Tsukuba Psychological Research
2003, **25**, 79-86

4母数ベータ事前分布を用いた項目母数推定法の多母集団への拡張

筑波大学心理学系　服部　　環

Implementation of marginal Bayesian estimation with a four-parameter Beta prior distribution for multiple populations

Tamaki Hattori (*Institute of Psychology, University of Tsukuba, Tsukuba 305-8572, Japan*)

Zeng (1997) proposed a marginal Bayesian estimation method (MBEM) with a four-parameter Beta prior distribution for a single population. In this paper, an MBEM for multiple populations is presented, and two Fortran programs that implement it were developed. The quality of item parameter estimates with the MBEM was compared to other estimation methods. The result of a simulation experiment showed that the quality of item parameter recovery was nearly identical to that with X (Hattori, 1998) and BILOG-MG (Zimowski, Muraki, Mislevy & Bock, 1996). In addition, the dataset for a questionnaire was analyzed using the computer programs discussed in the paper — the two developed MBEM programs, X, BILOG (Mislevy & Bock, 1990) and BILOG-MG — and the results were discussed.

Key words: item response theory, marginal Bayesian estimation, FORTRAN program

項目反応モデルは受検者特性と項目特性の関数として項目正答確率を定義する．そのモデルの1つに3母数ロジスティック・モデル（1母数ロジスティック・モデルと2母数ロジスティック・モデルを含む）があり，2値的採点項目に適用される．モデルを利用するためにはモデル母数の推定が必要であり，これまで，最尤推定法，周辺最尤推定法 (Bock & Aitkin, 1981)，周辺ベイズ推定法 (Mislevy & Bock, 1990)，階層ベイズ推定法 (Swaminathan & Gifford, 1986) などが提案されてきた．

最尤推定法は当て推量母数と識別力母数の推定が難しく，そのため，推定値に上限と下限を設定することが多い．これに対して階層ベイズ推定法は解の発散を防ぐことができ，比較的良い推定値を得ることができる．しかも，Kim, Cohen, Baker, Subkoviak & Leonard (1994) によれば，必ずしも超母数を積分消去しなくても，適切な推定値を得ることができる．また，周辺ベイズ推定法も階層ベイズ推定法と同様に解が発散することは少ない．しかも，局外母数である能力値母数を事後分布から積分消去するので，項目母数の推定量が一致推定量になるという利点がある．そのため，現在では周辺ベイズ推定法が項目母数を推定する標準的な方法として利用されている．

周辺ベイズ推定法では母数の事前分布として，能力値母数と困難度母数に正規分布，識別力母数にχ分布あるいは対数正規分布，当て推量母数に2母数ベータ分布などが利用されてきた．経験的にはこれらの事前分布を用いることによって良い推定値を得ることができる．しかし，Zeng (1997) は3つの項目母数の事前分布として4母数ベータ分布を利用することを提案し，シミュレーション実験の結果に基づき，Mislevy & Bock (1990) の方法と同等か，あるいはそれ以上に良い推定値を与えると述べている．

そこで，本稿は事前分布として4母数ベータ分布を利用したZeng (1997) の方法を多母集団へ拡張

し，その推定精度を検討する．

1 母数の推定法

ここでは基本的な推定方法を概観する．

1．1 ロジスティック・モデル

3母数ロジスティック・モデルは，能力値 θ_i の受検者 i が項目 j に正答する確率 $P_j(\theta_i)$ を式（1）で定義する．能力検査以外にも項目反応モデルは適用できるので，項目反応を「正答，誤答」という言い方をするのは不適切であるが，便宜的に1点を取ることを正答，0点を取ることを誤答とよんでおく．

$$P_j(\theta_i) = c_j + (1-c_j)\frac{1}{1+\exp\{-Da_j(\theta_i-b_j)\}} \quad (1)$$

ここで，D は尺度係数で $D=1.7$ あるいは $D=1.0$ とする．a_j は項目の識別力母数，b_j は項目の困難度母数，c_j は当て推量母数（疑似チャンス・レベル）とよばれ，いずれも項目の特徴を表す母数である．

1．2 最尤推定法

能力値 θ_i の被検者 i の項目 j に対する反応を u_{ij} とする．n 項目に反応したとき，被検者 i の尤度は，

$$\begin{aligned} L(\theta_i) &= \prod_{j=1}^{n} P_j(\theta_i)^{u_{ij}}\{1-P_j(\theta_i)\}^{1-u_{ij}} \\ &= \prod_{j=1}^{n} P_j(\theta_i)^{u_{ij}} Q_j(\theta_i)^{1-u_{ij}} \end{aligned} \quad (2)$$

である．式（2）は被検者 i の尤度なので，被検者全体の尤度を考えると，

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^{N} L(\theta_i) \\ &= \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{n} P_j(\theta_i)^{u_{ij}} Q_j(\theta_i)^{1-u_{ij}} \end{aligned} \quad (3)$$

となる．最尤推定法は，この尤度を最大にする能力値と項目母数を同時に推定する．

式（3）のままでは解きにくいので，その対数尤度を最大にする能力値と項目母数を求める．対数尤度は，

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left\{u_{ij}\ln P_j(\theta_i) + (1-u_{ij})\ln Q_j(\theta_i)\right\} \quad (4)$$

である．これを θ_i，a_j，b_j，c_j で微分して0とおき，連立方程式を立てる．未知数は能力値が N 個，項目母数が $3n$ 個であるが，能力値の原点と尺度が定めるために能力値の平均を0，分散を1として推定値を求める．したがって，実質的な未知数は $N+3n-2$ 個となる．

1．3 周辺最尤推定法

最尤推定法は被検者を増やせば増やすほど能力値母数が増えてしまい，被検者を増やしても項目母数の推定値が真の値に一致することはない．標本を増やすと増えてしまう母数を付随母数というが，項目母数の推定にとっては不要な母数である．そのため，尤度から能力値母数を積分消去して得られた周辺尤度を最大にする母数を求める方法が提案された．これを周辺最尤推定法という．周辺尤度は以下の通りである．能力値の積分は数値積分法により計算される．

$$L = \prod_{i=1}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\theta)\prod_{j=1}^{n} P_j(\theta)^{u_{ij}}\{Q_j(\theta)\}^{1-u_{ij}}\,d\theta\right] \quad (5)$$

Bock & Aitkin（1981）は EM アルゴリズムに基づく推定方法を提案した．EM アルゴリズムは式（5）の周辺尤度を計算するときに積分消去した変数が観測されているものとして扱い，それと観測値（ここでは受検者 i の項目反応パターン u_i）との同時分布を更新しながら周辺尤度を最大化する項目母数値を求める．

なお，1母数ロジスティック・モデルは項目正答者数が困難度推定値の十分統計量になるので，計算量を軽減することもできる（例えば，Thissen, 1982）．

1．4 階層ベイズ推定法

最尤推定法について以下の3つの問題点を指摘できる．

(i) 許容されない推定値が得られることがある．例えば，識別力の推定値が極端に大きな値（例えば10，ただしモデル上は許される）あるいは負値となることがある．また，当て推量母数の値は選択肢数の逆数に近い値になると考えられるが，それとの乖離が大きくなることがある．

(ii) 全問に正答あるいは誤答した受検者の能力値，また，全員が正答あるいは誤答した項目の母数を推定できない．

(iii) 受検者数が増えても項目母数の推定量が一致性を持たない．

これに対し，階層ベイズ推定法は第1と第2の問題点を解決する．

以下ではこれまでに提案された階層ベイズ推定法

を概観する。

能力値θ，識別力母数a，困難度母数b，当て推量母数cの同時事前分布を$f(\theta, a, b, c)$とする．ベイズの定理から，項目反応を所与としたときのモデル母数の事後分布$f(\theta, a, b, c|u)$は次式になる．ここで，$L(u|\theta, a, b, c)$は尤度である．

$$f(\theta,a,b,c|u) \propto L(u|\theta,a,b,c)f(\theta,a,b,c) \tag{6}$$

モデル母数を相互に独立と仮定すれば，事前分布は各母数の事前分布$f(\theta)$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$の積になるので，事後分布は次式となる．

$$f(\theta,a,b,c|u) \propto L(u|\theta,a,b,c)f(\theta)f(a)f(b)f(c) \tag{7}$$

具体的な事前分布はプログラムの作成者あるいは利用者の判断に基づいて設定される．

■Swaminathan & Gifford（1986）の場合　Swaminathan & Gifford（1986）は以下の事前分布を利用している．

- 能 力 値　正規分布
- 識 別 力　χ分布
- 困 難 度　正規分布
- 当て推量　ベータ分布

また，こうした事前分布に対して，さらに事前分布を仮定することができる．その事前分布の形状を定める超母数の値はあらかじめ与えるか，事前分布から積分消去する．

正規分布の超母数は平均と分散であるが，Swaminathan & Gifford（1986）は能力値に関しては平均と分散を0と1へ固定している．この場合，事前分布は

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(\theta|\mu_\theta, \sigma_\theta^2) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\theta_i^2\right)\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

となる．

また，困難度母数の事前分布に正規分布を仮定し，その正規分布の平均の事前分布として一様分布，分散の事前分布として母数ν_bとλ_b（いずれも任意の値を与える）を持つ逆χ自乗分布を仮定している．事前分布の事前分布から平均と分散を積分消去すると困難度の事前分布は次式になる．nは項目数，$b.$はb_jの平均である．

$$\begin{aligned} f(b) &= f(b|\mu_b, \sigma_b^2, \nu_b, \lambda_b) \\ &\propto \left\{\lambda_b + \sum_{j=1}^{n}(b_j - b_.)^2\right\}^{-\frac{n+\nu_b-1}{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

また，識別力母数の事前分布は次式に従う．

$$f(a|\nu_j, \omega_j) \propto \prod_{j=1}^{n} a_j^{\nu_j - 1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{a_j^2}{\omega_j}\right\} \tag{10}$$

ここで，ν_j，ω_jはχ分布の形状を定める母数で，自由度と尺度母数である．

さらに，当て推量母数の事前分布は母数s_jとt_j（任意の値を与える）を持つベータ分布であり，次式になる．

$$\begin{aligned} f(c) &= f(c|s_j, t_j) \\ &\propto \prod_{j=1}^{n} c_j^{s_j}(1-c_j)^{t_j} \end{aligned} \tag{11}$$

以上で事後分布が定まるので，事後分布の対数をとり，能力値母数，識別力母数，困難度母数，当て推量母数でそれぞれ偏微分して0とおき，その連立方程式を解く．このようにSwaminathan & Gifford（1986）は階層ベイズ推定法を提案しているものの，実際の数値計算では識別力母数と当て推量母数の事前分布のみを用いている．

■繁桝・藤森（1984）の場合　繁桝・藤森（1984）は階層ベイズ推定を完全に実現している．事前分布として能力値母数と困難度母数に正規分布，識別力母数にχ分布あるいは切断正規分布，当て推量母数に正規分布を用いている．

識別力母数の事前分布は式（10）になるが，χ分布の自由度を任意に与えてa_jを交換可能とみなして尺度母数ω_jを積分消去する．その際，ω_jは逆χ分布に従うと仮定する．この結果，事前分布は次式になる．νは逆χ分布の母数である．

$$\propto \prod_{j=1}^{n} a_j^{(\nu_a - 1)}\left(\lambda_a + \sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{-\frac{\nu_a - n + \nu}{2}} \tag{12}$$

困難度と能力値の事前分布はSwaminathan & Gifford（1986）と同様である．

ところで，Swaminathan & Gifford（1986）と繁桝・藤森（1984）は事前分布の超母数を積分消去することを提案しているが，任意の値を与えても推定値に大きな相違はないと推察される．例えば，Kim, Cohen, Baker, Subkoviak & Leonard（1994）の実験がある．事前分布の適否についてはシミュ

レーション実験を通して評価されることになろう.

また, 2母数ロジスティック・モデルと1母数ロジスティック・モデルのためのベイズ推定法も提案されている (Swaminathan & Gifford, 1982, 1985). しかし, 3母数ロジスティック・モデルの項目母数に制約を課したのが2母数ロジスティック・モデルと1母数ロジスティック・モデルであるから, 上記のベイズ推定法で $c_j = 0$ とすれば2母数ロジスティック・モデルの母数推定法, さらに Da_j =定数とおけば1母数ロジスティック・モデルの母数推定法となる.

1.5　周辺ベイズ推定法

周辺ベイズ推定法は周辺最尤推定法とベイズ推定法の利点を取り入れた推定法である. すなわち, 階層ベイズ推定法で用いる事後分布から能力値母数を積分消去し (周辺事後分布), それを最大化する値を項目母数の推定値とする. 周辺事後分布は次式である. ここで, $L(u|\theta, a, b, c)$ は尤度, $f(\theta, a, b, c)$ はモデル母数の事前分布である. 周辺最尤推定法との違いは, 周辺ベイズ推定法が項目母数に事前分布を仮定する点にある.

$$f(\theta, a, b, c|u) \propto \int_{-\infty}^{\infty} L(u|\theta, a, b, c) f(\theta, a, b, c) d\theta \quad (13)$$

ベイズ推定法と同様に事前分布の与え方が一意に決まらないので, いくつかの周辺ベイズ推定法が提案されている.

■Tsutakawa & Lin (1986) の場合　Tsutakawa & Lin (1986) は識別力と困難度の同時事前分布として, 2変量ベータ分布を利用している.

■Mislevy & Bock (1990) の場合　Mislevy & Bock (1990) の BILOG は次の事前分布を用いている. ただし, デフォルトでは困難度の事前分布は設定されない.

- 能力値　正規分布
- 識別力　対数正規分布
- 困難度　正規分布
- 当て推量　ベータ分布

■Assessment Systems Corporation (1995) の場合
Assessment Systems Corporation (1995) の XCALIBRE は, 次の事前分布を用いている. 当て推量の事前分布が BILOG と異なる.

- 能力値　正規分布
- 識別力　対数正規分布
- 困難度　正規分布
- 当て推量　正規分布

■Zeng (1997) の場合　Zeng (1997) の周辺ベイズ推定法は, 能力値の事前分布に正規分布, そして, すべての項目母数の事前分布に4母数ベータ分布を利用している.

周辺ベイズ推定法は周辺最尤推定法と同様に EM アルゴリズム (Baker, 1992) を用いて項目母数を推定する.

2　多母集団への拡張

Zeng (1997) の方法を多母集団へ拡張し, それを実行するプログラムを作成する.

2.1　事前分布と周辺尤度

能力値母数の事前分布を正規分布, 項目母数の事前分布を4母数ベータ分布とする. 4母数ベータ分布の確率密度関数は確率変数を x とするとき, 以下の通りである.

$$g(x|\alpha_x, \beta_x, l_x, u_x) = \frac{\Gamma(\alpha_x+\beta_x)}{\Gamma(\alpha_x)\Gamma(\beta_x)} \frac{(x-l_x)^{\alpha_x-1}(u_x-x)^{\beta_x-1}}{(u_x-l_x)^{\alpha_x+\beta_x-1}} \quad (14)$$

ここで, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数, α_x, β_x, u_x, l_x は4母数ベータ分布の母数で u_x と l_x は確率変数 x の上限と下限である. 4つの母数の値はユーザがあらかじめ与える.

また, 欠損値を未提示項目として処理するために, 受検者 i が項目 j を受検しているとき1, 受検していないとき0とするダミー変数 d_{ij} を導入して, 次式によって尤度を定義した.

$$L(u|\theta, a, b, c) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{n} P_j(\theta_i)^{u_{ij}d_{ij}} Q_j(\theta_i)^{(1-u_{ij})d_{ij}} \quad (15)$$

以上により, 周辺事後尤度 $f(\theta, a, b, c|u)$ は次式になる. $P_j(\theta_i)$ は項目正答確率であるが, 式 (1) における尺度係数 D を1.0とした.

$$\begin{aligned} f(\theta, a, b, c|u) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} L(u|\theta, a, b, c) f(\theta) d\theta \\ &\times g(a|\alpha_a, \beta_a, l_a, u_a) \\ &\times g(b|\alpha_b, \beta_b, l_b, u_b) \\ &\times g(c|\alpha_c, \beta_c, l_c, u_c) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで，$f(\theta)$はθの事前分布であり，単一の母集団の場合はすべての受検者について同一の分布とする．一方，多母集団の場合には母集団ごとに事前分布を設定する．したがって，母集団ごとに事前分布を表記すべきであるが，煩雑さを避けるために，ここでは同一の表記とした．

式（16）を最大化する項目母数を推定するための計算手順は以下の通りである．解が収束するまでＥステップとＭステップを相互に反復する．

Ｅステップ

能力値を確率分布$f(\theta)$に近似させる離散近似点（求積点）をX_k，そのときの重みを$W(X_k)$とする．そして，離散近似点X_kにおける相対期待頻度f_{jk}と項目jの相対期待正答者数r_{jk}を次式を用いて計算する．$P_j(X_k)$は能力値をX_kとする正答確率，$Q_j(X_k)$は誤答確率である．求積点の数を大きくするほど積分の近似は良くなるが，本稿の実験は積分点の数を40とした．十分な数であろう．

$$\bar{f}_{jk} = \sum_{i=1}^{N} F_i \tag{17}$$

ここで，

$$F_i = \frac{\prod_{j=1}^{n} P_j(X_k)^{u_{ij}d_{ij}} Q_j(X_k)^{(1-u_{ij})d_{ij}} W(X_k)}{\sum_{k=1}^{q}\prod_{j}^{n} P_j(X_k)^{u_{ij}d_{ij}} Q_j(X_k)^{(1-u_{ij})d_{ij}} W(X_k)} \tag{18}$$

$$\bar{r}_{jk} = \sum_{i=1}^{N} R_i \tag{19}$$

ここで，

$$R_i = \frac{\prod_{j=1}^{n} u_{ij}d_{ij} P_j(X_k)^{u_{ij}d_{ij}} Q_j(X_k)^{(1-u_{ij})d_{ij}} W(X_k)}{\sum_{k=1}^{q}\prod_{j}^{n} P_j(X_k)^{u_{ij}d_{ij}} Q_j(X_k)^{(1-u_{ij})d_{ij}} W(X_k)} \tag{20}$$

Ｍステップ

周辺事後尤度を最大化する項目母数を求める．したがって，式（16）の対数を項目母数で偏微分したものを０とおき，その方程式を項目母数について解く．方程式は以下の通りである．

$$\frac{\partial \ln f(\theta,a,b,c|u)}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{q}\left(\frac{\bar{r}_{jk} - \bar{f}_{jk}P_j(X_k)}{P_j(X_k)Q_j(X_k)}\right)\frac{\partial P_j(X_k)}{\partial a_j} + \frac{\ln g(a|\alpha_a,\beta_a,l_a,u_a)}{\partial a_j} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \ln f(\theta,a,b,c|u)}{\partial b_j} = \sum_{k=1}^{q}\left(\frac{\bar{r}_{jk} - \bar{f}_{jk}P_j(X_k)}{P_j(X_k)Q_j(X_k)}\right)\frac{\partial P_j(X_k)}{\partial b_j} + \frac{\ln g(b|\alpha_b,\beta_b,l_b,u_b)}{\partial b_j} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \ln f(\theta,a,b,c|u)}{\partial c_j} = \sum_{k=1}^{q}\left(\frac{\bar{r}_{jk} - \bar{f}_{jk}P_j(X_k)}{P_j(X_k)Q_j(X_k)}\right)\frac{\partial P_j(X_k)}{\partial c_j} + \frac{\ln g(c|\alpha_c,\beta_c,l_c,u_c)}{\partial c_j} = 0 \tag{23}$$

この方程式はNewton-Raphson法によって解くことができる．

２．２　プログラム

上記のEMアルゴリズムを用いて項目母数を推定するFortranプログラムを作成した．多母集団の場合は各母集団の能力値分布としてそれぞれ正規分布を仮定し，各群の事後平均と事後分散を計算する．その際，能力値の事後平均と事後分散を逐次，事前分布の平均と分散として利用できるようにもした．

３　人工データに基づく母数の推定

３．１　実験１

テスト数を１として，Zeng（1997）が行ったシミュレーション実験においてBILOGの推定精度が低かった条件を設定した．すなわち，項目数を30，標本の大きさを500とし，識別力を0.0～2.0の一様乱数から，困難度を－1.5～2.0の一様乱数から，当て推量母数の真値を0.0～0.3の一様乱数から与えた．また，能力値の真値には標準正規乱数を用いた．

４母数ベータ分布の母数値にはZeng（1997）が用いた値（設定１）とそれとは異なる値を設定（設定２と設定３）した．Table 1に実験に用いた４母数ベータ分布の母数値を示す．なお，設定２と設定３の当て推量母数の事前分布は上限が1.00であるか

ら，2母数ベータ分布を事前分布として用いていることに相当する．

3．2　実験2

3つの母集団（群1・2・3）と3つのテスト（テスト1・2・3）を仮定した．そして，テスト1とテスト2，テスト2とテスト3との間にそれぞれ5項目の共通項目を入れ，各テスト独自の項目数をテスト1とテスト3が15，テスト2が10とした．受検者の平均能力値は群1が−1.0，群2が0.0，群3が1.0，分散は各群ともに1.0である．項目母数の真値の与え方と4母数ベータ分布の母数値は実験1と同様である．各群の標本の大きさは200である．

3．3　推定値の吟味

Table 2に項目母数の真値と推定値の相関係数を示す．表中のXは，事前分布として能力値母数に正規分布，識別力母数にχ分布，困難度母数に正規分布，当て推量母数に2母数ベータ分布を利用するプログラムで，事前分布の平均と分散をあらかじめ設定する仕様になっている（服部，1998）．

また，比較検証のために，実験1ではBILOG（Mislevy & Bock, 1990），実験2ではBILOG-MG（Zimowski, Muraki, Mislevy & Bock, 1996）を利用して母数を推定した．

(1) Zengの方法とBILOG（-MG）について

実験1ではZeng（1997）の方法はいずれの設定においてもBILOGよりもやや良い精度を示し，Zeng（1997）の実験を支持する結果となった．また，実験2では当て推量母数が設定2と設定3でBILOG-MGよりもやや小さな相関を示しているが，BILOG-MGと概ね等しい精度を示している．Zeng（1997）の方法は事前分布を適切に設定できるかどうかが鍵となり，適切な事前分布を指定できれば良い推定値が得られよう．

(2) XとBILOGについて

実験1においてXはBILOGよりも良い精度を示し，設定1の事前分布を用いたZeng（1997）の方法とほぼ等しい精度を示している．

(3) XとBILOG-MGについて

実験2においてもXはZengの方法とBILOG-MGとほぼ等しいか，それ以上に良い精度を示している．

Table 1　実験に用いた4母数ベータ分布の母数値

設定	項目母数	α_x	β_x	l_x	u_x
1	識別力 a_j	4.00	4.00	0.00	4.25
	困難度 b_j	4.00	4.00	−3.00	3.00
	当て推量 c_j	4.00	4.00	0.00	0.50
2	識別力 a_j	5.00	10.00	0.00	6.00
	困難度 b_j	1.001	1.001	−10.00	10.00
	当て推量 c_j	5.00	20.00	0.00	1.00
3	識別力 a_j	5.00	20.00	0.00	8.50
	困難度 b_j	1.001	1.001	−10.00	10.00
	当て推量 c_j	5.00	20.00	0.00	1.00

（注）設定2と設定3の困難度の事前分布はほぼ一様分布に等しい．

Table 2　真値と推定値の相関係数

		Zengの方法			服部	BILOG（実験1）
実験	母数	設定1	設定2	設定3	X	BILOG-MG（実験2）
1	a_j	0.95	0.95	0.94	0.95	0.85
	b_j	0.91	0.95	0.95	0.95	0.82
	c_j	0.63	0.52	0.52	0.62	0.29
2	a_j	0.85	0.85	0.87	0.88	0.86
	b_j	0.81	0.82	0.82	0.84	0.81
	c_j	0.35	0.20	0.21	0.34	0.30

わずか1回の実験であるから結果を一般化することはできないが，X は比較的良い推定値を得ることができるといえよう．

4　実データに基づく計算例

4.1　データ

Table 3に示す20項目の回答を用いた．回答は「はい」を1点，「いいえ」を0点として採点した．回答者は20歳前後の女性1658名である．

4.2　項目母数の推定

ここでは以下に示す4つのプログラムを用いて母数を推定した．積分点の数はいずれも40とした．項目母数に事前分布を設定したが，その平均と分散にはBILOG とBILOG-MG ではデフォルト値を用いた．

(i) 本稿のプログラム　全受検者を単一の母集団から抽出した標本とみなし，母数を推定した．基本的にはZeng（1997）と同様である．母数の事前分布にはTable 1の設定2の値を用いた．

(ii) 本稿のプログラム　被験者を得点順に並べ替え，得点の小さい方から1500名を100名ずつ3群に交互に分けていき，さらに続く150名を50名ずつ3群に分けた．残る8名をランダムに3群に分けた．これにより，特性値の大きさが異なる3群を設定できたことになる．そして，3母集団を仮定して母数を推定した．その際，3母集団の事後分布を用いて逐次，事前分布を更新した．

(iii) BILOG　単一集団とみなして母数を推定した．

(iv) BILOG-MG　(ii) と同様に3母集団を仮定して母数を推定した．

推定値をStocking & Lord（1983）の方法を用いて（i）の推定値の尺度へ等化した．等化後の推定値をTable 3に示す．相互に極めて近い推定値であることがわかる．識別力推定値の相関は最小値が0.992，最大値が0.999，また，困難度推定値の相関はすべて0.999を越えている．ここでは，人工的に想定した3群に欠損値がないため，3群を単一母集団とみなしたときの推定値が多母集団を仮定した場合の推定値とほぼ等しい値となったと考えられる．各標本に計画的な欠損値があるときは，多母集団として処理する方が良いであろう（服部，1998）．

Table 3　計算に用いた項目と等化後の項目母数の推定値

		母数の推定方法							
		本稿（単一）		本稿（多）		BILOG		BILOG-MG	
番号	項目	a_j	b_j	a_j	b_j	a_j	b_j	a_j	b_j
1	今、ダイエットをしている	1.78	1.28	1.79	1.28	1.78	1.27	1.82	1.26
2	食べ物に強い関心がある	0.58	−0.94	0.59	−0.93	0.59	−0.93	0.59	−0.92
3	太りすぎている	1.84	0.24	1.84	0.52	1.86	0.24	1.86	0.25
4	やせようと思って下剤かやせ薬を飲むことがある	1.59	2.60	1.62	2.58	1.56	2.62	1.60	2.58
5	ダイエット法の広告が気になる	2.37	0.27	2.37	0.28	2.40	0.27	2.42	0.28
6	今の体重がちょうどいい（逆転項目）	1.66	−1.37	1.63	−1.39	1.68	−1.36	1.61	−1.39
7	食後に吐(は)くことを考えながら食事をする	1.71	3.59	1.75	3.54	1.54	3.81	1.56	3.75
8	ダイエット法の書籍や雑誌の記事をよく読む	1.97	0.36	1.98	0.36	1.99	0.35	2.02	0.36
9	たとえ0.5kgでもやせるとうれしい	1.36	−1.50	1.36	−1.50	1.36	−1.48	1.36	−1.49
10	カロリーの高いものを食べないようにしている	1.26	1.13	1.26	1.14	1.26	1.12	1.27	1.13
11	少しでも太ると落ち込んでしまう	1.43	0.81	1.43	0.81	1.44	0.80	1.45	0.80
12	これまでに何度かダイニットをしてみた	1.96	0.02	1.98	0.03	1.97	0.02	2.01	0.03
13	他の人(同性の人)に比べて太っている方だと思う	1.85	−0.32	1.84	−0.31	1.87	−0.32	1.85	−0.30
14	スリムな方が魅力的だと思う	0.92	−1.45	0.92	−1.45	0.93	−1.44	0.92	−1.44
15	自分はやせすぎたと思う（逆転項目）	2.17	−2.44	2.07	−2.51	2.14	−2.43	1.93	−2.58
16	運動などでカロリーを消費することを心掛けている	0.59	0.56	0.60	0.56	0.60	0.55	0.61	0.55
17	プロポーションでは他の人(同性の人)に負けたくない	0.60	1.31	0.60	1.31	0.61	1.29	0.62	1.28
18	やせさえすれば、かなりいいセンいくと思う	0.94	1.22	0.94	1.22	0.95	1.20	0.96	1.21
19	自分の食生活を人には知られたくない	0.87	2.64	0.88	2.62	0.87	2.63	0.89	2.59
20	ちょっとでも体重が増えるのはいやだ	1.96	−0.81	1.94	−0.81	1.98	−0.80	1.95	−0.79

5 まとめ

Zeng（1997）は項目母数の事前分布として4母数ベータ分布を用いる周辺ベイズ推定法を提案している．本稿はその方法を多母集団へできるように展開し，Fortranプログラムを作成した．そして，人工データを用いたシミュレーション実験を行い，本稿の方法，服部（1998）の方法，BILOG，BILOG-MGの推定精度を比較検討した．その結果，服部（1998）の方法が他の方法よりも良い精度を示し，本稿の方法がBILOG，BILOG-MGとほぼ等しい精度を示した．また，実データに本稿の方法を適用し，推定例を示した．

引用文献

Assessment Systems Corporation 1995 *User's MANUAL for XCALIBRE:* Marginal maximum-likelihood estimation program. Minnesota: Assessment Systems Corporation.

Baker, F.B. 1992 *Item response theory: Parameter estimation techniques*. New York: Marcel Dekker.

Bock, R.D. & Aitken, M. 1981 Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: Application of an EM algorithm. *Psychometrika*, **46**, 443-459.

服部 環 1998 母集団分布の推定が項目母数の推定精度に及ぼす効果 日本教育心理学会第40回総会発表論文集，347（北海道教育大学函館校，7月）

Kim, S-H., Cohen, A.S., Baker, F.B., Subkoviak, M. & Tom, L. 1994 An investigation of hierarchical Bayes procedures in item response theory. *Psychometrika*, **59**, 405-421.

Mislevy, R.J. 1986 Bayes modal estimation in item response models. *Psychometrika*, **51**, 177-195.

Mislevy, R.J. & Bock, R.D. 1990 *BILOG3: Item Analysis and Test Scoring with Binary Logistic Models*. 2nd ed. Mooresville, IN: Scientific Software.

繁桝算男・藤森 進 1984 項目反応モデルにおける母数の同時推定 教育心理学研究 **32**, 266-275.

Stocking, M.L. & Lord, F.M. 1983 Developing a common metric in item response theory. *Applied Psychological Measurement*, **7**, 201-210.

Swaminathan, H. & Gifford, J.A. 1986 Bayesian estimation in the three-parameter logistic model. *Psychometrika*, **51**, 589-601.

Thissen, D. 1982 Marginal maximum likelihood estimation for the one-parameter logistic model. *Psychometrika*, **47**, 175-186.

Tsutakawa, R. & Lin, H.Y. 1986 Bayesian estimation of item response curves. *Psychometrika*, **51**, 251-267.

Zeng, L. 1997 Implementaion of marginal Bayesian estimation with four-parameter Beta prior distributions. *Applied Psychological Measurement*, **21**, 143-156.

Zimowski, M.F., Muraki, E., Mislevy, R.J. & Boch, R.D. 1996 *BILOG-MG: Multiple-group IRT Analysis and Test Maintenance for Binary Items*. Chicago: Scientific Software International.

（受稿9月30日：受理11月13日）