数を1つずつx_2の観測変数と交換し，式（10）を適用する．結果的に因子パターンを推定するために，式（10）を$p-k$回適用することになる．また，独自分散行列は次式により推定される．

$$\hat{\Psi} = (I - D{*}D)^{-1}g \tag{11}$$

ここで，Dは因子パターン行列の推定値$\hat{\Lambda}$を用いて

$$D = \hat{\Lambda}(\hat{\Lambda}'\hat{\Lambda})^{-1}\hat{\Lambda}' \tag{12}$$

と定義される．*は行列Dの要素同士の積を取ることを意味する．また，gは$S-DSD$の対角要素を要素とする$p\times 1$のベクトルである．ただし，Sは観測変数の分散共分散行列である．

さらに，因子間共分散行列の推定値$\hat{\Phi}$は次式の通りである．

$$\hat{\Phi} = (\hat{\Lambda}'\hat{\Lambda})^{-1}\hat{\Lambda}'(S-\hat{\Psi})\hat{\Lambda}(\hat{\Lambda}'\hat{\Lambda})^{-1} \tag{13}$$

Hägglund（1982）は$\hat{\lambda}_2$の漸近分散共分散行列を導出している．計算式は以下の通りである．これをx_1以外の観測変数に順次，適用する．

$$\mathrm{Cov}(\hat{\lambda}_2) = \frac{1}{N}\hat{\sigma}_{uu}(\hat{\Sigma}_{13}\hat{\Sigma}_{31})^{-1} \times \hat{\Sigma}_{13}\hat{\Sigma}_{33}\hat{\Sigma}_{31}(\hat{\Sigma}_{13}\hat{\Sigma}_{31})^{-1} \tag{14}$$

ただし，

$$u = x_2 - \lambda_2 x_1 \tag{15}$$

$$\hat{\sigma}_{uu} = \hat{\sigma}_{22} - 2\hat{\lambda}_2\hat{\sigma}_{12} + \hat{\lambda}_2\hat{\Sigma}_{11}\hat{\lambda}'_2 \tag{16}$$

ここで，$\hat{\Sigma}_{ij}$は因子パターン行列，独自分散，因子間共分散の推定値を用いて再生された観測変数の分散共分散行列である．また，$\hat{\Sigma}_{ij}$として標本の分散共分散行列S_{ij}を用いることもできる．Hägglund（1983）のシミュレーション実験では，標本分散共分散行列を用いたほうが再生分散共分散行列よりも安定した推定値を与えている．そのため，Hägglund（1983）は標本分散共分散行列を利用すべきであると結論づけている．

付録2 FABIN3

FABIN2は観測変数x_3と$e_2-\lambda_2 e_1$の共分散ベクトルが$\sigma^2 I$と表されると仮定している．一方，この仮定を外した重み付き最小自乗法が提案されている．これをFABIN3という．FABIN3による因子パターンベクトルの推定値は

$$\hat{\lambda}_2 = s_{23}S_{33}^{-1}S_{31}(S_{13}S_{33}^{-1}S_{31})^{-1} \tag{17}$$

である．x_3に入る観測変数の因子パターンについてはFABIN2の場合と同様に，順にx_2と交換して式（10）を適用して推定する．

独自因子分散行列と因子間共分散行列の推定には，FABIN2と同様に，それぞれ式（13）と式（11）が適用される．

また，因子パターンベクトル$\hat{\lambda}_2$の漸近分散共分散行列は，

$$\mathrm{Cov}(\hat{\lambda}_2) = \frac{1}{N}\hat{\sigma}_{uu}(\hat{\Sigma}_{13}\hat{\Sigma}_{33}\hat{\Sigma}_{31})^{-1} \tag{18}$$

である．ここで，uは式（15），$\hat{\sigma}_{uu}$は式（16）の推定値の通りである．$\hat{\Sigma}_{ij}$は因子パターン行列，独自分散，因子間共分散の推定値を用いて再生した観測変数の分散共分散行列であるが，FABIN2と同様に，Hägglund（1983）は標本分散共分散行列S_{ij}を利用すべきであると述べている．