筑波大学博士（経済学）学位請求論文

非協力行動の観察可能性による社会的ジレンマの解消について

西原　宏

2011年度

目 次

第 1 章　序章 **3**

1.1　はじめに 3

1.2　社会的ジレンマの例 4

1.3　研究の目的 8

1.4　先行研究 12

1.4.1　（n 人）囚人のジレンマの歴史 12

1.4.2　協力行動を促す要因の理論的探求 14

1.4.3　協力行動を促す要因の社会心理学における探求 19

1.5　各章の概要 21

第 2 章　モデルと定義 **23**

2.1　n 人囚人のジレンマ 23

2.2　戦略と均衡 29

第 3 章　非協力行動の採られた数が観察されるジレンマゲームの均衡分析 **33**

3.1　本章の目的と概要 33

3.2　ナッシュ均衡 34

3.3　均衡の安定性 39

3.4　まとめ 43

第 4 章　非協力行動の有無が観察されるジレンマゲームの均衡分析 **45**

4.1　本章の目的と概要 45

4.2　ナッシュ均衡とその安定性 45

4.3　線形利得関数のもとでのナッシュ均衡 49

4.4　補題 4.1 の証明 51

4.5 まとめ 58

第 5 章 協力行動の実現に対する情報構造の有効性 59

5.1 本章の目的と概要 59

5.2 プレイヤー全員の協力行動の実現に対する情報構造の有効性 59

5.3 対称性のもとでの情報構造の有効性 61

5.4 まとめ 68

第 6 章 進化的安定性の分析 69

6.1 本章の目的と概要 69

6.2 KMR 進化ゲーム 70

6.3 長期均衡 74

6.4 ２タイプモデル 80

6.5 補題の証明 89

6.6 まとめ 93

第 7 章 終章 95

付 録 A $\hat{s}^k$ が完全均衡とならない例 98

付 録 B 協力行動と経済厚生 102

付 録 C 行動が確率的に観察される場合の２人ゲーム 104

付 録 D 行動決定時点が戦略的に選択される場合の２人ゲーム 107

第1章　序章

1.1　はじめに

人々が私的利益を追求することにより社会的に望ましくない結果が生じる状況を社会的ジレンマという．その例は，環境汚染，環境破壊，資源の枯渇，交通問題，フリーライダー問題などに数多く見られる．現代の社会問題の多くのものは，社会的ジレンマの一種と考えることができる．

社会的ジレンマの生起する理由は，人々の利得構造がある特有の性質をもっているからであると説明される．その利得構造のもとでは，社会の成員の誰においても，他の人々の選択に関わりなく社会的に望ましくない行動の方が社会的に望ましい行動よりも個人的利益が大きくなる．その結果，誰もが社会的に望ましくない行動を採り，社会的ジレンマが生じると考えられている．この利得構造を本論文ではジレンマ的利得構造と呼ぶ．

社会的ジレンマの原因が利得構造にあるとする説明は，一見説得力がある．しかし，人々の行動の選択は利得構造だけで決められる訳ではない．人々が行動を選択する際，他者の行動の選択を知ることができればそれを反映させるし，自分の行動の選択を他者が知り得る場合はそれを考慮に入れる．利得構造だけに社会的ジレンマの生起の原因を求める理由付けは，この点を考慮に入れておらず，状況を過度に単純化している恐れがある．社会的ジレンマとされる状況において，人々の間で互いの行動が観察可能であるならば，社会的ジレンマの生起の仕組みについては再検討が必要であろう．その結果は，上述の利得構造による説明のような誰もが強い動機で社会的に望ましくない行動を採るというものでないかもしれない．

本論文では，社会的ジレンマの状況における人々の行動の観察可能性に注目し，一部の社会的ジレンマの状況では，人々の行動のあるものは観察可能であり別のものは観察不可能であることを指摘する．この点を考慮に入れて社会的ジレンマの生起について再検討を行うことが本論文の主題である．

次節では社会的ジレンマと考えられる社会問題の主なものを列挙する．第３節では，これまで見過ごされていた行動の観察可能性の問題を具体的事例によって提起し，本研究の目的を述べる．第４節では，社会的ジレンマの解消に関するこれまでの研究を概観する．最終第５節において本論文の各章を要約する．

1.2　社会的ジレンマの例

社会的ジレンマに分類される社会問題は多岐にわたるが[1]，それらの中で代表的なものを以下に示す．

（1）環境汚染

健全な生活環境は人々に快適さを与え健康な生活の源となる．しかし，環境を汚染する行動は，それを保全する行動よりも労力や費用がかからないため，行為者に便益をもたらす．環境を汚染する行動を多くの人々が行うことによって環境が悪化し，多くの人々の快適さが損なわれるとき社会的ジレンマとしての環境汚染となる[2]．

社会的ジレンマとしての環境汚染の例は，大都市圏に人口が集中することによって生じる都市公害や生活公害に多い．自動車の過度の利用による大気汚染，生活排水による河川の水質汚濁や湖沼の富栄養化，ゴミの不法投棄などがその例である．

自動車の排気ガスには，硫黄酸化物（SOx），窒素酸化物（NOx），鉛，一酸化炭素，炭化水素，微小粒子状物質などが含まれ，これらによって大気が汚染される．窒素酸化物や炭化水素が日光の紫外線によって化学反応を起こし，光化学オキシダントが発生して空中に停留したものは光化学スモッグと呼ばれる．光化学スモッグは，目，喉の痛みなどを引き起こし，めまいや意識障害，嘔吐にまでいたる場合がある．また，微小粒子状物質は喘息の原因となる．

洗濯用の合成洗剤や台所用の中性洗剤は，石鹸に比べて溶けやすく便利であるが，河川の汚染の原因となる．合成洗剤は下水処理されなければ自然界では成分が分解されにくく，中

[1] Schlling (1973)，Dawes (1980), 山岸 (1990b) などを参照．

[2] 産業公害は環境汚染ではあるが，この種の社会的ジレンマに含まれないことに注意せよ．社会的ジレンマは，多くの人々が何らかの行動を採った結果，望ましくない状況が全員に降りかかるものである．そのため，単一の企業や少数の企業が利益を享受した結果として環境汚染が生じ，それが地域の住民に悪影響を及ぼす産業公害は，社会的ジレンマとしての環境汚染とは区別される．

性洗剤に含まれる窒素やリンの化合物は河川の富栄養化をもたらすからである．日本の下水の普及率は約 70 %であるので，下水の整備されていない地域ではこのような洗剤を使った後の排水はそのまま河川へ排出され環境を汚染する．下水の整備されている地域でも大雨のあった後は下水が処理されずに河川へ排出されるので，これらの洗剤の使用は環境汚染をもたらす.

現在進行しつつある地球温暖化も社会的ジレンマの一例である．国連の気候変動に関する政府間パネル（IPCC) の第４次評価報告書（2007 年２月発行）によれば，現在地球は温暖化しており，二酸化炭素やメタンなどの人為的温室効果ガスがその原因であることはほぼ間違いない（90 %以上の可能性）．同報告書によれば，今世紀末には平均気温が 1.1° Ｃから 6.4° Ｃ上昇し，海面水位は 18～59 ｃｍ上昇すると予測される．気温や水温の上昇は，真水資源の枯渇，農業や漁業などへの影響，洪水や旱魃，酷暑やハリケーンなどの激しい異常気象，マラリアやデング熱などの低緯度感染症の高緯度への拡大を引き起こす可能性がある.

（２）環境破壊

環境汚染において汚染の程度が非常に大きくなると環境は再生不可能となり，環境破壊となる．この問題は，Hardin（1968）によって「共有地の悲劇」という名で次のような状況として問題提起された.

「皆で放牧に使うことのできる牧草地があるとする．牛飼い達は，何頭かずつこの牧草地で牛を飼っている．より大きな利益を得ようと考えた牛飼いは，牛を増やせば良いことに気づく．そこで牛飼い達は，牧草地の許容限度を超えて際限なく牛を放牧することとなり，結局，牧草地は荒れ果ててしまう.（Harding 1968 pp. 4-5 の要約)」

Hardin の描写した共有地の悲劇は，緑地の砂漠化という形で現実に起こっている.『地球環境ハンドブック』（1994）によれば，現在，砂漠化にさらされている土地は 3,475 万平方キロメートルに上り，毎年約 6 万平方キロメートルの土地が砂漠化している．その原因は多様で，気候変動も主要因の１つであるが，家畜の過放牧，薪炭材や建設資材の確保のための樹木の伐採も大きな要因とされている.

乱獲による漁業資源の枯渇や種の絶滅もこの種の社会的ジレンマと考えられる． FAO（国

連食料農業機関）の 2005 年の統計によれば，世界の漁業資源の 52 %は生物学的に資源を維持できる限界量であり，16 %は過剰漁獲，７%はすでに枯渇している状態である．その原因の１つが乱獲である．北海道のニシン漁の漁獲は，1897 年に 97 万トンであったが，乱獲などの原因によって 1950 年台には数千トンにまで減少した．乱獲によって絶滅に至った種としては，ジャイアントモア，リョコウバト，オオウミガラス，ゴクラクインコ，ミイロコンゴウインコなどが知られている．わが国では，トキ，ニホンカワウソなどが乱獲によって絶滅した．

近年の環境破壊の例としては，オゾン層の破壊がある．これは，南極や北極の上空の成層圏中のオゾンの濃度が減少する状況である．フロンは，他の物質と化学反応しにくい安定な物質であるため工業的に扱いやすく，スプレーや冷凍機などに広く利用された．しかし，フロンが上空大気中で紫外線によって分解される際，塩素ラジカルが生成しそれによってオゾンが破壊される．特にこの作用は，極成層圏雲と呼ばれる氷の雲の存在によって早められるため，南・北極上空においてオゾンの減少が急速に進行した．オゾンは太陽の紫外線を吸収するため地上の生物を保護する役割をもつ．人が紫外線を過剰に浴びた場合，皮膚がんの発生率が高まるなどの悪影響が生じる．

（３）資源やエネルギーの枯渇

天然資源は埋蔵量に限りがあり，利用可能な代替品が見つかる前に資源が枯渇すると，それは産業や人々の生活に多大な支障を与える．資源を節約して使用すれば枯渇の時期を延ばし代替品への移行を図ることができるが，節約にはコストがかかるため，しばしば多くの人々が資源を濫費する．こうして社会的ジレンマとして資源の枯渇が生じる．

現代の産業は，エネルギー資源として石油や天然ガスに依存している．石油鉱業連盟が 2007 年に発表した『世界の石油・天然ガス資源に関する評価』によれば，現在の石油の使用量が続いた場合，石油はおよそ 70 年で，天然ガスはおよそ 100 年で枯渇すると予想される．この予想が正しければ，将来石油の不足を天然ガスで補う事態が生じ，さらにその間に代替エネルギーが開発されなければ，社会的ジレンマとしてのエネルギー資源の枯渇が起きる．

都市生活においては，電力エネルギーの濫費による電力供給停止問題が起こり得る．真夏の大都市では，エアコンの温度設定を高めにして電力エネルギーを節約することが求められているが，低い温度設定の方が快適であるためそのような節約が行われないことが多い．

しかし，多くの住民が低めの温度設定を行うと，最悪の場合には電力需要が供給可能量を超えてしまい，電圧崩壊により電力供給が停止するという事態が生じる．実際にこのような停電が 1987 年 7 月 23 日に東京都で発生した．猛暑による急速な電力需要の伸び（1 分当たり 40 万 kW）が原因であった．280 万戸で電力供給停止となり，関東南西部では完全復旧までに 3 時間 21 分を要した．

ゴミの最終処分場として使用し得る土地も一種の資源と考えられる．その残余容量が無くなればゴミの処分は深刻な問題となる．環境省発行の『日本の廃棄物処理』2009 年版によれば，2006 年時点におけるゴミ最終処分場のわが国全体の残余年数は，約 16 年である．ゴミの減量化は，広く呼びかけられているが，一人ひとりの減量努力にはコストがかかる．そのために，しばしば多くの人々がゴミの減量を怠ることにより最終処分場不足が現実化している．

（4）交通問題

スムーズな道路交通は自動車利用者に便益をもたらす．しかし，自動車台数が道路の容量を超えた場合，渋滞が起こり道路利用者は不便を被る．

朝夕のラッシュアワーの道路の渋滞を緩和するために，しばしば自家用車に代えて市バスを利用することが奨励される．しかしながら，バス停でバスを待つ時間の節約，建物から建物へ移動できる便利さや，大量の荷物が運べることからなどから自家用車を利用する人が多く，渋滞が生じる．これは社会的ジレンマの例に数えることができる．

東京都青少年・治安対策本部によれば，東京都区部における車の平均時速は 2005 年において 18.8 ｋｍであり，全国平均の 35.3 ｋｍに比べて大変に低く慢性的な交通渋滞が生じていることを示している．同本部は，これによって排ガスによる環境汚染，日常生活や企業活動の経済的損失，緊急車両のタイムロスなどの悪影響が生じていることを指摘し，渋滞の解消のために自動車による外出を控え，電車やバスなどの公共交通機関を利用することを呼び掛けている．

（5）フリーライダー問題

公共財は消費の非排除性をもつため，生産要素の供給が自発性に任される場合，個人にとっては供給するよりも供給しない方が便益は高い．このため生産に必要な生産要素が十分

に提供されず公共財が生産されない（あるいは十分な規模で生産されない）という結果が生ずる．この種の問題はフリーライダー問題と呼ばれ，社会的ジレンマの一つに数えられる．この問題は Olson（1965）によって提起された．大規模組織の労働組合において組織の維持が困難となることはその例である．慈善団体への寄付金の不足，アイバンクや骨髄バンク等の登録者の不足，各種ボランティアの不足などもこの種の社会的ジレンマである．

集団による生産活動で，個々の成員の貢献度を特定することが難しいとき，生産活動への不参加あるいは低レベルでの参加というフリーライダー問題が起こる．中国の国営企業においては，業績が良くても悪くても賃金が変わらないので，しばしば生産活動が低調となるが，これは「大釜の飯」と呼ばれる．

次世代の人口は，次世代の税金や公的年金の提供者として公共財の側面をもつ．そのため出産は公共財の供給と考えることができる．しかし，育児は経済的負担が伴い，母親の就労の機会も奪うので出産は敬遠されがちである．日本では，1973 年以降出生率の減少が続いており 2003 年には，1.29 という低い値となっている．これは少子化と呼ばれる問題であるが，これも一種のフリーライダー問題と考えることができる．

1.3 研究の目的

前節では，現代社会の様々な問題が社会的ジレンマとしてとらえられることを示した．本節では，そのような状況の生起がこれまでどのように説明されてきたかを示し，その説明の問題点を指摘して本研究の目的を明らかにする．

社会的ジレンマの状況を表すモデルとしては，n 人囚人のジレンマと呼ばれる標準形ゲームが受け入れられている[3]．このゲームにおいて，すべてのプレイヤーは**協力行動**か**非協力行動**の２つの選択肢をもち，各人の得る利得（効用）は次のような３つの条件を満たすと仮定される．

[3] この定式化は，Schelling（1973）による．ただし，彼はこのゲームを multi-person prisoner's dilemma と呼んだ．Dawes（1980）は，下の条件１と２を持つ構造を social dilemma game と呼んだ．他の定式化としては，例えば， Komorita and Park（1996）は，社会的ジレンマの状況を,（1）n 人囚人のジレンマ,（2）公共財の供給問題,（3）社会的わな，の３つのモデルに分けて表している．これらの違いは,（1）は「協力行動」と「非協力行動」の２つの行動からの選択であるのに対し,（2）と（3）は募金の金額や汚染量などレベルの選択であることである．

条件１：どのプレイヤーにおいても，他のプレイヤーの選択に関わらず，協力行動を採るよりも非協力行動を採る方が利得が大きい．

条件２：全員が非協力行動を採るときよりも全員が協力行動を採るときの方が，どのプレイヤーにとっても利得は大きい．

条件３：すべてのプレイヤーにおいて，協力行動と非協力行動のどちらを採るときも他のプレイヤーの中で協力行動を採る者の数が多いほど利得は大きい．

これらの３つの条件を満たす利得構造を本論文では**ジレンマ的利得構造**と呼ぶ．

n 人囚人のジレンマにおいては，条件１により非協力行動が支配戦略となる．このためにすべてのプレイヤーが非協力行動を採る．しかし，条件２により，全員が非協力行動を採る状態は全員が協力行動を採る状態より劣る．こうして社会的ジレンマが生じると説明される．

この説明において，各プレイヤーが非協力行動を採る動機は大変に強く，そのため上述の利得構造においては，社会的ジレンマの生起が不可避であるように見える．しかしながら，非協力行動が支配戦略となることは，標準形ゲームである n 人囚人のジレンマの同時手番の仮定に強く依存している．現実のゲーム的状況においては，室内ゲームのようにゲームの進行を取り計らう者がいないので，人々が文字通りの意味において同時に選択を行うことはできない．そこで，同時手番の仮定は，各プレイヤーが互いに相前後して選択を行うとき，他者の選択について情報が得られないという仮定として解釈されるべきである．

確かに，社会的ジレンマの事例の中にはそのような状況は多い．しかしながら，ある種の社会的ジレンマにおいては，採られた行動を周囲の人々は観察することができる．例えば，家畜の放牧数の増大や環境を汚染したり破壊したりする行為はその行動が周りの者によって観察される．そのような状況においては，同時手番の仮定は適切な仮定とは言い難い．

選択した行動が他者によって観察される可能性があるとき，以下の３つの状況が考えられる．

状況１：協力行動は観察されないが，非協力行動は観察される．

状況２：協力行動は観察されるが，非協力行動は観察されない．

状況３：協力行動も非協力行動も観察される．

状況２と３において協力行動の選択が生じないことは，２人ゲームの場合を考えれば簡単に理解できる．これらの状況において先手が協力行動をとれば，後手は自分が後手であることが分かり，ジレンマ的利得構造の条件２より非協力行動を採るであろう．そう考えれば，先手も協力行動を採らないであろう．一方，状況１においては，先手が協力行動を採ったとき，それは後手には分からない．そのため，後手は非協力行動を採るとは限らない．そこで２人による協力が達成される可能性がある．本論文では，状況１について一般の n 人の場合に協力の可能性を検討する．これが本研究の目的である．

本論文のモデルは状況１を表すものとして構築するが，それ以外の様々な要素，例えば，一度採った行動の変更可能性，人々の行動決定の時点の選択などを考慮すれば，多種多様なモデルがあり得る．本論文では，研究の出発点としてできるだけ簡単な構造のモデルの構築を目指す．そこで，以下の２つの特徴をもつモデルを考える．

特徴１：協力行動は他者によって観察されず，非協力行動は観察される．

特徴２：人々は外生的にランダムに決められた順序で選択を行う．

特徴１は状況１に対応している．より一般的には行動選択の情報が確率的に観察されるモデルが考えられるが，ここでは簡単のために確定的に観察されるとする[4]．特徴２は，プレイヤーの選択の時点が意思決定の対象でないことを意味する．これが成り立たない場合は，各プレイヤーが行動選択の時点を選び，さらにその時点において得られた情報に基づいて行動を選ぶゲームとなり，意思決定問題は複雑なものとなる[5]．

これらの特徴をもつモデルは，以下のような事例に対応する．

事例１（家畜の放牧）．放牧地が家畜の過放牧によって砂漠化する事態がアフリカにおい

[4]付録Ｃにおいて，協力行動と非協力行動の選択が確率的に観察される２人ゲームが分析されている．そこでは，これらの確率がある範囲にある場合，本論文と同様の均衡が存在することが示される．これは，不確実性を伴う観察への本論文の結果の拡張を示唆する．

[5]付録Ｄにおいて，行動選択の時点も意思決定の対象とする２人ゲームが分析されている．そこでは，行動選択の時点を互いに混合戦略によって決めるためにどちらが先手となるかが確率的に決定する均衡が存在する．これは本論文のモデルの重要な発展方向である．

て多く見られる．過放牧は様々な形態で生じるが，それまで飼っていた牛がヤギに置き換えられるために生じるものがある．ヤギは，牛と違い草を根元まで食べる習性があり，それが草地の再生能力を奪ってしまうからである[6]．一方，仔ヤギは仔牛に比べて価格が安いので，住民はヤギを放牧する経済的動機をもつ．多くの農民が牛の代わりにヤギを飼い始めると牧草地が荒れ，砂漠化が起こる．

牛やヤギは，３月から５月が出産シーズンであり，子どもの家畜を購入する時期は，この時期に限られる．そこで，農民はこの時期に，協力行動として「仔牛を購入して放牧する」か，非協力行動として「仔ヤギを購入して放牧する」かの意思決定問題に直面する．各農家が家畜を購入するタイミングは，手空きの時間のでき方や他の財の必要性などの外生的要因によって決まると考えられる（特徴２）．例えば，穀物などが必要になったときに農作業の合間に市場に行き，必要な財とともに家畜の仔を購入する．もともと放牧されている家畜が牛であるとすると，新たに放牧された仔牛は牧草地で生まれた仔牛と区別がつかず目立たない．しかし，仔ヤギを放牧するとそれは目立つ行為となる（特徴１）．

事例２（ローカル・コモンズにおける資源の採取）．森林をローカル・コモンズ（入会地）として村人が活用する状況は世界各地で見られる．そこでは，資源の保全のための慣習的ルールが存在することが多い．例えば，琵琶湖畔の岩熊地区にある西浅井町の入会地では，落ち枝はいくらでも採取できるが，薪を切るときは「カマ止め」という規制が存在し，鎌で切れる程度の太さの枝に採取が限定されている（藤村美穂 2001，p. 37）[7].「落ちている枝を拾う，または鎌による伐採を行う」を協力行動,「斧で木を伐採する」を非協力行動とすると，村人は薪の必要性を感じたとき，どちらの手段を採るかの意思決定問題に直面する．村人が薪の採取を行う時点は，薪の在庫や手空きの時間などの外生的要因によって決まると考えられる（特徴２）．誰かが落ちている枝を採集したか否かは他者には分からないが，誰かが斧で伐採すれば，それは周りの者の知るところとなる（特徴１）．

[6]佐藤（1985）p. 139, 吉川・山中・大手（2004）p. 150 などを参照せよ．

[7]他にも例えば，西部ネパールのナワルパラシ郡ボジャ村では，周囲の森林において有用資源の採取が認められているが，大木の伐採などの著しい破壊は暗黙のうちに禁じられている（南真木人 2005）．また，ボルネオ島の東カリマンタン地域の先住民ケニャ人の間では村の周りの森林で「小さな沈香の木は伐ってはならない」としている（井上真 2004）．

事例３（集合住宅でのゴミ出し）．集合住宅では，しばしばゴミ出しのできる曜日と時間帯が決められている．今，あるアパートでは，火曜日と金曜日の夕方６：００以降にゴミが出せるとしよう．各家の主婦は，居間や台所のゴミ箱が一杯になったときに，それらのゴミをビニール袋に詰め込む．そのとき，それを「一時的に玄関の土間に置いておく」か「ゴミの集積所まで持って行く」かの意思決定問題に直面する．前者の行動を協力行動，後者の行動を非協力行動とする．ゴミ袋が玄関の土間に置かれたときは，他者からは観察されないが，許可された時間帯以外にゴミが出された場合，それは周囲から観察される（特徴１）．ゴミを袋に詰め込む時点は各家のゴミの溜まり方や他の用事との兼ね合いによるので，その順序は外生的に決定すると考えられる（特徴２）．

事例４（共用施設の使用）．学生寮の共用の台所を考える．このような場所を使用する際のマナーとして，自分の出したゴミや汚れはきちんと始末し，最初の状態にもどして作業を終了するというものがあるが，それは各自の良識に任される.「マナーを守る」を協力行動,「マナーを守らない」を非協力行動とする．寮の住人が台所を使う時点は帰って来た時刻，空腹の度合い，買い物の必要性など様々な要因によって決まるので，その順序は外生的に決定すると考えられる（特徴２）．自分の前に使った人が協力行動を採った場合，それが行われたかどうか分からないが，非協力行動を採った場合はそれが分かる.（特徴１）．

砂漠化という深刻な社会問題から寮の台所のマナーという卑近なものまで４つの事例を上げたが，これらの事例ではジレンマ的利得構造が成り立つと共に非協力行動が観察可能であり，標準形ではその点を詳しく表わすことができない．これら以外にも多くの同様の事例を見つけることができよう．

本論文では，ジレンマ的利得構造のもとで特徴１と２を持つモデルを提示する．そのモデルの分析によって社会的ジレンマの解消の可能性を検討する．

1.4 先行研究

1.4.1 （n 人）囚人のジレンマの歴史

はじめに囚人のジレンマとそれの拡張版である n 人囚人のジレンマの歴史を概観する．

後に囚人のジレンマと呼ばれる標準形ゲームは，1950 年に米国ランド研究所の M. Flood と M. Dresher によって考案された．彼らの考えた利得表は次のようなものであった（Flood 1952）．

表 1.1: Flood と Dresher の囚人のジレンマ（単位はペニー）

		プレイヤー２	
		協力行動	非協力行動
プレイヤー１	協力行動	0.5, 1	-1, 2
	非協力行動	1, -1	0, 0.5

当時ランド研究所の顧問であった A. W. Tucker が，このゲームに今日知られている犯罪容疑者への尋問の物語と「囚人のジレンマ」という名称を与えた．Flood と Dresher が囚人のジレンマを考案した目的は，個人の利益追求と他者との協力が両立しない状況においてどのような選択を行うべきかという問題を提起するためであった．しかし，このゲームは多くの研究者によって，単なる意思決定のパズルではなく社会問題の本質を表すモデルとして受け入れられた．D. Luce と H. Raiffa は，囚人のジレンマの多人数版の解釈の一つとして小麦農家の過剰生産による価格の暴落を挙げている（Luce and Raiffa 1957, p. 97）．これは，社会的ジレンマの例として挙げることのできるものである．

1960 年代に入り M. Olson は個人が自己の利益を追求するために集団への貢献を行わなくなる「フリーライダー問題」を提起した（Olson 1965）．また，生物学者の G. Hardin は，牛飼いと放牧場の例を用いて，個人が自己の利益を追求するために集団として利用可能な資源が損なわれる「共有地の悲劇」を提起した（Hardin 1968）．そのような中で， Hamburger（1973）は，囚人のジレンマの様々な性質を採りあげ，それを持つ多人数ゲームを検討した．Schelling（1973）は，第２章で定式化するジレンマ的利得構造の仮定の（A.1）から（A.3）によって multi-person prisoner’s dilemma を定義した．これが，今日 n 人囚人のジレンマと呼ばれるゲームである．

1.4.2　協力行動を促す要因の理論的探求

囚人のジレンマや n 人囚人のジレンマを基本モデルとして，理論的に社会的ジレンマの解消可能性を検討することが多くの研究者によって行われている．そこでは，これらのゲームを問題とする社会的ジレンマの状況の近似モデルと考え，これにモデル化の段階で捨象されたと考えられる要素を明示的に付け加えて分析し直し，協力行動が選択される可能性が考察されている．追加される要素として代表的なものは以下の３つである．

（1）ゲームの繰り返し

同じグループによる人間関係が長期間つづく状況では，将来にわたって良い関係を維持しようとすることによって非協力行動の選択がしばしば抑制される．M. Flood と M. Dresher によって囚人のジレンマが考案されたときから，ゲームの繰り返しは協力行動が選択されるための重要な要素と考えられていた．実際，彼らは，囚人のジレンマを提起した論文の中で，このゲームを 100 回繰り返す実験を行い協力行動の採られる可能性を探っている．D. Luce と H. Raiffa は，次のように述べている．

「（囚人のジレンマを繰り返しプレイするときに）２人のプレイヤーが何らかの方法で互いに協力行動を採りあうパターンに行き着いたとしよう．このとき，プレイヤー１は，相手が『おそらく』協力行動を採るのだから非協力行動を採ることでわずかでも利益を増大させるという誘惑をもつ．しかし，彼は次のように予想するであろう．あるいはそう予想すべきである．もし（非協力行動，協力行動）が生じれば，相手は確実に次のゲームで非協力行動を採るであろう．そうであれば，彼は非協力行動を採らざるを得ない．こうして彼は（非協力行動，協力行動）によって得られた利益以上のものを失うであろう.」（Luce and Raiffa 1957，p.98）

これは，今日では，トリガー戦略として知られる戦略の組がナッシュ均衡となる論理として知られている．Friedman（1971）は，トリガー戦略の組が囚人のジレンマを含む一般的なゲームの無限回繰り返しゲームのナッシュ均衡となることを示した．その命題によれは，ステージゲームで達成される利得の組の中で，ステージゲームのナッシュ均衡利得の

組よりもどのプレイヤーも望ましいと考えるものは，繰り返しゲームのナッシュ均衡によって実現する．この種の命題は,「フォーク定理」と呼ばれる．Friedman のフォーク定理は，その後，Rubinstein（1979）や Fudenberg and Maskin（1986）によって部分ゲーム完全均衡を使って精緻化された．さらに，その結果は，Fudenberg, Levin and Maskin（1994）により，プレイヤーが公的な不完全情報をもつ場合に拡張され，Ely and Välimäki（2002），Matsushima（2004）などによって，プレイヤーが私的情報をもつ場合へ拡張されている．

ただし，Kaneko（1980）は無限回繰り返しゲームによって協力行動の選択が実現するという主張について２つの問題点を指摘している．問題点の１つは均衡が多すぎるということである．一連のフォーク定理では，個人合理的な利得より大きな利得の組み合わせは，すべて部分ゲーム完全均衡によって実現できる．したがって，均衡が無数にあり，その中から特に協力行動が実現する均衡が選ばれる可能性は非常に低い．もう１つの問題点は，無限回繰り返しゲームにナッシュ均衡やそれを精緻化した均衡概念を適用することの妥当性である．そもそもナッシュ均衡の解釈には２つある．１つは，完備情報の下でゲームが１回だけプレイされる状況において，プレイヤーが互いに相手の出方を徹底的に読み合った結果ナッシュ均衡戦略が選ばれるというものである．この解釈は，ナッシュ均衡が１つの場合，あるいはゲームが解法可能（solvable）の場合にのみ可能であり[8]，フォーク定理のように均衡が複数であれば均衡の選択の問題が生じてしまうので適用することができない．もう１つの解釈は，ゲームが何度も繰り返される場合，長い間の定常的行動パターンしてステージゲームのナッシュ均衡が実現するというものである．無限回繰り返しゲームでこの解釈を適用しようとすれば，無限回繰り返しゲーム全体が何度も繰り返されるという奇妙な状況が想定されなければならない．この問題点を克服するためには，無限回繰り返しゲームについてはそれに適したナッシュ均衡とは別の均衡概念によって分析が行われなければならないと Kaneko は述べている．

２つめの問題点は，繰り返しの回数が有限の場合には回避される．しかし，公的完全情報の有限回繰り返し囚人のジレンマでは，後ろ向き帰納法によって常に非協力行動を採ることが唯一の均衡となることが古くから指摘されている（Luce and Raiffa 1957 5 章）．そこで，完備情報ゲームにおいて成立するこの結果を不完備情報のもとで乗り越えようとした試みがある．Kreps *et al.*（1982）は，２人のプレイヤーが囚人のジレンマを有限回プレ

[8]Nash（1951）あるいは Luce and Raiffa（1957）第 5 章 7 節を参照せよ．

イするときに，互いにわずかな確率で相手が Tit-for-Tat 戦略[9]に固執するプレイヤーであると考えるとき，最後の数回を除いて協力行動が選択される逐次均衡が存在することを示した．Fudenberg and Maskin（1986）は，２人のプレイヤーが囚人のジレンマを有限回プレイするときに，互いにわずかな確率で相手がトリガー戦略[10]しか行わないプレイヤーであると考えるとき，繰り返しの回数が十分に多ければ，最後の一定の回数を除いて協力行動が採られる逐次均衡が存在することを示した．Neyman（1999）は，有限回の繰り返しの回数が common knowledge でないときに協力行動が達成される部分ゲーム完全均衡が存在することを示した[11]．

R. Axelrod は，非協力ゲームの均衡分析とは異なる観点で繰り返しゲームの最適戦略を検討した．彼は，囚人のジレンマの繰り返しゲームにおける戦略を多くの研究者から募集し，応募された戦略を対戦させることによって最強戦略を見つけ出そうとした．戦略の募集は２回行われた．１回目の募集では，200 回の繰り返しを行うと伝えられ，優勝したのは国際政治学者の A. Rapoport が提出した Tit-for-Tat 戦略であった．これを試験実験として，２回目の募集が行われた．この募集に際しては，１回目の実験結果が述べられ，停止確率が 0.00346 である無限繰り返しゲームが行われることが伝えられた．２回目の実験には 63 の戦略が応募された．この実験で特筆すべき点は，彼が進化的競争をこの対戦に取り入れた点である．それはある世代で高い利得を達成した戦略の人口は，次の世代でより多くなるというものであった．２回目の実験で優勝したのは，再び Tit-for-Tat 戦略であった．

以上の実験の結果を，Axelrod は *The Evolution of Cooperation*（Axelrod 1984）にまとめ，その中で Tit-for-Tat 戦略の優れた点について次のように述べている．

「Tit-for-Tat 戦略の確固たる強さは，感じのよさ，報復的であること，寛大であること，明瞭であることの組み合わせにある．その感じのよさは不必要なトラブルに入り込むのを妨げる．報復的であることは相手が裏切りを試みたときにそれに固執することを諦めさせる．寛大であることは協力を回復させることを助ける．明瞭さは，他者からの理解されやすさに

[9]最初のステージゲームでは協力行動を採り，２回目以降のステージゲームでは前回に相手が採った行動を採る戦略．

[10]相手が協力行動を採る限りは協力行動を採り続けるが，ひとたび相手が非協力行動を採れば非協力行動を採り続ける戦略．

[11]common knowledge 概念については，Nishihara (1991) を参照．

つながり，この戦略とうまくやっていく一番良いやり方は協力することであることを簡単に気づかせる.（Axelrod 1984, p. 176）」

Axelrod の実験の結果から，進化的競争を含む囚人のジレンマの繰り返しゲームでは Tit-for-Tat 戦略が最強の戦略であるとする見方がある．この見方によれば，囚人のジレンマが繰り返されるならば，結局 Tit-for-Tat 戦略が生き残り，すべての期で協力行動が選択されることになる.

しかしながら，このような見方に対して疑問を呈する研究者もいる．Binmore は，Playing Fair の中で，Tit-for-Tat 戦略が最強であることは根拠が薄弱であり，この戦略は過大評価されていると述べ，それを「Tit-for-Tat バブル」と呼んでいる（Binmore 1994，第 3.2.5 節）. Binmore によれば，Axelrod の実験の結果は２つの点で批判される．第１に進化的競争の結果はシミュレーションにおける初期の戦略の分布に強く依存する．Axelrod の実験では，応募された 63 の戦略が等しい割合で存在する戦略の分布が初期状態として使われたが，それのみを考えるべき理由は何もない．初期の戦略の分布を適当にとれば，これらの 63 の戦略をもつ２人標準形ゲームの任意の対称的ナッシュ均衡へ収束させることができる．第２に，Axelrod の実験では応募された 63 の戦略を用いて進化的競争が行われたが，戦略をこれらに限定すべき理由もない．Linster（1990）は，２つ以下の状態をもつオートマトンで記述できるすべての戦略を対象に追試を行ったところ，最強の戦略は Tit-for-Tat 戦略ではなくトリガー戦略であった.

ただし，Binmore は，繰り返し囚人のジレンマにおける進化的競争のシミュレーション研究が数多く行われるようになった契機として，Axelrod の実験を評価している[12].

ここで本論文のモデルと繰り返しゲームの類似点と相違点を明らかにすることは，本研究の位置づけを行う上で重要であろう.

類似点は，プレイヤーが自分の前に採られた行動に反応して行動を決定できる点である.

[12]Tit-for-Tat 戦略の欠点は，わずかでもノイズがあるときに非協力の連鎖を生みだす点にある．これは，相手が協力行動を採っていてもノイズによってそれが非協力行動であると伝えられれば非協力行動で反応し，それが相手の非協力行動を引き出してしまうからである．この点を改良した戦略として Pavlov 戦略が M. Nowak と K. Sigmund によって生み出された（Nowak and Sigmund 1993）. Tat-for-Tit 戦略とも呼ばれるこの戦略は，まず，最初に非協力行動を採る．そして２回目以降は前回のプレイにおいて，自分の戦略と相手の戦略が等しいときは協力行動を，そうでないときは非協力行動を採る.

これによって，各プレイヤーは自分の行動が他者のどのような行動を促すかを考慮して行動の選択を行わなければならない．相違点は，本論文の分析の対象が各プレイヤーが１回ずつ行動を選択する短期的関係であるのに対し，繰り返しゲームでは各プレイヤーは何度も選択を行う長期的関係を対象とする点である．この相違点から，上述の Kaneko によるナッシュ均衡の解釈との関係で生ずる繰り返しゲームへの批判を本論文の分析は免れることができる．本論文の分析でプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡が見つかれば，それは，ナッシュ均衡の通常の解釈に従って，繰り返しの状況の中で収斂する行動様式と考えることができる．

上述したように有限回繰り返しゲームにおいてもプレイヤーの合理性や繰り返しの回数について情報が不完全であれば，協力行動の採られる均衡が存在する．しかしこのような情報の不完全性は，ゲームが繰り返しプレイされる間に修正され消滅する可能性がある．これは再びナッシュ均衡の解釈との関係で問題となりうる点である．本論文のモデルは完備情報ゲームとして記述されるものであり，このような情報の修正の問題からも免れている．

（2）交渉プロセス

一般に人々は交渉を通して，実現可能な結果の中から当事者双方にとって望ましいものを選び出すことを行う．社会的ジレンマは，当事者の誰にとっても望ましくない結果が生じてしまう状況であるから，交渉による合意形成はそれを回避するための有効な手段と考えられる．

Kalai（1981）は, 次のような２段階の事前交渉プロセスを２人ゲームの囚人のジレンマの利得構造に組み合わせることによって協力行動の採られる可能性を検討した．第１段階では，期首に協力行動と非協力行動からなる何らかの行動の組が与えられ，それを見て各プレイヤーは行動を変更する機会が与えられる．２人とも期首の行動と同じものを選ぶか，あるいは２人とも期首の行動とは別の行動をとればこの段階は終了し，終了時点の行動の組が次の第２段階における期首の行動の組となる．１人のプレイヤーのみが期首の行動と異なる行動を選べば，期首の行動と同じものを採ったプレイヤーに再度行動の選択の機会が与えられる．このようにして選ばれた行動の組が，第２段階における期首の行動の組となる．第２段階においても第１段階と同じルールで，プレイヤーは期首の行動の組に対して選択の機会が与えられる．第２段階で最終的に選ばれた行動の組を合意された行動の組とする．

合意された行動は拘束力をもつ．論文の中で Kalai は，このような交渉は，実際にアメリカで中古車を購入するときに行われるとしている．Kalai（1981）は，囚人のジレンマにおいてこのような事前交渉が行われる場合，第１段階の期首の行動の組が何であっても完全均衡においては，第２段階の終了時に（協力行動，協力行動）の組が採られることを示した．

Valian（1994）は，一般に外部経済の存在する状況において効率的な結果を得るためのプロセスを検討した．囚人のジレンマの場合，それは次のような２段階の事前交渉プロセスとなる．第１段階では，互いに「相手が協力行動をとったときに支払う金額」を表明する．第２段階では，協力行動か非協力行動の選択を行う．このゲームには，第２ステージで協力行動が採られる部分ゲーム完全均衡が存在することを Valian は示した．

（３）監視と処罰

人々の行動を監視し非協力行動を採った者に十分に大きな罰を与えることができれば，社会的ジレンマは解消すると予想される．しかしながら，人々が自由意思によって動くとき，そのような監視と処罰の仕組みをもつ集団に自発的に参加するか否かは明らかではない．協力行動を採る集団は，その集団の外部の非協力行動を採る人々によって搾取されるからである．Okada（1993）は，プレイヤーが監視と処罰について合意を形成する可能性をジレンマゲームに追加してこの問題を考察した．彼の考察したゲームは３つの段階からなる．第１段階では，プレイヤーは監視と処罰のしくみを持つグループに入るか否かを選択する．第２段階では，採るべき行動，監視と処罰の権限をもつ監督者および処罰の程度を投票によって決定する，第３段階で各プレイヤーは，協力行動か非協力行動を選択する．Okada（1993）は，このゲームには１つの部分ゲーム完全均衡があり，そこでは，一部のプレイヤーが自発的に集団を形成しその中で監視と処罰のしくみを作成し協力行動を採ることを示した．

1.4.3　協力行動を促す要因の社会心理学における探求

囚人のジレンマは，その発表当時から社会心理学者から注目を集めた．社会心理学の領域では，囚人のジレンマ，n 人囚人のジレンマ，公共財問題，資源・共有地問題などについて，

実験によって協力行動を促す要因が探求されてきている．以下にその主な成果をまとめる．

社会心理学者は，コミュニケーションが協力行動を促すことを見出した．Brechner（1977）は，共有地問題においてコミュニケーションによって資源の濫費が抑えられることを確認した．Messick *et al.*（1988）は，共有地問題において対面の話し合いが有効であることを確認している．Edney and Harper（1978）は，枯渇性資源問題において，自分自身の収穫の機会を見送り資源の全体量を増やす献身的行為がコミュニケーションによって助長されることを確認した．

フリーライドを抑える要因としてもコミュニケーションが挙げられるが，それ以外にも構造的要因によって協力行動が増えることが明らかにされている．Dawes *et al.*（1986）は，ノーフェアゲーム（最少寄付ゲームにおいて，寄付の総額が最小値に達しないときに寄付をした被験者の寄付が返還される）とノーグリードゲーム（最少寄付ゲームにおいて，寄付の総額が最小値に達したときに寄付をしなかった被験者に罰金が課せられる）を検討し，これらのゲームで特に後者において寄付が多く生じることを示した．Erev and Rapoport（1990）は，最少寄付ゲームにおいて，全員が同時にではなく逐次的に寄付を行う場合は，寄付が増えることを示した．Suleiman and Rapoport（1992）は，最少寄付ゲームにおいて寄付を行うか否かではなく，金額を決めることができるとした場合，寄付を行う被験者が増えることを示している．

問題構造についての理解も協力行動を促す要因である．Stern（1976）は，意思決定問題の構造について完全な情報がある場合とない場合では，前者において協力行動が増えることを示した．Allison and Messick（1985）は，２段階の実験を行い，１回目は個人や一部の人からなるグループで２回目は大きなグループで行った結果，１回目の経験がある場合には２回目の選択でより協力的にふるまうことを確認した．

逆に協力行動の選択を妨げる要因としては，一般にグループサイズが挙げられる．どのゲームにおいても，グループが大きくなればなるほど協力行動の選択は減ることが知られている（Hamburger *et al.* 1975）．

協力行動の選択を促す要因として，個人的属性との関連は確認されていない．たとえば，性別について言えば，ある実験では男性の方が協力的であり，別の実験では女性の方が協力的であるというように相反する結果が報告されている．

近年では，協力行動の選択を促す要因として環境要因や個人差要因を探るのではなく，よ

り普遍性の高い心理的傾向を見出そうとする動きが強まっている．Tajfel *et al.*（1971）は，自分の属する小集団に含まれる相手の場合には，そうでない相手よりも協力行動を選択しやすい「小集団ひいき」を指摘したが，これは協力行動を促す心理的傾向を明らかにした先駆的研究である．Orbell and Dawes（1991）は,「誤った合意性」として，他者は自分と同じような態度や心理特性を持つと考える傾向を指摘している．また，Hayashi *et al.*（1999）は,「コントロール幻想」を指摘しているが，これは，自分の行動（例えば協力行動をとること）によって相手の決定を左右できると思い込む傾向である．これにより，自分の協力行動によって相手からも協力行動を引き出そうとして，人々はしばしば協力行動を選ぶ.

1.5　各章の概要

本論文の構成は７章からなる．各章の概要は以下の通りである．

第２章ではモデルを定式化する．まず，ジレンマ的利得構造を定義し，ランダムに決められた手番の順序で多数のプレイヤーが協力行動か非協力行動を選択するゲームを定式化する．このゲームの情報構造として「非協力行動の採られた数が観察される情報構造」と「非協力行動の有無が観察される情報構造」を定義する．さらにこの章では，分析のための均衡概念としてナッシュ均衡，厳密なナッシュ均衡（strict Nash equilibrium），逐次均衡（sequential equilibrium），完全均衡（perfect equilibrium），強完全均衡（strictly perfect equilibrium）を定義する．

第３章では，非協力行動の採られた数が観察される情報構造のもとで均衡分析を行う．このゲームには，次のような３種類のナッシュ均衡が存在し得ることが示される．それは，プレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡，プレイヤー全員が非協力行動を採るナッシュ均衡，一部のプレイヤーが協力行動を採り残りが非協力行動を採るナッシュ均衡である．全員が非協力行動を採るナッシュ均衡以外は，利得関数が一定の条件を満たすことが均衡条件となる．これらの均衡について，第２章で与えた均衡概念によって安定性を検討し，プレイヤー全員が非協力行動を採るナッシュ均衡が厳密なナッシュ均衡であること，残りの２つは逐次均衡であるが，一般に完全均衡ではないこと，しかし，均衡条件を満たすほとんどすべての利得関数において強完全均衡であることが示される．

第４章では，非協力行動の有無が観察される情報構造のもとで均衡分析を行う．このゲー

ムにおいても，第３章と同様に３種類のナッシュ均衡が存在することが示される．それらの安定性についても第３章と同様の結果が得られる．この章ではさらに線形の利得関数について均衡分析を行い，一定の条件を満たす同一の線形利得関数をすべてのプレイヤーが持つならば，ナッシュ均衡は全員が協力行動を採るものと全員が非協力行動を採るものの２種類に絞られることが示される．

第５章では，協力行動の実現に対する情報構造の有効性という観点から，上述の２つの情報構造を他の情報構造と比較する．まず，すべてのプレイヤーによる協力行動の実現を基準に比較し，これら２つの情報構造が，あらゆる情報構造の中で最も弱い利得関数の条件のもとでそれが実現できるという意味で，最も有効性の高い情報構造であることを示す．次に，一部のプレイヤーによる協力行動の実現を基準に情報構造を比較する．情報構造とナッシュ均衡に対称性を定義してその条件の成り立つ範囲で比較を行う．そして，非協力の数が観察される情報構造は，任意の人数のプレイヤーの協力行動の実現について，最も弱い利得関数の条件のもとでそれが実現できるという意味で，最も有効性の高い情報構造であることが示される．

第６章では，非協力行動の有無が観察されるゲームに対して Kandori *et. al.*（1993）による進化ゲームの理論を適用し，進化的安定性の観点から社会的ジレンマの解消の可能性を検討する．まず，すべてのプレイヤーが同一の利得関数を持ち，プレイヤー全員が協力行動を採る状態と全員が非協力行動をとる状態のみが最適反応に対して安定である場合について検討し，後者の状態のみが進化的に安定であることを示す．これは社会的ジレンマの解消に関しては否定的な結果である．さらに，プレイヤーが２種類の利得関数のどちらかをもつ２タイプの場合を検討し，一定の条件のもとで，一方のタイプのプレイヤーは非協力行動を採り，もう一方のタイプのプレイヤーが協力行動を採る状態が進化的に安定であることを示す．これによって，一部のプレイヤーが協力行動を採る形態であれば，社会的ジレンマは進化的に安定な状態として解消される可能性があることが明らかにされる．

最終第７章は，全体のまとめと将来の研究の展望にあてられる．

第2章　モデルと定義

この章では，本論文で取り扱うモデルを定式化し，その均衡分析のための諸概念を定義する．始めに，n 人囚人のジレンマを定式化してこのゲームにおいて社会的ジレンマが生起する仕組みを確認する．次に，n 人囚人のジレンマの利得構造のもとでプレイヤーが互いの行動について情報が得られる状況を展開形ゲームとして定式化する．この定式化は，行動の観察に不確実性が伴う場合を除いてあらゆる状況が含まれるように一般的に行われる．それらの展開形ゲームの分析のために，戦略とナッシュ均衡を定義する．さらにナッシュ均衡を精緻化した均衡概念として，完全均衡，逐次均衡，強完全均衡を定義する．

2.1　n 人囚人のジレンマ

次のように定義される標準形ゲーム $< N, \{C, D\}, \{f_i\}_{i \in N} >$ を **n 人囚人のジレンマ**と呼ぶ．$N = \{1, 2, ..., n\}$（$n \geq 2$）はプレイヤーの集合，C（協力行動）と D（非協力行動）は各プレイヤーの選択できる行動，$f_i : \{C, D\} \times \{0, 1, ..., n-1\} \to \mathbf{R}$ はプレイヤー i の利得関数である．利得関数 $f_i(a, k)$ の値は，プレイヤー i が $a \in \{C, D\}$ を採り，彼以外のプレイヤーの中で k 人が C を採るときの彼のフォンノイマン・モルゲンシュテルン効用関数の値を表す．f_i について次の３つの仮定を置く:

（A.1）すべての k について $f_i(C, k) < f_i(D, k)$,

（A.2）$f_i(C, n-1) > f_i(D, 0)$,

（A.3）$f_i(C, k)$ と $f_i(D, k)$ は，k についての厳密な増加関数.

ここで,（A.1） は，他のプレイヤーがどのような選択を行っているとしても，C を採るよりも D を採ることでより高い利得が得られることを意味する.（A.2）は，全員が D を採る状況よりも全員が C を採る状況の方がより望ましいことを意味する.（A.3）は，C と D のどちらの行動を採ったときでも, 他のプレイヤーの中で C をとる者が多いほど利得は高くなることを意味する．これらの３つの仮定が成り立つ利得構造 $\{f_i\}_{i \in N}$ を以下では**ジレンマ**

的利得構造と呼ぶ.

（A.1）により, どのプレイヤーにとっても D が支配戦略である．しかし，（A.2）により，どのプレイヤーにとっても，全員が C を採る状況の方が全員が D を採る状況よりも望ましい．こうして，社会的ジレンマの状況がこのゲームによって表されると考えられている．

ここで，このゲームが標準形ゲームであるため，プレイヤーに手番の順序がなく，したがって情報構造もないことに注意すべきである．D が支配戦略であることは，このことに強く依存している．しかしながら，第１章の第２節で述べたように人々の行動決定時点は互いに異なると考える方が自然であり，そうであれば，前に採られた行動について何らかの情報を得ることがあり得る．本論文の目的は，そのような場合における人々の意思決定を分析することである．そこで，n 人囚人のジレンマにプレイヤーの手番の順序と情報構造を明示的に導入したモデルを以下のように構築する．

利得関数 $\{f_i\}_{i\in N}$ が与えられたとき，次の（i）から（iv）の構造をもつ展開形ゲームを定義する．このゲームを**情報構造 $\mathscr{P}$ をもつジレンマゲーム**と呼び $\Gamma(\mathscr{P})$ で表す.

（i）最初のノードは「自然」の手番で，$1, 2, ..., n$ の順列の全体から等確率で１つが選び出される．順列の全体を Π で表す．Π の要素を一般に π で表し**順序**と呼ぶ．順序 π が与えられたとき，$\pi(i)$ によってプレイヤー i の順番を表す[1].

（ii） 各プレイヤーは,「自然」の選んだ順序に従って C または D を選択する.

（iii）情報構造を $\mathscr{P} = \{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_n\}$ で表す．$\mathscr{P}_i = \left\{P_i^1, ..., P_i^{m_i}\right\}$ は，プレイヤー i の情報分割を表す[2].

（iv） すべてのプレイヤーが C または D の選択を行った後，各プレイヤー i は，自分の選択 a と他のプレイヤー中で C を採った人数 k によって，利得 $f_i(a, k)$ を獲得する.

このゲームは以下のように解釈される.「自然」による順序の決定は，人々の行動の選択の順序がランダムに決まることを表す．人々は各自の社会的・経済的活動の中で様々な要因に影響されて行動の選択の時点を迎えるので選択の順序はランダムに決定すると考える．各プレイヤーの情報構造は，自分の前に採られた選択について何らかの情報が得られることを

[1]例えば，$\pi = (2, n, ..., 3)$ のとき，プレイヤー２が１番目，プレイヤー n が２番目，プレイヤー３が n 番目であるので，$\pi(2) = 1$，$\pi(n) = 2$，$\pi(3) = n$ である.

[2]本稿では，ゲーム理論で「情報分割」と呼ばれているものを「情報構造」と呼ぶ．これは，情報分割の数学的定義である意思決定ノードの集合の「分割」としての意味よりも「情報の受け取り方」としての意味を強調するためである.

表す．すべてのプレイヤーが選択を行った後，各プレイヤーは，自分および他者の選択の結果に従ってジレンマゲームの利得を獲得する．

本論文では，主として次の２つの情報構造について考察する．

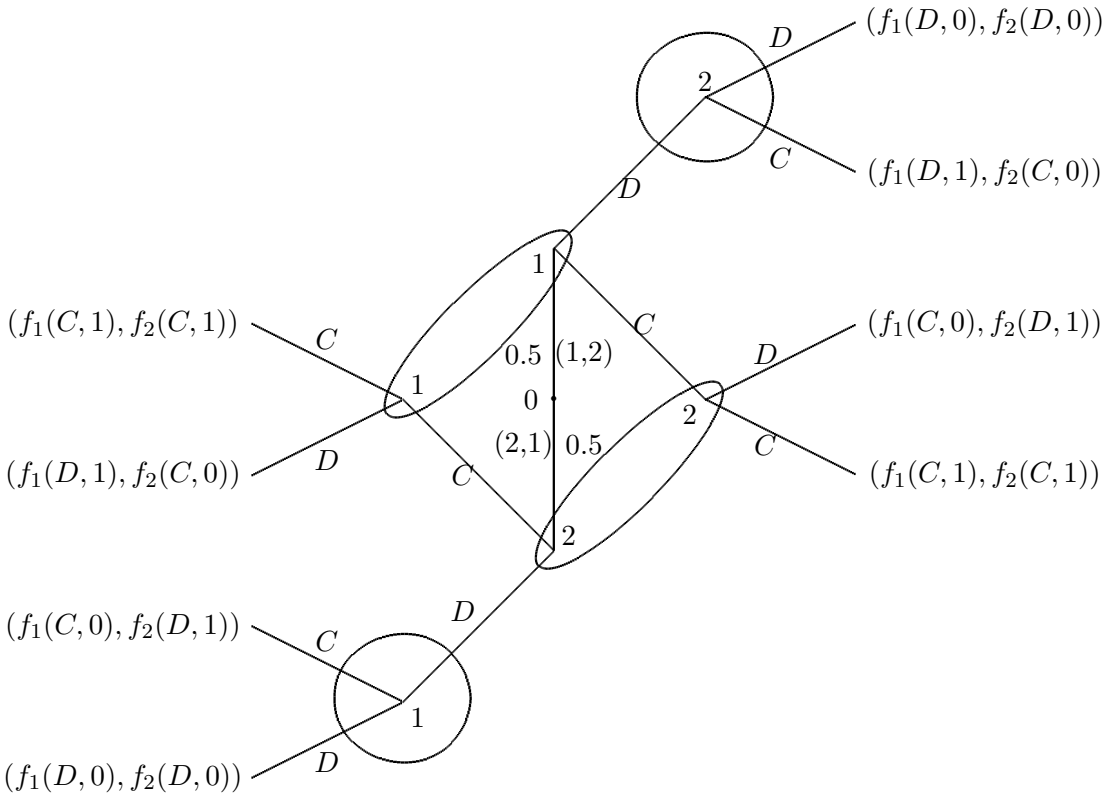
定義 2.1. Q_i^k をプレイヤー i の手番の前に k 人のプレイヤーが D を採るときに到達するプレイヤー i の意思決定ノードの集合とし，$\mathscr{Q}_i = \left\{Q_i^0, ..., Q_i^{n-1}\right\}$ と定義する．$\mathscr{Q} = \{\mathscr{Q}_1, ..., \mathscr{Q}_n\}$ を**非協力行動の採られた数が観察される情報構造**と呼ぶ.

定義 2.2. R_i^1 をプレイヤー i の手番の前に少なくとも１人のプレイヤーが D を採るときに到達するプレイヤー i の意思決定ノードの集合とし，R_i^0 をプレイヤー i のそれ以外の意思決定ノードの集合とする．$\mathscr{R}_i = \left\{R_i^0, R_i^1\right\}$ と定義する．$\mathscr{R} = \{\mathscr{R}_1, ..., \mathscr{R}_n\}$ を**非協力行動の有無が観察される情報構造**と呼ぶ.

上の２つの情報構造において，Q_i^0 と R_i^0 には，プレイヤー i が最初の手番であるときの意思決定ノードが含まれることに注意せよ．非協力行動の採られた数が観察される情報構造は，前章で述べた事例１の家畜の放牧と事例３の集合住宅のゴミ出しの例に対応する．これらの事例では，ヤギの頭数やゴミ袋の数から非協力行動を採った者の人数が周りの者に分かる．一方，非協力行動の有無が観察される情報構造は，事例２のローカル・コモンズにおける資源の採取と事例４の共用施設の使用の例が対応し，そこでは，誰かが非協力行動を採ったとき，その後にその痕跡を見た者には，非協力行動を採った者の人数は分からないがそのような行動が誰かに採られたことは分かる．情報構造を持つジレンマゲームでは，他にも様々な情報構造が設定し得るが，ここでは研究の出発点としてこれらの２つの情報構造に注目する． 以下では，$\Gamma(\mathscr{Q})$ を**非協力行動の採られた数が観察されるジレンマゲーム**と呼び，$\Gamma(\mathscr{R})$ を**非協力行動の有無が観察されるジレンマゲーム**と呼ぶ.

プレイヤーが２人のときの $\Gamma(\mathscr{Q})$ と $\Gamma(\mathscr{R})$ は，次ページの図のように表せる．２人ゲームの場合には，$Q_i^1 = R_i^1$ であるため $\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ は同一の情報構造となる．

図 2.1: $n = 2$ のときの $\Gamma(\mathscr{Q})$ と $\Gamma(\mathscr{R})$



プレイヤーが 3 人のときの $\Gamma(\mathscr{Q})$ と $\Gamma(\mathscr{R})$ は，次の 2 つの図のようになる．これらの図では，各ノードに付けられた番号 $i.k$ はそのノードの含まれる情報集合の添え字を表す．例えば，$\Gamma(\mathscr{R})$ の図で $i.k$ と記されたノードは，Q_i^k に入るノードである．$n = 3$ のときの $\Gamma(\mathscr{R})$ と $\Gamma(\mathscr{Q})$ の違いは，前者のノード $i.2$ が後者では $i.1$ となっている点である．なお，これらの図では，スペースの関係から $f_1(.,.)$，$f_2(.,.)$，$f_3(.,.)$ をそれぞれ $f(.,.)$，$g(.,.)$，$h(.,.)$ で表している．

図 2.2: $n = 3$ のときの $\Gamma(\mathscr{Q})$

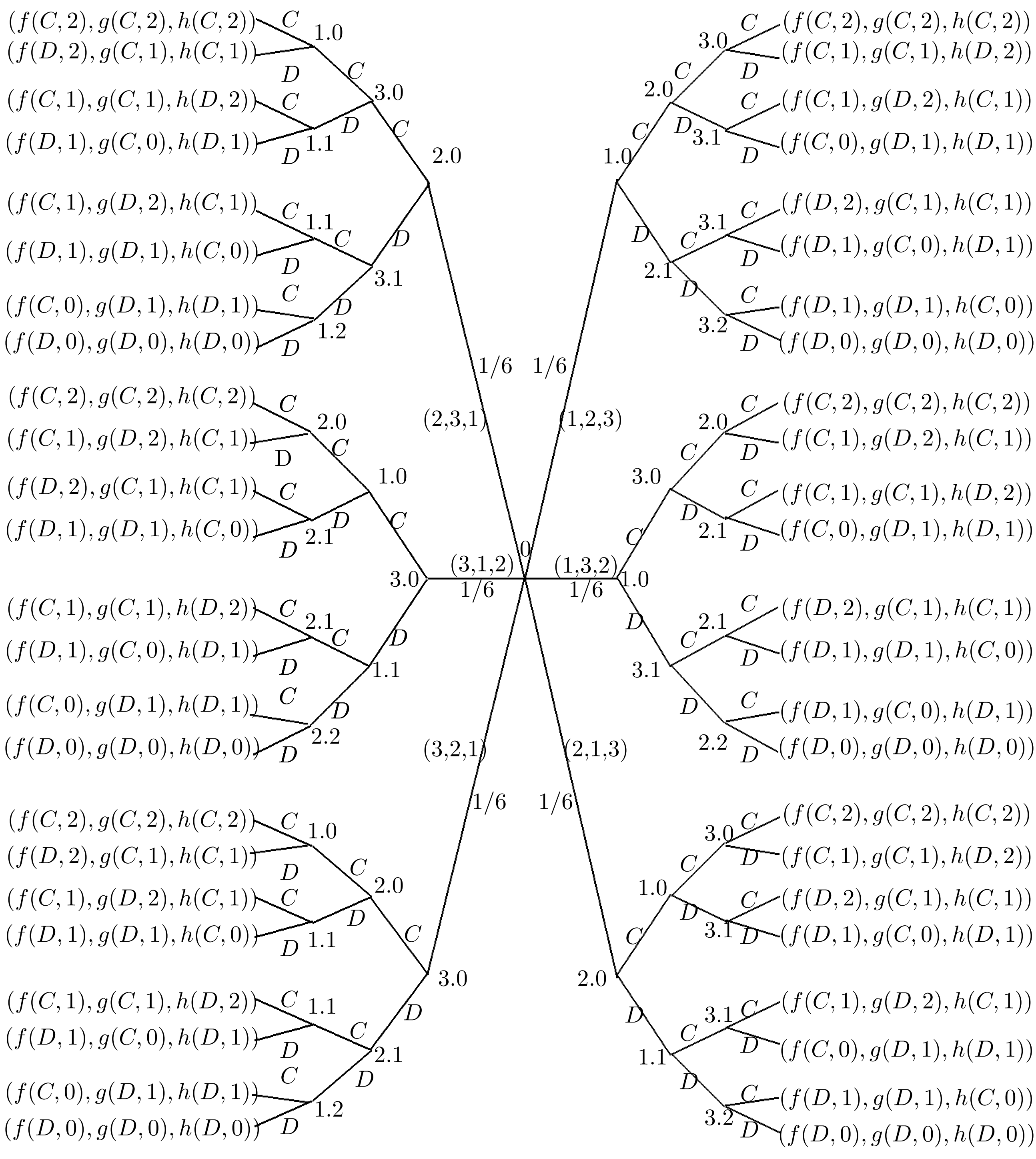
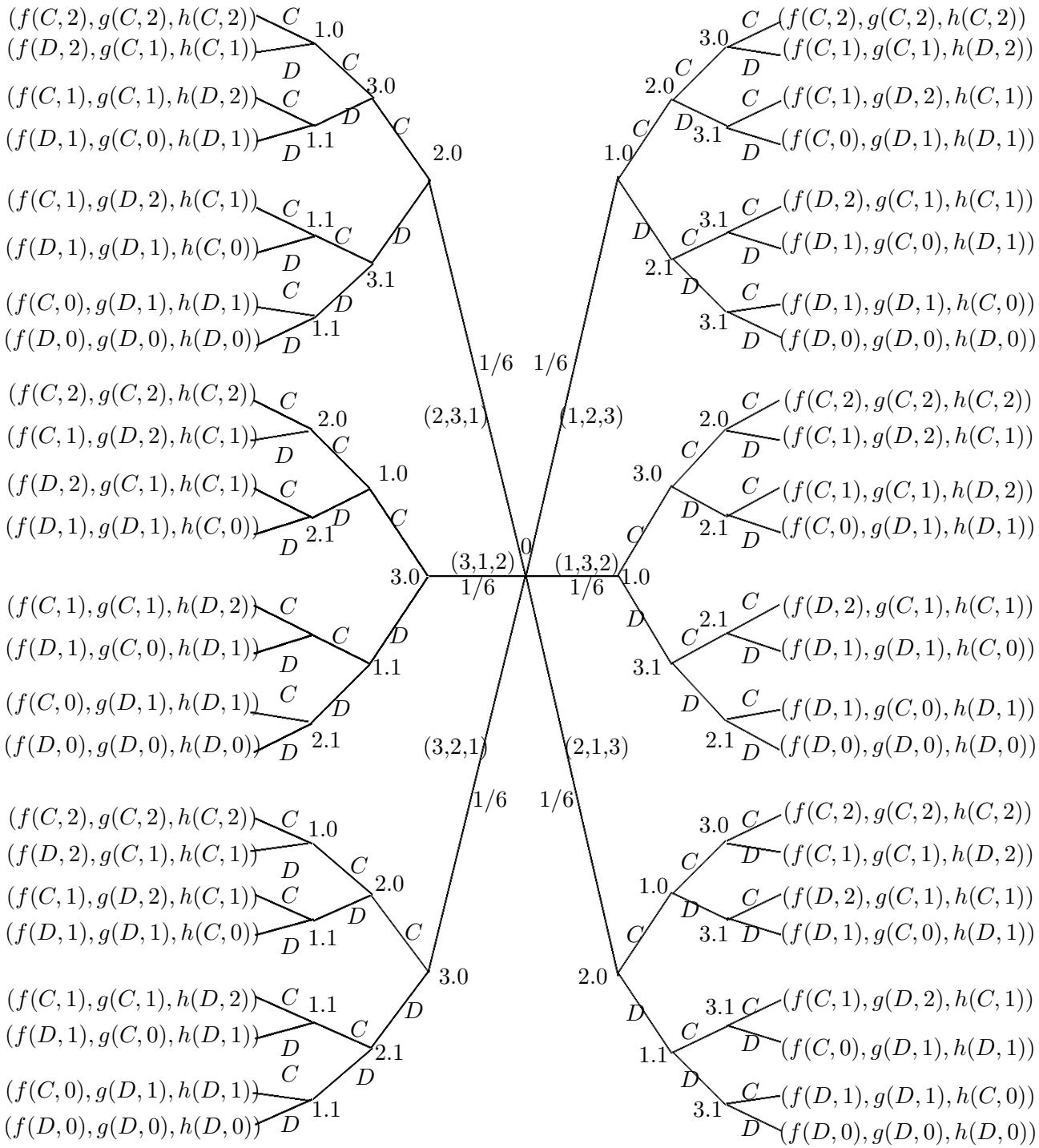


図 2.3: $n = 3$ のときの $\Gamma(\mathscr{R})$



2.2 戦略と均衡

$\Gamma(\mathscr{P})$ を分析するための基本的な概念と記号を以下のように定義する．

$\Gamma(\mathscr{P})$ において，$s_i : \mathscr{P}_i \to \{C, D\}$ を**プレイヤー** i **の戦略**と呼ぶ．特に，$\Gamma(\mathscr{Q})$ においては，プレイヤー i の**戦略**を $K \subseteq \{0, 1, ..., n-1\}$ をパラメータとして s_i^K で表わし，$k \in K$ のとき $s_i^K(Q_i^k) = C$，$k \notin K$ のとき $s_i^K(Q_i^k) = D$ と定義する．また，$\Gamma(\mathscr{R})$ においては，プレイヤー i の戦略を ab（$a, b \in \{C, D\}$）で表す．ここで，a は R_i^0 で採る行動，b は R_i^1 で採る行動を表す．

$S_i(\mathscr{P})$ で，プレイヤー i の**戦略の集合**を表す．プレイヤー 1 から n の戦略を並べたものを**戦略プロファイル**と呼ぶ．$S(\mathscr{P}) = \prod_{i \in N} S_i(\mathscr{P})$ は，戦略プロファイルの集合である．本論文では，基本的にナッシュ均衡については純粋戦略均衡のみを考える．これは後に見るように，純粋戦略の範囲で多くの均衡が存在するからである．

戦略プロファイル $s \in S(\mathscr{P})$ が与えられたとき，順序 π の後に s によって選ばれる行動の列を π **における** s **のプレイ**と呼ぶ．各順序における s のプレイをすべての順序について記述したものを s **のプレイ**と呼ぶ．順序 π における s のプレイの中で C をとる人数を $n(s, \pi, \mathscr{P})$ で表す．$(1/n!) \sum_{\pi \in \Pi} n(s, \pi, \mathscr{P})$ を s における**期待協力者数**と呼ぶ．プレイヤー全員が協力行動を採るとき，期待協力者数は n となる．

戦略プロファイル s におけるプレイヤー i の期待利得を $u_i(s)$ によって表す．戦略プロファイル s が，すべての $i \in N$ と $s'_i \in S_i - \{s_i\}$ について $u_i(s) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ を満たすとき，s は**ナッシュ均衡**であると定義する．ただし， s_{-i} は s に含まれる戦略の中で，プレイヤー i 以外のプレイヤーの戦略の組を表し，(s'_i, s_{-i}) は s'_i と s_{-i} の組み合わせからなる戦略プロファイルを表す． 特に，上記の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つとき，s は**厳密なナッシュ均衡**であると定義する．

Selten（1975）は，完全均衡（perfect equilibrium）の概念によってプレイヤーの選択ミスに対する安定性という観点からナッシュ均衡を精緻化した．その後多くの研究者によってその議論は深められ，これまでに多くの均衡概念が提案されている[3]．現在，展開形ゲームの分析においては，ナッシュ均衡の概念だけでは不十分で，完全均衡やその考えを踏襲した均衡概念を用いて安定性を検討することが標準的な分析となっている．本論文における分析

[3]詳しくは van Damme (1991) 参照．

もこれに従う．

$\Gamma(\mathscr{P})$ において，$b_i : \mathscr{P} \times \{C, D\} \to [0, 1]$（ただし，$b_i(P_i^k, C) + b_i(P_i^k, D) = 1$）をプレイヤー i の**行動戦略**という．なお，行動戦略 b_i が，すべての k について $b_i(P_i^k, a^k) = 1$（$a^k \in \{C, D\}$）であるとき，この行動戦略と $s_i(P_i^k) = a^k$ なる戦略 s_i を同一視する．関数 $\eta_i : \mathscr{P}_i \times \{C, D\} \to (0, 1)$（ただし，$\eta_i(P_i^k, C) + \eta_i(P_i^k, D) < 1$）の n 組 $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ のクラス $H(\mathscr{P})$ を考える．以下では，$\lim_{\nu\to\infty} \eta^\nu = 0$ は，$\lim_{\nu\to\infty} \eta_i^\nu(P_i^k, a) = 0$（$\forall i$，$\forall k$，$a = C, D$）を意味し，$\lim_{\nu\to\infty} b^\nu = b^*$ は，$\lim_{\nu\to\infty} b_i^\nu(P_i^k, a) = b_i^*(P_i^k, a)$（$\forall i$，$\forall k$，$a = C, D$）を意味する．

$\eta \in H(\mathscr{P})$ に対して**摂動ゲーム**（perturbed game）$\Gamma_\eta(\mathscr{P})$ を $\Gamma(\mathscr{P})$ と同じ構造をもつ展開形ゲームで，各プレイヤー i が $b_i(P_i^k, a) \geq \eta_i(P_i^k, a)$ の範囲で行動戦略を採ることのできるゲームと定義する．摂動ゲームにおいて採りうる行動戦略を**許容戦略**（admissible strategy）といい，プレイヤー i の許容戦略の集合を $B_i(\eta, \mathscr{P})$ で表す．許容戦略の組 $b \in B(\eta, \mathscr{P}) \equiv \prod_{i\in N} B_i(\eta, \mathscr{P})$ が与えられたときのプレイヤーの期待利得を $U_i^\eta(b)$ で表す．

定義 2.3. ゲーム $\Gamma(\mathscr{P})$ の行動戦略の組 b^* について，$\lim_{\nu\to\infty} \eta^\nu = 0$ を満たす列 $\{\eta^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ と $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathscr{P})$ の行動戦略の組の列 $\{b^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が存在して，以下の 2 つの条件が成り立つとき，b^* を $\Gamma(\mathscr{P})$ の**完全均衡**と定義する：

$(i) b^\nu$ は，$\Gamma_{\eta^\nu}(P)$ のナッシュ均衡である，即ち，各 $i \in N$ について

$$U_i^{\eta^\nu}(b_i^\nu, b_{-i}^\nu) = \max_{b_i \in B_i(\eta^\nu, \mathscr{P})} U_i^{\eta^\nu}(b_i, b_{-i}^\nu),$$

$(ii) \lim_{\nu\to\infty} b^\nu = b^*$.

完全均衡の安定性の条件をより強めた均衡概念として Okada（1981）によって定義された強完全均衡がある．それは次のように定義される．

定義 2.4. ゲーム $\Gamma(\mathscr{P})$ の行動戦略の組 b^* について，$\lim_{\nu\to\infty} \eta^\nu = 0$ を満たす**任意の**列 $\{\eta^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ に対して $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathscr{P})$ の行動戦略の組の列 $\{b^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が存在して，以下の 2 つの条件が成り立つとき，b^* を $\Gamma(\mathscr{P})$ の**強完全均衡**と定義する：

$(i) b^\nu$ は，$\Gamma_{\eta^\nu}(P)$ のナッシュ均衡である，即ち，各 $i \in N$ について

$$U_i^{\eta^\nu}(b_i^\nu, b_{-i}^\nu) = \max_{b_i \in B_i(\eta^\nu, \mathscr{P})} U_i^{\eta^\nu}(b_i, b_{-i}^\nu),$$

$(ii) \lim_{\nu\to\infty} b^\nu = b^*$.

完全均衡においては，何らかの列 $\{\eta^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ に対して $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathscr{P})$ のナッシュ均衡の列があって b^* に収束することが要求される．一方，強完全均衡においては，任意の列 $\{\eta^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ に対して，そのようなナッシュ均衡の列が存在しなければならない．したがって，強完全均衡の方がより強い条件が課せられている．このため，強完全均衡であれば完全均衡である．また，完全均衡は有限の展開形ゲームであれば少なくとも１つ存在するが，強完全均衡は必ずしも存在しない．

逆に，完全均衡の条件を緩めて均衡のチェックを容易にしたものとして逐次均衡がある．これは次のように定義される．すべての $i = 1, ..., n$ と $k = 0, 1, ..., n-1$ について $0 < b_i(P_i^k, C)$, $0 < b_i(P_i^k, D)$ （$i \in N$）のとき，行動戦略の組 $(b_1, ..., b_n)$ は**完全に確率的**であるという．完全に確率的な行動戦略の組 $b = (b_1, ..., b_n)$ が与えられたとき，プレイヤーの情報集合 P_i^k に含まれる意思決定ノード x について，b のもとで x に到達する確率が次のように定義される．

$$p(x : b) = \frac{1}{n!} p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k}$$

ここで，i_1 から i_k は,「自然」の手番の後 x に到達するまでに手番を持つプレイヤーで，プレイヤー i_1 が $P_{i_1}^{j_1}$ で a_1 を採り，プレイヤー i_2 が $P_{i_2}^{j_2}$ で a_2 を採り,...， プレイヤー i_k が $P_{i_k}^{j_k}$ で a_k を採ったときに x に到達するとする．さらに，$p_{i_l} = b_{i_l}(P_{i_l}^{j_l}, a_l)$（$l = 1, ..., k$）とする．

$$p_h(x : b) = \frac{p(x : b)}{\sum_{x' \in h} p(x' : b)}$$

を $x \in h$ の b における情報集合 h における**条件付確率**と呼ぶ．一方，すべての情報集合 h に対して，その中のノード x 上の確率分布 ρ_h を対応させる関数 ρ を**予想**と呼ぶ．すべての情報集合 h とすべての $x \in h$ について，

$$p_h(x : b) = \rho_h(x)$$

であるとき， ρ は b から**導かれる予想**であるという．プレイヤーの行動戦略と予想が与えられたとき，プレイヤー i の各情報集合 h について，

$$U_{i,h}(b : \rho) = \sum_{x \in h} \rho_h(x) \sum_{z \in W_x} p_x(z : b) u_i(z)$$

と定義する．ただし，W_x は x から到達しうる最終ノードの集合，$p_x(z : b)$ はノード x の後に b に従って選択が進むときに最終ノード z に到達する確率，$u_i(z)$ は最終ノード z に到達するときプレイヤー i が得られる利得を表す．$U_{i,h}(b : \rho)$ は，行動戦略の組 b が採られると

きに，情報集合 h における予想 ρ によるプレイヤー i の期待利得を表す．逐次均衡を次のように定義する．

定義 2.5. $\Gamma(\mathscr{P})$ の行動戦略の組 $b^* = (b_1^*, ..., b_n^*)$ と予想 $\rho*$ の組 (b^*, ρ^*) について以下の条件が成り立つとき，$b^* = (b_1^*, ..., b_n^*)$ は**逐次均衡**であると定義する．完全に確率的な行動戦略と予想の列 $\{(b^\nu, \rho^\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在して，

(i) 各 $\nu = 1, 2, ...$ において b^ν から予想 ρ^ν が導かれ，$\lim_{\nu\to\infty}(b^\nu, \rho^\nu) = (b^*, \rho^*)$,

(ii) すべてのプレイヤー i の各情報集合 P_i^k において

$$U_{i,h}(b_i^*, b_{-i}^* : \rho^*) = \max_{b_i} U_{i,P_i^k}(b_i, b_{-i}^* : \rho^*).$$

以上が本論文の分析で用いる均衡概念である．

第3章　非協力行動の採られた数が観察されるジレンマゲームの均衡分析

3.1　本章の目的と概要

本章では，非協力行動の採られた数が観察されるジレンマゲーム $\Gamma(\mathscr{Q})$ の均衡分析を行う．ここで考える情報構造 $\mathscr{Q}$ は，第1章の事例1と3に対応するもので，何人かのプレイヤーが非協力行動を選択したときその数が他のプレイヤーに分かるというものである．

社会的ジレンマの解消の可能性を考えるとき，最も重要であるのはプレイヤー全員が協力行動を採る均衡であり，次に重要であるのは一部のプレイヤーが協力行動を採る均衡である．これらの均衡が存在するとき，社会的ジレンマはこの情報構造の働きによって解消され得ると言うことができる．そのような均衡の存在とその安定性を検討することが本章の目的である．

次節では，ナッシュ均衡を検討し，プレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡，一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡，プレイヤー全員が非協力行動を採るナッシュ均衡など様々なナッシュ均衡が存在することを明らかにする．

第3節では，これらのナッシュ均衡の安定性を検討する．プレイヤー全員が非協力行動を採るナッシュ均衡は，厳密なナッシュ均衡であり高い安定性をもつ．一方，全員または一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡は，一般的に逐次均衡であるが完全均衡ではないことが明らかになる．しかし，これらの均衡は，均衡条件を満たすほとんどすべての利得関数において強完全均衡であり高い安定性を持つことが判明する．

これらの結果によって，非協力行動の採られた数が観察される情報構造のもとでは，安定性を持つナッシュ均衡によって社会的ジレンマが解消する可能性があることが示される．

3.2 ナッシュ均衡

$\Gamma(\mathscr{Q})$ におけるプレイヤー i の戦略は，s_i^K（$K \subseteq \{0, 1, ..., n-1\}$）で表わされる．これは，$k \in K$ である Q_i^k では C を採り，それ以外の情報集合では D を採るという戦略である．

始めに戦略 $s_i^{\{0\}}$ について考える．これは，自分の手番の前にだれも D を採らないときそのときにのみ C を採るという戦略である．すべてのプレイヤーがこの戦略を採るとき，均衡プレイでは全員が C を採る．戦略プロファイル $s^{\{0\}} = (s_1^{\{0\}}, ..., s_n^{\{0\}})$ について次の定理が成り立つ．

定理 3.1. 次の条件 $(c1)$ が成り立つとき，$s^{\{0\}}$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ のナッシュ均衡である．
条件 $(c1)$：すべてのプレイヤー i について

$$f_i(C, n-1) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_i(D, k).$$

証明． 戦略プロファイル $s^{\{0\}}$ のプレイでは，すべてのプレイヤーが C を採る．もしプレイヤー i がこのプレイから外れて異なる選択をしようとするならば，情報集合 Q_i^0 で D を採らなければならない．$s^{\{0\}}$ の定義より，これはプレイヤー i より後に手番をもつプレイヤーの D の選択を引き起こす．条件 $(c1)$ の不等式の右辺は，そのときのプレイヤー i の期待利得を表している．なぜなら, $\Gamma(\mathscr{Q})$ の「自然」の手番の定義から，プレイヤー i より後に手番をもつプレイヤーの数は 0 人から $n-1$ 人までの人数が $1/n$ の等確率であり得るからである．よって, 条件 $(c1)$ が成り立つとき，$s^{\{0\}}$ はナッシュ均衡となる．■

$s^{\{0\}}$ がナッシュ均衡となり全員の協力が実現される理由は，繰り返しゲームにおけるトリガー戦略による協力行動の実現に類似している．$\Gamma(\mathscr{Q})$ において誰かが $s^{\{0\}}$ から逸脱して D を採ると，それは自分より後の手番のプレイヤーによって観察され，彼らの D の選択を引き起こす．その場合の期待利得が十分に低ければ，誰も自分から D を採らない．こうして，$s^{\{0\}}$ はプレイヤー全員による協力が実現するナッシュ均衡となる．

ここで，プレイヤーの情報構造が細か過ぎても荒過ぎても協力を実現する均衡は存在しないことに注意すべきである．完全情報の場合には全員が D をとるナッシュ均衡しか存在しない．なぜなら，もし，ある戦略プロファイルのプレイで C をとっているプレイヤーがいるならば，各順序において最後に C をとるプレイヤーは C の代わりに D をとることによって利得を増大することができるからである．一方，もし各プレイヤーの情報集合がすべ

ての意思決定ノードを含むもの１つだけであれば，それはもとのジレンマゲームと同等なゲームであり，唯一のナッシュ均衡はすべてのプレイヤーが D を採るものとなる．つまり，情報構造 $\mathscr{Q}$ は，適度に荒い情報構造であるということができる．

Dubey and Shubik（1981）は，自然の手番を持たない任意の有限展開形ゲームにおいて，もし，情報構造がその再分割に置き換えられたなら, 純粋戦略ナッシュ均衡の集合は拡大することを示した．$\Gamma(\mathscr{Q})$ では, 過度に情報構造を細分すると $s^{\{0\}}$ はナッシュ均衡ではなくなってしまうので，純粋戦略ナッシュ均衡の集合は縮小することになるが，これは，自然の手番が存在するためである．

次に戦略プロファイル $s^{\{k\}} = (s_1^{\{k\}}, ..., s_n^{\{k\}})$ について考えよう．この戦略プロファイルのもとでは，手番の順序に関わらず，最初の k 人が D を採り，その後の $n-k$ 人が C を採る．よってそのプレイでは，$n-k$ 人の協力行動が実現する．次の定理が成り立つ．

定理 3.2. $k \leq n-2$ で次の条件 $(ck1)$ が成り立つとき，$s^{\{k\}}$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ のナッシュ均衡である．
条件 $(ck1)$：すべてのプレイヤー $i \in N$ について

$$f_i(C, n-k-1) \geq \frac{1}{n-k} \sum_{l=0}^{n-k-1} f_i(D, l).$$

証明． $s^{\{k\}}$ においては，プレイヤー i が $s_i^{\{k\}}$ 以外の選択を行っても利得が増大しないことを示す．$s_i^{\{k\}}$ において彼は，情報集合 Q_i^j（$0 \leq j \leq k-1$）で D を採る．これらの情報集合の１つ Q_i^j で彼が C を採るとする．その場合も彼の後のプレイヤーは，D を採ったプレイヤーが k 人になるまで D を採り，その後はすべてのプレイヤーが C を採る．この結果，Q_i^j に到達する手番の順序において，彼の利得は $f_i(C, n-k-1)$ となる．彼が，Q_i^j で D を採るとき，彼の利得は $f_i(D, n-k-1)$ であるから，この変更は利得の減少をもたらす．これは，すべての Q_i^j（$0 \leq j \leq k-1$）で成り立つ．戦略 $s_i^{\{k\}}$ を用いるとき，彼は情報集合 Q_i^j（$j \geq k+1$）で D を採る．この情報集合には彼以外のプレイヤーが $s_{-i}^{\{k\}}$ を採っているとき到達しない．よって，彼が選択を C に変更しても利得は変わらない．最後に，プレイヤー i が Q_i^k で戦略 $s_i^{\{k\}}$ の指定する C ではなく D を採るとする．このとき，彼の後に手番を持つプレイヤーはすべて D を採る．彼の前に手番をもつプレイヤーによって採られた C の数は，０から $n-k-1$ までがどれも等確率であり得る．よって，Q_i^k で彼が D を採るときの期待利得は，上の不等式の右辺で表される．彼が Q_i^k で C を採るときの利得は，左辺で表されるから，上の不等式が成り立つならば，彼は Q_i^k で D を採ることによって利得を増大さ

せることはできない．以上により $s^{\{k\}}$ はナッシュ均衡である．■

この定理で示されているのは，先着順に一定の数（$n-k$ 人）だけ非協力行動の選択が許される均衡である．条件 $k \leq n-2$ は，協力行動を採るプレイヤーは最低 2 人必要であることを意味する．協力行動を採るプレイヤーが 1 人の場合は，そのプレイヤーの選択によって C を採るか否かの選択を変える他者がいないため $s^{\{k\}}$ はナッシュ均衡にならない．

$k=0$ の場合，$s^{\{k\}} = s^{\{0\}}$ であるので，この定理は定理 3.1 の一般化になっていることに注意せよ．実際，$k=0$ のとき条件 $(ck1)$ は条件 $(c1)$ に等しい．

これまでに示された均衡は，すべてのプレイヤーが同じ戦略を用いる均衡だった．次に考える戦略プロファイル $\hat{s}^k$ は，k 人が s_i^{ϕ} を採り残りの $n-k$ 人が $s_i^{\{0,1,\ldots,k\}}$ というものである．この戦略プロファイルのプレイでは，s_i^{ϕ} を採るプレイヤーが D を採り，$s_i^{\{0,1,\ldots,k\}}$ を採るプレイヤーが C を採る．次の定理が成り立つ．

定理 3.3. $k \leq n-2$ で次の条件 $(ck2)$ が成り立つとき，$\hat{s}^k$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ のナッシュ均衡である．
条件 $(ck2)$：$s_i^{\{0,1,\ldots,k\}}$ を採るプレイヤー i について

$$f_i(C, n-k-1) \geq \sum_{l=0}^{n-k-1} p(k,l) f_i(D, n-k-l-1),$$

ただし，

$$p(k,l) = \frac{1}{n!}(n-l-1)!(k+1)\binom{n-k-1}{l} l!$$

と定義する．

証明． $\hat{s}^k$ において s_i^{ϕ} を採るプレイヤーの集合を N_1，$s_i^{\{0,1,\ldots,k\}}$ を採るプレイヤーの集合を N_2 とする．まず，この $\hat{s}^k$ において到達し得る情報集合において各プレイヤーの最適な選択を調べる．N_1 に含まれるプレイヤー i の情報集合で到達し得るものは $Q_i^0, \ldots, Q_i^{k-1}$ である．これらの情報集合でプレイヤー i が C，D のいずれを採っても，彼の後のプレイヤーは，N_1 に含まれるプレイヤーであれば D を採り，N_2 に含まれるプレイヤーであれば C を採る．よって，プレイヤー i の選択は，彼以降の手番のプレイヤーの行動に影響を与えない．したがって，(A.1) により D がプレイヤー i の最適な選択となる．

一方，N_2 に含まれるプレイヤー j の到達し得る情報集合は，Q_j^0,…，Q_j^k である．これらの情報集合でプレイヤー j が C を採るとき，彼以降の手番のプレイヤーは N_1 に含まれるプレイヤーであれば D を採り，N_2 に含まれるプレイヤーであれば C を採る．下で示すように，

これらの情報集合でプレイヤー j が D を採るとき，条件付期待利得がどの情報集合においても等しい．したがって，情報集合 $Q_j^0,\ldots,$ Q_j^k においてプレイヤー j が D を採るときの期待利得は，彼が戦略 s_j^ϕ を採るときの期待利得である．この期待利得を求めよう．任意の順序 π を考える．π において $N_1 \cup \{j\}$ の中で最後の手番のプレイヤーを $\hat{j}$ とする．プレイヤー $\hat{j}$ は，手番において D を採り，そのときこのパスの上で D を採った人数が $k+1$ 人となる．したがって，プレイヤー $\hat{j}$ の後に手番を持つ N_2 に含まれるプレイヤーは，全員 D を採る．その人数を l 人とする．こうして，π におけるプレイヤー j の利得は $f_j(D, n-k-l-1)$ となる．では，$N_1 \cup \{j\}$ のプレイヤーより後に N_2 に含まれるプレイヤーがちょうど l 人である順序がいくつあるか考えよう．そのような順序の数は，$(n-l-1)!(k+1)\binom{n-k-1}{l}l!$ である．なぜなら，$N_1 \cup \{j\}$ の中で最後の手番のプレイヤーとなるプレイヤーの採り方が $k+1$ 通りあり，彼より後に来る N_2 のプレイヤーを l 人指定して並べる並べ方の数が，$\binom{n-k-1}{l}l!$ 通りあり，以上の $l+1$ 人以外の並べ方が $(n-l-1)!$ 通りあるからである．したがって，プレイヤー j が s_j^ϕ を採るとき，彼の期待利得は，

$$\sum_{l=0}^{n-k-1} p(k,l) f_j(D, n-k-l-1)$$

となる．よって，条件 $(ck2)$ の不等式が N_2 に属するすべてのプレイヤーについて成り立つとき，$\hat{s}^k$ はナッシュ均衡である．

最後に，$Q_j^0,\ldots,$ Q_j^k のどの情報集合においても，プレイヤー j が D を採るときの条件付き期待利得は等しいことを示す．まず，Q_j^0 について考える．$\hat{s}^k$ においてこの情報集合の中に到達するノードをもつ順序の集合を Π_j^0 とする．$\pi^0 \in \Pi_j^0$ とする．プレイヤー j が Q_j^0 で D を採ると，N_1 のプレイヤーの中で π^0 における最後の手番のプレイヤー j_0 が D を採るとき，採られた D の合計が $k+1$ となる．すると，プレイヤー j_0 より後に手番を持つ N_2 に含まれるプレイヤーの人数を $m(\pi^0)$ 人とすると，これらのプレイヤーは D を採るので，このパスにおいて C を採るプレイヤーの数は，$n-k-m(\pi^0)-1$ 人となる．よって，π^0 におけるプレイヤー j の利得は，$f_j(D, n-k-m(\pi^0)-1)$ である．したがって，プレイヤー j が Q_j^0 で D を採るとき，この情報集合における彼の条件付き期待利得は，

$$e_0 \equiv \frac{1}{|\Pi_0|} \sum_{\pi^0 \in \Pi_0} f_j(D, n-k-m(\pi^0)-1)$$

で表せる．次に，Q_j^1 について考える．$\hat{s}^k$ においてこの情報集合の中に到達するノードをもつ順序の集合を Π_j^1 とする．$\pi^1 \in \Pi_j^1$ とする．この順序には，プレイヤー j より前に N_1 に

含まれるプレイヤーが１人いなくてはならない．いま，プレイヤー j が Q_j^1 で D を採ると，π^1 において N_1 に含まれるプレイヤーの中で最後の手番をもつプレイヤー j_1 が D を採ったとき，採られた D の合計が $k+1$ となる． プレイヤー j_1 より後の手番のプレイヤーで N_2 に含まれるプレイヤーの人数を $m(\pi^1)$ 人とすると，これらのプレイヤーは D を採るので，このパスにおいて C を採るプレイヤーの数は，$n-k-m(\pi^1)-1$ 人となる．よって，プレイヤー j の利得は $f_j(D, n-k-m(\pi^1)-1)$ である．したがって，プレイヤー j が Q_j^1 で D を採るとき，この情報集合における彼の期待利得は，

$$e_1 \equiv \frac{1}{|\Pi_1|} \sum_{\pi^1 \in \Pi_1} f_j(D, n-k-m(\pi^1)-1)$$

で表せる．ここで，任意の $\pi^1 \in \Pi_j^1$ において，N_1 の中で最初に手番を持つプレイヤーとプレイヤー j を入れ替えてできる順序 π'^1 は Π_j^0 に含まれ，$m(\pi^1) = m(\pi'^1)$ を満たすことに注意せよ．また，逆に，任意の $\pi^0 \in \Pi_j^0$ において，N_1 の中で最初に手番を持つプレイヤーとプレイヤー j を入れ替えてできる順序 π'^0 は，Π_j^1 に含まれ，$m(\pi^0) = m(\pi'^0)$ を満たす．こうして Π_j^0 と Π_j^1 の間に１対１対応が存在するので，$e_0 = e_1$ が成り立つ．同様の論法によって，情報集合 Q_j^0,…，Q_j^k のどれにおいてもプレイヤー j が D を採るときの条件付き期待利得は等しい．これによって証明が完結する．■

この均衡は，特定の k 人の非協力行動が許容され，残りのプレイヤーが協力行動を採るというものである．非協力行動が観察される情報構造は匿名性が成り立つ状況であるので，観察された非協力行動がその選択を許容されているプレイヤーのものであるか否かは，他のプレイヤーには分からないことに注意せよ．そのような状況でも，人数を手がかりにして，一部のプレイヤーの非協力行動は許容されそれ以外のプレイヤーには協力行動の選択が求められることが均衡となることをこの定理は示している．

最後に $s^\phi = (s_1^\phi, ..., s_n^\phi)$ について考える．この戦略プロファイルにおいては，全員が非協力行動を採る．次の定理が成り立つ．

定理 3.4. すべてのジレンマ的利得関数において，s^ϕ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ の厳密なナッシュ均衡である．

証明． この戦略プロファイルにおいては，どのプレイヤーもすべての情報集合で D を採る．よって，どのプレイヤーの利得も $f_i(D, 0)$ である．いま，プレイヤー i が戦略を s_i^K（$K \neq \phi$）に変更したとする．$t \in K$ であれば，彼は $t+1$ 番目の手番のときに C を採り，利得が $f_i(C, 0)$

となる．したがって，彼の期待利得は $f_i(D,0)$ よりも小さくなる．よって，s^ϕ は厳密なナッシュ均衡である．■

s^ϕ はプレイヤー全員が非協力行動を採る均衡である．この均衡は利得関数によらず常に存在する．したがって，上で見たように全員または一部のプレイヤーによって協力行動が採られる均衡が存在しうるが，同時に非協力行動が採られる均衡も必ず存在するのである．

ここで強調すべき点は，全員が非協力行動を採る均衡においては，それが支配戦略として採られるのではないという点である．支配戦略の選択理由は堅固であり選択を変えさせるためには利得構造を変える以外にない．しかし，均衡の変更であれば利得構造が変化せずとも起こり得る．つまり，外部から見れば，人々がジレンマ的利得構造を持ち非協力行動を選択していて，一見，n 人囚人のジレンマとして支配戦略が採られているように見える状況であっても，実は人々が互いに非協力行動を観察し合うことができるがその情報を利用せずに非協力行動を採るナッシュ均衡を採っている状況であるかもしれないのである．その場合は，何らかの方法で均衡の変更ができれば人々が協力行動を採る均衡に移動させて社会的ジレンマが解消できる可能性がある．

3.3 均衡の安定性

本節では，前節で確認したナッシュ均衡の安定性について検討する．

始めに $s^{\{k\}}$（$k \geq 0$）の安定性について検討する．

定理 3.5. $k \leq n-2$ で条件 $(ck1)$ が成り立つとき，$s^{\{k\}}$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ の逐次均衡である．

証明． $(\varepsilon_1^\nu(0,C), \varepsilon_1^\nu(0,D), ..., \varepsilon_n^\nu(n-1,C), \varepsilon_n^\nu(n-1,D))$ を $\varepsilon_i^\nu(,.) > 0$ で $\nu \to \infty$ のときにゼロベクトルへ収束する列とする．行動戦略 b_i^ν を次のように定義する：$l = k$ のとき，$b_i^\nu(Q_i^l, C) = 1 - \varepsilon_i^\nu(l,D)$；$l \neq k$ のとき，$b_i^\nu(Q_i^l, C) = \varepsilon_i^\nu(l,C)$．このように定義される $(b_1^\nu, ..., b_n^\nu)$ において各情報集合のノードの上に導かれる確率分布を ρ^ν で表し，$\lim_{\nu\to\infty} \rho^\nu = \rho^*$ とする．以下では，各情報集合において ρ^* を導出し，任意のプレイヤー i について ρ^* のもとでの最適な選択が $s_i^{\{k\}}$ と一致することを示す．

$l = 0, ..., k$ について，ρ^* は Q_i^l においてプレイヤー i が $l+1$ 番目の手番で彼の前の l 人のプレイヤーが D を取ったときのノードの上に等確率の確率分布を与える．これは，$s^{\{k\}}$ に

おける Q_i^l の中のノードの確率分布と同じである．よって，これらの情報集合では $s_i^{\{k\}}$ による選択がプレイヤー i にとって期待利得を最大となる選択である．$l = k+1, ..., n-1$ のとき，Q_i^l におけるプレイヤー i の選択に関わらず，彼より後の手番のプレイヤーは D を採る．よって，この情報集合におけるプレイヤー i の最適な選択は D である．以上により，$s^{\{k\}}$ は逐次均衡である．■

この定理によって，$s^{\{k\}}$ がプレイヤーの選択ミスに対して一定の安定性をもつことが示された．しかし，より強い安定を要求する完全均衡については，条件 $(ck1)$ が等号で成り立つ場合には一般に保証できない．次の例は，$s^{\{0\}}$ がナッシュ均衡であっても必ずしも完全均衡にはならないことを示す．

例 3.1. 次のような２人ジレンマゲームを考える:$i = 1, 2$ について，$f_i(C, 0) = -1$, $f_i(C, 1) = 1$, $f_i(D, 0) = 0$，$f_1(D, 1) = 2$, $f_2(D, 1) = 1.9$．利得表で表わせば，これは次のようになる．

表 3.1: ２人ジレンマゲーム

		プレイヤー２	
		C	D
プレイヤー１	C	1，1	-1, 1.9
	D	2, -1	0, 0

ここで, $i = 1, 2$ について，$\frac{1}{2}f_i(D, 0) + \frac{1}{2}f_i(D, 1) \leq f_i(C, 1)$ が成り立ち，特に $i = 1$ についてはこれが等号が成り立つ．よって，$(s_1^{\{0\}}, s_2^{\{0\}})$ はナッシュ均衡である．しかし，これは以下の理由から完全均衡ではない．$\Gamma(\mathscr{Q})$ のエージェント標準形を $A(\mathscr{Q})$ で表す．ただし，情報集合 Q_i^j に割り当てられるエージェントをエージェント ij と呼び，戦略の組を記述するときは，エージェント 11, 12, 21, 22 の戦略をこの順で並べて表記するものとする．Selten（1975）の Theorem 4 から，$\Gamma(\mathscr{Q})$ の行動戦略と $A(\mathscr{Q})$ のエージェントの戦略の対応関係のもとで，$\Gamma(\mathscr{Q})$ における完全均衡は $A(\mathscr{Q})$ における完全均衡である．また，van Damme（1991）の Corollary 2.2.6 から，$A(\mathscr{Q})$ において弱く支配される戦略を含む戦略の組は完全均衡にならない．$(s_1^{\{0\}}, s_2^{\{0\}})$ には，(C, D, C, D) が対応する．したがって，エージェント 11 の戦略 C が D によって弱く支配されれば，(C, D, C, D) は完全均衡でなく，上述の関係から $(s_1^{\{0\}}, s_2^{\{0\}})$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ の完全均衡でない．$a = C, D$ について

$$u_{11}(C,a,C,C) = u_{11}(C,a,C,D) = 1,\ u_{11}(C,C,D,C) = -1,$$

$$u_{11}(C,C,D,D) = -1,\ u_{11}(C,D,D,C) = u_{11}(C,D,D,D) = -1/2,$$

および,

$$u_{11}(D,a,C,C) = 2,\ u_{11}(D,a,C,D) = 1,\ u_{11}(D,C,D,C) = 1/2,$$

$$u_{11}(D,C,D,D) = -1/2,\ u_{11}(D,D,D,C) = 1,\ u_{11}(D,D,D,D) = 0$$

が容易に確認できる．これより，エージェント 11 の戦略 C が D によって弱く支配されることは明らか．■

こうして，$s^{\{k\}}$ は，$(ck1)$ が成り立ちナッシュ均衡であっても完全均衡とはならないことがあることが分かった．

次に，条件 $(ck1)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つ場合を考えよう．このとき $s^{\{k\}}$ が厳密なナッシュ均衡になるわけではないことに注意せよ[1]．なぜなら，$s^{\{k\}}$ においてプレイヤー i が，戦略を任意の s^K（$k \in K$）に変更するとき，彼は $s_i^{\{k\}}$ のときと同じ利得 $f_i(C, n-k)$ を得るからである．よって，$(ck1)$ が厳密な不等式で成り立つ場合であっても $s^{\{k\}}$ のプレイヤーの選択ミスに関する安定性は検討に値する．

定理 3.6. 条件 $(ck1)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つとき，$s^{\{k\}}$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ の強完全均衡である．

証明 . $\{\eta^\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ をゼロベクトルに収束する任意の列とする．各 $i = 1, ..., n$ について $b_i^\nu(Q_i^k, C) = 1 - \eta_i^\nu(Q_i^k, D)$，$b_i^\nu(Q_i^l, C) = \eta_i^\nu(Q_i^l, C)$（$l \neq k$）と定義される戦略プロファイル b^ν が，ν が十分に大きければ $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathscr{Q})$ のナッシュ均衡であることを示せばよい．上の定理 3.5 の証明が，$\varepsilon_i^0(\nu) = \eta_i^\nu(Q_i^0, D)$，$\varepsilon_i^k(\nu) = \eta_i^\nu(Q_i^k, C)(k \geq 1)$ について成り立つことに注意せよ．いま，$(ck1)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つので，Q_i^k において C を採るときの ρ^* による条件付き期待利得は D を採るときのそれよりも厳密な意味で大きい．また，上述のように仮定 (A.1) より，$Q_i^l(l \neq k)$ において D を採るときの ρ^* による条件付き期待利得は C を採るときのそれよりも厳密な意味で大きい．よって，この大小関係は，ν が十分大きいときの ρ^ν による条件付き確率においても維持される．よって，ν が十分に大きければ，b^ν は $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathscr{Q})$ のナッシュ均衡である．■

[1]厳密なナッシュ均衡については，プレイヤーの選択ミスに対し高い安定性を持ち，強完全均衡であることが知られている．(van Damme 1991 参照)

この定理から，条件 $(ck1)$ を満たすほとんどすべての利得関数において，$s^{\{0\}}$ は強完全均衡であるということができる．それは，正式には次のようにして利得関数の集合に測度を導入することによって述べることができる．

ジレンマゲームの利得関数の n 組は，$2n^2$ 個の $f_i(C,k)$ と $f_i(D,k)$ の値 $(k=0,1,...,n-1,$ $i=1,...,n)$ からなる．そこで，特定の利得関数の組を $2n^2$ 次元ユークリッド空間の１つの点に対応させると，ジレンマゲームとなる利得関数の全体は,（A.1）,（A.2）,（A.3）に対応する不等式条件を満たす $2n^2$ 次元ユークリッド空間の領域に対応する．その領域にルベーグ測度を定義する．条件 $(ck1)$ を満たす利得関数の組の集合に対し，$(ck1)$ がすべて厳密な不等式で成り立つ利得関数の組の集合は，同じルベーグ測度である．つまり，$s^{\{0\}}$ がナッシュ均衡となるほとんどすべての利得関数において $s^{\{0\}}$ は強完全均衡である．

次に，k 人が s^{ϕ} を残りの $n-k$ 人が $s^{\{0,...,k\}}$ を採る $\hat{s}^k$ の安定性について検討する．

定理 3.7. $k \leq n-2$ で条件 $(ck2)$ が成り立つとき，$\hat{s}^k$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ の逐次均衡である．

証明． s_i^{ϕ} を採るプレイヤーの集合を N_1，$s_i^{\{0,1,...,k\}}$ を採るプレイヤーの集合を N_2 で表す．$(\varepsilon_1^{\nu}(0,C),\varepsilon_1^{\nu}(0,D),...,\varepsilon_n^{\nu}(n-1,C),\varepsilon_n^{\nu}(n-1,D))$ を $\varepsilon_i^{\nu}(.,.)>0$ で $\nu \to \infty$ のときにゼロベクトルへ収束する列とする．行動戦略 b_i^{ν} を次のように定義する．N_1 に属するプレイヤーについては，すべての l について $b_i^{\nu}(l,C)=\varepsilon_i^{\nu}(l,C)$．$N_2$ に属するプレイヤーについては，$0 \leq l \leq k$ ならば，$b_i^{\nu}(l,C)=1-\varepsilon_i^{\nu}(l,D)$，$k+1 \leq l \leq n-1$ ならば，$b_i^{\nu}(l,C)=\varepsilon_i^{\nu}(l,C)$．このように定義すると，$\nu \to \infty$ のとき b^{ν} は $\hat{s}^k$ に収束する．$(b_1^{\nu},...,b_n^{\nu})$ において各情報集合のノードの上に導かれる条件付確率分布を ρ^{ν} で表し，$\lim_{t\to\infty}\rho^{\nu}=\rho^*$ とする．以下では，各情報集合において ρ^* のもとでの最適な選択が $\hat{s}^k$ の指定する選択と一致することを示す．まず，N_1 に属するプレイヤーついて考える．このグループに属するプレイヤーについては，どこの情報集合においても C，D の選択が後の手番のプレイヤーの行動に影響しない．よって，仮定（A.1）より，どの情報集合においても，C よりも D を採る方が ρ^* の下での条件付き期待利得が大きい．次に，N_2 に属するプレイヤーについて考える．定理 3.3 の証明において，$i \in N_2$ が $\hat{s}^k$ の下で到達し得る情報集合 Q_i^l（$l=0,1,...,k$）において，D よりも C を選択する方が条件付き期待利得を大きくすることが示された．$\hat{s}^k$ の下で，各 Q_i^l（$l=0,1,...,k$）へ到達したという条件のもとでのその中のノードへの到達確率の分布は，ρ^* によって指定されるものに一致する．情報集合 Q_i^l（ $l \geq k+1$）においては，$i \in N_2$ が C

と D のどちらを採っても，後の手番のプレイヤーは D を採るので，仮定（A.1）より，それらの情報集合においては，C よりも D を採る方が ρ^* の下での条件付き期待利得が大きい．以上によって求める結果が得られる．■

戦略プロファイル $\hat{s}^k$ は，条件 $(ck2)$ が成り立つ場合でも必ずしも完全均衡とはならない．付録Aを見よ．

定理 3.8. $k \leq n-2$ で条件 $(ck2)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つとき，$\hat{s}$ は $\Gamma(\mathscr{Q})$ の強完全均衡である．

証明． 定理 3.7 の証明を若干修正することにより示すことができる．b^ν が $\hat{s}^k$ に収束し，b^ν における各情報集合のノードの条件付き確率分布が ρ^* に収束するので，利得の不等式条件がこの定理の仮定のもとでは厳密な不等式で成り立つ．よって，条件付き確率のわずかな違いによって最適な選択が $\hat{s}^k$ におけるそれと変わらないことから，求める結論が得られる．■

最後に s^ϕ であるが，これは厳密なナッシュ均衡であるので，41 頁の脚注で述べたようにプレイヤーの選択ミスに対して高い安定性を持ち，強完全均衡である．

3.4 まとめ

この章では，非協力行動を採った人数が観察されるジレンマゲームについて均衡分析を行った．その結果，プレイヤー全員が協力行動を採る均衡，プレイヤー全員が非協力行動を採る均衡，一部のプレイヤーが協力行動を採る均衡など，様々なナッシュ均衡が存在することが示された．この結果から，ジレンマ的利得構造のもとであっても均衡プレイとして協力行動が採られる可能性があること，社会的ジレンマとして非協力行動が生じていてもそれは支配戦略として選択されているのではなく，１つのナッシュ均衡のプレイとして生じている可能性があることが明らかにされた．

上述のナッシュ均衡についてプレイヤーの選択ミスに対する安定性を検討した．結果は，表 3.4 のようにまとめられる．均衡の安定性を比較すると全員が非協力行動を行う均衡が厳密なナッシュ均衡であるために最も安定性が高い．しかしながら，それ以外の均衡もほとんどすべての場合に強完全均衡であるので相当の安定性をもつ．

表 3.2: $\Gamma(\mathscr{Q})$ の均衡

戦略プロファイル	逐次均衡	完全均衡	強完全均衡
$s^{\{k\}}$	○	×	＞のとき
s^{ϕ} と $s^{\{0,1,2,\ldots,k\}}$ の組み合わせ	○	×	＞のとき
s^{ϕ}	○	○	○

以上の結果は，$\Gamma(\mathscr{Q})$ には均衡選択問題があることを示している．複数のナッシュ均衡の中のどれが特に選ばれるべき均衡であるかという均衡選択問題は，これまでに多くの研究者に検討されてきたが，いまだ完成された理論はできあがっていない[2]．進化ゲームによる均衡選択は，近年における大きな成果であるが，$\Gamma(\mathscr{Q})$ のような n 人ゲームで各プレイヤーが多数の戦略を持つ場合には解析的な結果を出すことは難しい．$\Gamma(\mathscr{Q})$ の分析における課題として均衡選択問題があることを指摘して本章のまとめとする．

[2]Harsanyi and Selten（1988），van Damme（1991）などを参照せよ．

第4章　非協力行動の有無が観察されるジレンマゲームの均衡分析

4.1　本章の目的と概要

本章では，非協力行動の有無が観察されるジレンマゲーム $\Gamma(\mathscr{R})$ の均衡分析を行う．ここで考える情報構造 $\mathscr{R}$ は，第１章の事例２と３に対応するもので，プレイヤーの中の誰かが非協力行動を採るとき，他のプレイヤーには少なくとも１人のプレイヤーが非協力行動を採ったことが分かるというものである．$\mathscr{R}$ は，$\mathscr{Q}$ より荒い情報構造であり，非協力行動を観察できる情報構造としては最も荒いものということができる．

前章では $\Gamma(\mathscr{Q})$ が様々なナッシュ均衡を持つことを示した．情報構造の細かさは戦略の多様性につながるので，$\Gamma(\mathscr{R})$ におけるナッシュ均衡の多様性は $\Gamma(\mathscr{Q})$ のそれよりも少なくなると期待される．$\Gamma(\mathscr{R})$ がどのようなナッシュ均衡を持ちそれらがどのような安定性を持つかを調べることが本章の目的である．

次節において，ナッシュ均衡とその安定性を検討する．分析の結果，$\mathscr{R}$ においてもプレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡，一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡，全員が非協力行動を採るナッシュ均衡という様々な均衡の存在が示される．これらの安定性に関しても前章と同様の結果が得られる．

第３節では，特にプレイヤー全員が同一の線形利得関数をもつ場合について分析する．この場合には，ナッシュ均衡は全員が協力行動を採る均衡と全員が非協力行動を採る均衡の２種類に限られることが明らかにされる．

4.2　ナッシュ均衡とその安定性

$\Gamma(\mathscr{R})$ では，各プレイヤーが４つの戦略を持つが，それら間には次のような弱支配関係が存在する．

命題 4.1. $\Gamma(\mathscr{R})$ において CD は CC を DD は DC を弱支配する．特に，他のプレイヤーの中に DC または DD を採るプレイヤーが１人でもいるときは，CD（交替的に DD）を採るときの利得は，CC（交替的に DC）を採るときの利得よりも厳密に大きくなる．

証明． プレイヤー i より前に手番を持つプレイヤーがすべて C を採るとき，プレイヤー i は情報集合 R_i^0 に到達するので，CC と CD では行動 C を採り，DD と DC では行動 D を採る．よって，これらの対となる２つの戦略において利得は変わらない．プレイヤー i より前に少なくとも１人のプレイヤーが D を採るとき，i より後に手番をもつプレイヤー j は情報集合 R_j^1 に到達するので，その情報集合に指定された行動を採る．これはプレイヤー i の行動の選択に無関係であるから，仮定 (A.1) より，プレイヤー i は D を採った方が利得は高くなる．以上により命題の主張は明らか．■

この命題から次の系が得られる．

系 4.1. $\Gamma(\mathscr{R})$ において aC と Db（$a, b \in \{C, D\}$）の組み合わせはナッシュ均衡にならない．

$\Gamma(\mathscr{Q})$ の戦略プロファイル $s^{\{0\}}$ と $\Gamma(\mathscr{R})$ の戦略プロファイル $(CD, ..., CD)$ の間には密接な関連がある．$\mathscr{R}$ における情報集合 R_i^0 は，$\mathscr{Q}$ における Q_i^0 と等しい．どちらもプレイヤー i が最初の手番であるか，あるいは，彼の前のプレイヤーが全員 C を採るときに到達する意思決定ノードの集合だからである．よって，$\Gamma(\mathscr{R})$ の $(CD, ..., CD)$ における各プレイヤーの選択の仕方は，$\Gamma(\mathscr{R})$ の戦略 $s^{\{0\}}$ における選択の仕方と同一である．また，$\Gamma(\mathscr{R})$ における他の戦略 CC, DC, DD も $\Gamma(\mathscr{Q})$ における $s_i^{\{0,1,...,n-1\}}$，$s_i^{\{1,...,n-1\}}$，s_i^{ϕ} に対応する．よって，$\Gamma(\mathscr{Q})$ の $s^{\{0\}}$ において各プレイヤーが採り得る戦略は，$\Gamma(\mathscr{R})$ の $(CD, ..., CD)$ において採り得る戦略をすべて含む．したがって，$\Gamma(\mathscr{Q})$ の $s^{\{0\}}$ がナッシュ均衡であれば，$\Gamma(\mathscr{R})$ の $(CD, ..., CD)$ もナッシュ均衡である．逐次均衡に関しても，前者についての議論は，同様にして後者について成り立つ．よって，次の結果が得られる．

定理 4.1. 前章の定理 3.1 の条件 $(c1)$ が成り立つとき，$(CD, ..., CD)$ は $\Gamma(\mathscr{R})$ のナッシュ均衡であり逐次均衡である．

証明． 略．■

前章の例 3.1 において，２人ゲームの場合に $\Gamma(\mathscr{Q})$ の戦略プロファイル $s^{\{0\}}$ がナッシュ均衡であっても必ずしも完全均衡でないことが示された．２人ゲームの場合は $\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ は等し

いので，同じ例によって $\Gamma(\mathscr{R})$ の (CD, CD) がナッシュ均衡であっても必ずしも完全均衡でないことが示される．

$\Gamma(\mathscr{Q})$ においては，条件 $(c1)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つならば，$s^{\{0\}}$ は強完全均衡であった．$s^{\{0\}}$ と $(CD, ..., CD)$ の類似性から同様の論法によって $\Gamma(\mathscr{R})$ の $(CD, ..., CD)$ について次の命題が得られる．

定理 4.2. 条件 $(c1)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つとき，$(CD, ..., CD)$ は $\Gamma(\mathscr{R})$ の強完全均衡である

証明 . 略．■

プレイヤー全員が非協力行動を採る均衡も $\Gamma(\mathscr{Q})$ の場合と同様に存在する．

定理 4.3. すべてのジレンマ的利得関数において，$(DD, ..., DD)$ は $\Gamma(\mathscr{R})$ の厳密なナッシュ均衡である．

証明 . 略．■

次に示すように，$\Gamma(\mathscr{R})$ においては，CD と DD の組み合わせがナッシュ均衡になり得る．これは一部のプレイヤーが協力行動を採る均衡である．

定理 4.4. 次の条件 $(ck3)$ が成り立つとき，k 人（$k \geq 2$）が CD を採り $n-k$ 人が DD を採る戦略プロファイル s は，$\Gamma(\mathscr{R})$ のナッシュ均衡である．
条件 $(ck3)$：(i) CD を採るプレイヤー i について

$$\sum_{k_1,k_2:0\leq k_1+k_2\leq k-1} p(k_1,k_2:k-1)f_i(C,k_1+k_2) \geq \sum_{k_1,k_2:0\leq k_1+k_2\leq k-1} p(k_1,k_2:k-1)f_i(D,k_1),$$

(ii) DD を採るプレイヤーについて，

$$\sum_{k_1,k_2:0\leq k_1+k_2\leq k} p(k_1,k_2:k)f_i(C,k_1+k_2) \leq \sum_{k_1,k_2:0\leq k_1+k_2\leq k} p(k_1,k_2:k)f_i(D,k_1),$$

ただし，

$$p(k_1,k_2:m) = \frac{1}{n!}\binom{m}{k_1}k_1!\binom{m-k_1}{k_2}k_2!(n-m-1)(n-k_1-k_2-2)!$$

と定義する．

証明． まず，条件 (i) が成り立つとき，CD を採るプレイヤー i にとって R_i^0 では C が最適な選択であることを示す．i が R_i^0 で選択を行うのは，彼が先頭の手番であるか，彼の前のプレイヤーが全員 CD をとるプレイヤーである場合である．i の前の k_1 人（$k_1 \geq 0$）のプレイヤーが CD を採り，彼の後に k_2 人（$k_2 \geq 0$）のプレイヤーが CD を採り，その直後に DD を採るプレイヤーがいる状況を考える．このような並び方の数は，$n!p(k_1, k_2 : k-1)$ だけあり，この並び方において i は利得 $f_i(C, k_1+k_2)$ を得る．よって，条件 (i) の不等式の右辺を $|R_i^0|$ で割ったものが，R_i^0 においてプレイヤー i が C を採るときの条件付期待利得である．もし，プレイヤー i が R_i^0 で D を採るときは，上述の並び方において，彼の前にいるプレイヤーのみが C を採るので $f_i(D, k_1)$ の利得が得られる．よって，条件 (i) の不等式の左辺を $|R_i^0|$ で割ったものが，R_i^0 においてプレイヤー i が D を採るときの条件付期待利得である．よって，条件 (i) が成り立つとき，プレイヤー i の R_i^0 での最適な選択は C である．

次に，条件 (ii) の不等式が成り立つとき，DD を採るプレイヤー i にとって R_i^0 では D が最適な選択であることを示す．i が R_i^0 で選択を行う状況として先ほどと同じように，i の前の k_1 人（$k_1 \geq 0$）のプレイヤーが CD を採り，彼の後に k_2 人（$k_2 \geq 0$）のプレイヤーが CD を採り，その直後に DD を採るプレイヤーがいる状況を考える．このような並び方の数は $n(k_1, k_2 : k)$ あるが，この並び方において i は利得 $f_i(D, k_1)$ を得るので，条件 (ii) の不等式の左辺を $|R_i^0|$ で割ったものが，R_i^0 においてプレイヤー i が D を採るときの条件付期待利得である．もし，プレイヤー i が R_i^0 で C を採るときは，上述の並び方において，$f_i(D, k_1+k_2)$ の利得が得られる．よって，条件 (ii) の不等式の右辺を $|R_i^0|$ で割ったものが，R_i^0 においてプレイヤー i が C を採るときの条件付期待利得である．よって，条件 (ii) の不等式が成り立つとき，プレイヤー i の R_i^0 での最適な選択は D である．

どのプレイヤー j においても，R_j^0 以外の情報集合では，彼の前に少なくとも D を採ったプレイヤーがいるので，彼より後のプレイヤーはすべて D を採る．よって，利得関数の仮定（A1）より j にとって最適な選択は D である．こうして，上の条件 $(ck3)$ が成り立つとき，戦略プロファイル s はナッシュ均衡となる．■

安定性について次の定理が成り立つ．

定理 4.5. 条件 $(ck3)$ が成り立つとき，$k \geq 2$ 人が CD を採り $n-k$ 人が DD を採る戦略プ

ロファイル s は，$\Gamma(\mathscr{R})$ の逐次均衡である．

証明． 前節の定理 3.7 の証明と同様．■

条件 $(ck3)$ の不等式がすべて厳密な不等式で成り立つとき，上述の s は厳密なナッシュ均衡であることに注意せよ．前述したように厳密なナッシュ均衡は強完全均衡である．

4.3 線形利得関数のもとでのナッシュ均衡

前節で示したように $\Gamma(\mathscr{R})$ には複数のナッシュ均衡が存在する．本節では，利得関数のクラスを限定することによりナッシュ均衡の絞り込みが可能であるか否かを検討する．

n 人囚人のジレンマの利得関数としては，しばしば次のような利得関数が考察の対象となる．

$$f_i(C,k) = \alpha_i k,$$

$$f_i(D,k) = \alpha_i k + \beta_i,$$

ただし，α_i，$\beta_i > 0$，$\alpha_i(n-1) > \beta_i$．この利得関数を平行型線形利得関数と呼ぶ．これは，利得が他者の採る協力行動の数に比例し，非協力行動を採ることの利得の増分が他のプレイヤーの選択に関係なく一定という関数である．

Hamberger（1973）は，囚人のジレンマの多人数プレイヤーへの拡張を検討し，各プレイヤーの協力行動と非協力行動がそれぞれ自分への一定の利得と他者への一定の利得をもたらし，そのようにしてもたらされる利得の総和としてゲームの利得が決定するとき，各プレイヤーは平行型線形利得関数を持つことを示した[1]．多くの場合，協力行動の選択は，自分自身への負の効用と他者への外部経済をもたらす．非協力行動は，自分自身への正の効用と他者への外部不経済をもたらす．そのような効用と外部効果を総和として利得が評価できることが，Hamberger の示した平行型線形利得関数のための条件である．

本節では，平行型線形利得関数に焦点を当て，全員が同一の平行型線形利得関数をもつときに，いかなるナッシュ均衡が存在し得るかを検討する．

[1] Hamberger（1973）はこの性質を separable と呼んでいる．プレイヤー i の行動 $a_i = C, D$ が i 自身へ利得 v_{a_i} をもたらし，他のプレイヤー j の行動 $a_j = C, D$ がプレイヤー i へ利得 w_{a_j} をもたらし，これらの総和がプレイヤー i の全利得となるならば，$f_i(a,k) = v_{a_i} + kw_C + (n-k-1)w_D = v_{a_i} + k(w_C - w_D) + (n-1)w_D$ となる．ここで，$v_C < v_D$，$w_C > w_D$ であれば，これは平行型線形利得関数となる．

次の定理が成り立つ.

定理 4.6. すべてのプレイヤーが同一の平行型利得関数を持つとき，$\Gamma(\mathscr{R})$ には，CD と CC の組み合わせか，あるいは，$(DD, ..., DD)$ 以外にナッシュ均衡は存在しない.

証明 . 命題 4.1 より，プレイヤー i 以外のプレイヤーで少なくとも１人が DD か DC を採るとき，プレイヤー i としては，CC よりは CD を採る方が，DC よりは DD を採る方が期待利得は高くなる．よって，ナッシュ均衡となり得るのは，(i) CC と CD の組み合わせ，(ii) １人のみが DC で残り全員が CD を採る組み合わせ，(iii) CD と DD の組み合わせ，(iv) 全員が DD を採る組み合わせである．ここで，(ii) の１人のみが DC で残り全員が CD を採る組み合わせがナッシュ均衡であれば，DC を採るプレイヤーが DD を採るときもナッシュ均衡となる．したがって，定理を証明するためには，(iii) の CD と DD の組み合わせがナッシュ均衡にならないことを示せばよい．以下では，プレイヤーの選択肢を CD と DD に限定して考える．期待利得を $U(s_i, x)$ で表す．ここで，s_i は自分自身の採る戦略，x は自分以外のプレイヤーの中で CD を採るプレイヤーの人数を表す．仮定より，全員が同じ期待利得関数を持つことに注意せよ．さらに，$U_{dif.}(x) = U(CD, x) - U(DD, x)$ と定義する．いま，k 人が CD を採り，$n-k$ 人が DD を採る戦略プロファイルがナッシュ均衡であるとすると，CD を採っているプレイヤーについては,

$$U_{dif.}(k-1) = U(CD, k-1) - U(DD, k-1) \geq 0,$$

DD を採っているプレイヤーについては,

$$U_{dif.}(k) = U(CD, k) - U(DD, k) \leq 0$$

でなければならない．したがって，$U_{dif.}(x)$ が正の値をもつ範囲で増加関数であるならば，このような均衡は存在しない．ここで次の補題が成り立つ（補題の証明は次節で与える）.

補題 4.1. 関数 $U_{dif.}(x)$ は，$U_{dif.}(x) > 0$ の範囲で x の厳密な増加関数である．特に，$\alpha > \beta$ のときは，すべての $x \geq 0$ において $U_{dif.}(x)$ は x の厳密な増加関数である.

この補題により定理は証明される．■

この定理によって，平行型線形利得関数のもとでは，$\Gamma(\mathscr{R})$ のナッシュ均衡は，プレイヤー全員が協力行動を採る均衡と全員が非協力行動を採る均衡だけであるという二極性が成り立つことが判明した.

CD と CC からなる戦略プロファイルの均衡条件は，以下のように与えられる．

定理 4.7. 次の条件 $(ck4)$ が成り立つとき，k 人（$k \leq n-2$）のプレイヤーが CC を採り残りの $n-k$ 人のプレイヤーが CD を採る戦略プロファイルは，$\Gamma(\mathscr{R})$ のナッシュ均衡である．
条件 $(ck4)$：
(i) CC を採るプレイヤー i について

$$f_i(C, n-1) \geq \frac{1}{n-k+1} \sum_{l=0}^{n-k} f_i(D, k-1+l).$$

(ii) CD を採るプレイヤー i について

$$f_i(C, n-1) \geq \frac{1}{n-k} \sum_{l=0}^{n-k-1} f_i(D, k+l).$$

証明． (i) を示す．CC を採るプレイヤー i が，R_i^0 で D を採ることで，利得が増加しないことを示せばよい．彼がもしこの変更をすると，CD を採るプレイヤーが $n-k$ 人いて，彼らの中で i の後に手番を持つプレイヤーが D を採るので，i の期待利得は，(i) の不等式の右辺となる．よって，(i) の不等式が CC を採るプレイヤーの均衡条件となる．同様に，(ii) が CD を採るプレイヤーの均衡条件となる．$k = n-1, n$ の場合は，CD を採るプレイヤーが少なすぎて均衡条件が満たされないので排除する．■

この定理は，一般の利得関数に対して成り立つ．定理 4.6 で仮定された利得関数のもとでは，$k \geq 1$ のとき，

$$(ii) \text{ の不等式の右辺} - (ii) \text{ の不等式の右辺} = \alpha/2 > 0$$

であるので，均衡条件は (ii) のみとなり，それは

$$\frac{\alpha(n-k-1)}{2} \geq \beta$$

となる．

4.4 補題 4.1 の証明

この節では，定理 4.6 の証明で必要とした補題 4.1 の証明を行う．

１人のプレイヤーを任意に固定し，彼をプレイヤー i と呼ぶ．プレイヤー i 以外のプレイヤーについて，任意に x 人（$0 \leq x \leq n-1$）を固定し，彼らは CD を採り残りのプレイヤーは DD を採るとする．以下では CD を採るプレイヤーを CD プレイヤー，DD を採るプレイヤーを DD プレイヤーと呼ぶ．$U_{dif.}(x)$ は，この状況においてプレイヤー i が戦略を DD から CD に変更するときの彼の期待利得の増分である．

「自然」が順序を決定するときに，プレイヤー i の手番の前に１人も DD プレイヤーがいない状況を事象 A とする．プレイヤー i が CD を採るときと DD を採るときに異なるプレイを行うのは事象 A においてのみであることに注意せよ．事象 A において，プレイヤー i の前の CD プレイヤーの人数を確率変数 K_1 で表わし，プレイヤー i と彼の後に最初に手番をもつ DD プレイヤーとの間の CD プレイヤーの人数を確率変数 K_2 で表わす．事象 A において，プレイヤー i が CD を採るときの利得は $\alpha(K_1+K_2)$ であり，DD を採るときの利得は $\alpha K_1+\beta$ であるので，その差は $\alpha K_2-\beta$ である[2]．よって，事象 A の確率を $P_x(A)$，A における K_2 の条件付き期待値を $E_x(K_2|A)$ で表わすと，

$$\begin{aligned} U_{dif.}(x) &= P_x(A)E_x(\alpha K_2-\beta|A) \\ &= P_x(A)\{\alpha E_x(K_2|A)-\beta\} \end{aligned}$$

と表わせる．したがって，$U_{dif.}(x)$ と $U_{dif.}(x+1)$ の大小関係を得るためには，$P_x(A)$，$P_{x+1}(A)$，$E_x(K_2|A)$，$E_{x+1}(K_2|A)$ の関係を明らかにすればよい．

プレイヤー i 以外のプレイヤーの中で $x+1$ 人が CD を採る状況として，DD プレイヤーの１人をプレイヤー j と呼び，彼が CD を採る状況を考える．これら２つの状況の $P_x(A)$，$P_{x+1}(A)$，$E_x(K_2|A)$，$E_{x+1}(K_2|A)$ の関係を明らかにするために，順列を以下の３つのタイプに分ける．

タイプ１：プレイヤー i よりプレイヤー j は後で，i と j の間に少なくとも１人の DD プレイヤーがいる．

タイプ２：プレイヤー i よりプレイヤー j は後で，i と j の間に DD プレイヤーがいない．

タイプ３：プレイヤー i よりプレイヤー j は前である．

[2]利得関数が平行型線形利得関数であることにより，２つの戦略による利得の差をこのような簡単な形で表わすことができる．以下の証明はこれに大きく依存している．

図 4.1: タイプ１，２，３の並び方

$$\text{タイプ１}:\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_1}\,i\,\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_2}(DD)\,\bigcirc\cdots j\cdots\bigcirc$$

$$\text{タイプ２}:\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_1}\,i\,\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_2}\,j\,\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_3}(DD)\,\bigcirc\cdots\bigcirc$$

$$\text{タイプ３}:\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_1}\,j\,\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_2}\,i\,\underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_3}(DD)\,\bigcirc\cdots\bigcirc$$

タイプ１において，プレイヤー i の前のプレイヤーの数を l_1，プレイヤー i と彼の後に最初に手番を持つ DD プレイヤーとの間のプレイヤーの数を l_2 とする．タイプ２において，プレイヤー i の前のプレイヤーの数を l_1，プレイヤー i と j との間のプレイヤーの数を l_2，j と彼の後に最初に手番を持つ DD プレイヤーとの間のプレイヤーの数を l_3 とする．タイプ３において，プレイヤー j の前のプレイヤーの数を l_1，j とプレイヤー i との間のプレイヤーの数を l_2，i と彼の後に最初に手番を持つ DD プレイヤーとの間のプレイヤーの数を l_3 とする．（図 4.1 参照[3]．）

タイプ１，２，３の順列の数をそれぞれ n_1，n_2，n_3 で表わす．プレイヤー j が DD を採り，CD プレイヤーの数が x のときの事象 A に含まれる順序の数を $n_A(x)$ で表わすと，$n_A(x) = n_1 + n_2$ である．プレイヤー j が CD を採り，CD プレイヤーの数が $x+1$ のときの事象 A に含まれる順序の数を $n_A(x+1)$ で表わすと，$n_A(x+1) = n_1 + n_2 + n_3$ である．

タイプ１で特定の l_1，l_2 の値となる順序の数を $g_1(l_1, l_2)$，タイプ２，３で特定の l_1，l_2，l_3 の値となる順序の数を $g_2(l_1, l_2, l_3)$，$g_3(l_1, l_2, l_3)$ と表わす．$g_1(l_1, l_2)$ は，次のように表わされる．

$$\begin{aligned} g_1(l_1, l_2) &= \binom{x}{l_1} l_1! \binom{x-l_1}{l_2} l_2!(n-x-2)(n-l_1-l_2-2)! \\ &= (n-x-1)\frac{x!(n-l_1-l_2-2)!}{(x-l_1-l_2)!} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで，$\binom{x}{l_1} l_1!$ はタイプ１の並び方で i より前の l_1 人の CD プレイヤーを選んで並べる順列の数，$\binom{x-l_1}{l_2} l_2!$ は i の後の l_2 人の CD プレイヤーを選んで並べる順列の数である．$(n-x-2)$ は i と j 以外のプレイヤーの数 $(n-2)$ から CD プレイヤーの数 x を引いたもので j 以外の DD プレイヤーの数であり，$(n-l_1-l_2-2)!$ は残りのプレイヤーを並べる順列の

[3] この図で，(CD) と (DD) は，それぞれ CD プレイヤーと DD プレイヤーを表わす．また○は任意のプレイヤーを表わす．

数である．$g_2(l_1,l_2,l_3)$ と $g_3(l_1,l_2,l_3)$ も同様にして求めることができる．これらの関数を使うと上述の n_1, n_2, n_3 は，$n_1 = \sum_{0\le l_1+l_2\le x} g_1(l_1,l_2)$, $n_2 = \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_2(l_1,l_2,l_3)$, $n_3 = \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_3(l_1,l_2,l_3)$ と表わされることに注意せよ．ここで，

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \sum_{0\le l_1+l_2\le x} g_1(l_1,l_2)l_2, \\ m_2(x) &= \sum_{0\le l_1+l_2\le x} g_2(l_1,l_2,l_3)l_2 \end{aligned}$$

と定義すると，

$$E_x(K_2|A) = \frac{1}{n_A(x)}\{m_1(x)+m_2(x)\}$$

と表わせる．また，

$$\begin{aligned} m_1(x+1) &= \sum_{0\le l_1+l_2\le x} g_1(l_1,l_2)l_2, \\ m_2(x+1) &= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_2(l_1,l_2,l_3)(l_2+l_3+1), \\ m_3(x+1) &= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_3(l_1,l_2,l_3)l_3 \end{aligned}$$

と定義すると，

$$E_{x+1}(K_2|A) = \frac{1}{n_A(x+1)}\{m_1(x+1)+m_2(x+1)+m_3(x+1)\}$$

と表わせる．

$E_x(K_2|A)$ と $E_{x+1}(Y_2|A)$ を比較するために参照点として次のような並び方を考える．上で述べた CD プレイヤーが x 人いる状況で j でない DD プレイヤーを任意に 1 人固定してプレイヤー k と呼び，プレイヤー i よりも k は後で，i と j の間に DD プレイヤーがいない並び方をタイプ 0 とし，i より前のプレイヤーの数を l_1，i と k の間のプレイヤーの数を l_2，k とその後に最初に来る DD プレイヤーとの間のプレイヤーの数を l_3 で表わす（図 4.2 参照）．タイプ 0 の順列の数を n_0，タイプ 0 で特定の l_1，l_2，l_3 における順列の数を $g_0(l_1,l_2,l_3)$ とすると，

$$\begin{aligned} g_0(l_1,l_2,l_3) &= \binom{x}{l_1} l_1! \binom{x-l_1}{l_2} l_2! \binom{x-l_1-l_2}{l_3} l_3! (n-x-2)(n-l_1-l_2-l_3-3)! \\ &= (n-x-2)\frac{x!(n-l_1-l_2-l_3-3)!}{(x-l_1-l_2-l_3)!} \end{aligned} \tag{4.2}$$

図 4.2: タイプ 0 の並び方

$$\text{タイプ}\,0: \underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_1}\, i\, \underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_2}\, k\, \underbrace{(CD)\cdots(CD)}_{l_3}(DD)\,\bigcirc\cdots\bigcirc$$

と表わせる．ここで，$\binom{x}{l_1}l_1!$ は i の前の l_1 人の CD プレイヤーを選び出して並べる順列の数，$\binom{x-l_1}{l_2}l_2!$ は i と k の間の l_2 人の CD プレイヤーを選び出して並べる順列の数，$\binom{x-l_1-l_2}{l_3}l_3!$ は k と最初の DD プレイヤーの間の l_3 人の CD プレイヤーを選び出して並べる順列の数，$(n-x-2)$ は k 以外の DD プレイヤーの数，$(n-l_1-l_2-l_3-3)!$ は残りのプレイヤーの順列の数である．さらに

$$m_0 = \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_0(l_1,l_2,l_3)l_2$$

と定義する．これらの値と上述の n_1，n_2，n_3，$m_1(x)$，$m_2(x)$，$m_1(x+1)$，$m_2(x+1)$，$m_3(x+1)$ の関係を考える．n_1, n_2, n_3, n_0 について以下の（1）から（3）が成り立つ．

（1）タイプ 2 とタイプ 0 の並び方の違いは，プレイヤー j と k の名前の違いでしかないから，$g_2(l_1,l_2,l_3) = g_0(l_1,l_2,l_3)$ であり $n_2 = n_0$ が成り立つ．
（2）タイプ 2 の並び方で i と j の名前を付け替えたものがタイプ 3 の並び方であるから，$g_3(l_1,l_2,l_3) = g_0(l_1,l_2,l_3)$ であり $n_3 = n_0$ が成り立つ．
（3）タイプ 1 の並び方で最初の DD プレイヤーとなり得るプレイヤーは，$(n-x-1)$ 人の DD プレイヤーの中で j 以外のプレイヤーである $(n-x-2)$ 人であり，そのような DD プレイヤー 1 人ずつについてタイプ 1 の並び方はタイプ 0 の並び方となるので，$n_1 = (n-x-2)n_0$ が成り立つ．

さらに，m_0, $m_1(x)$，$m_2(x)$，$m_1(x+1)$，$m_2(x+1)$，$m_3(x+1)$ の関係について考えよう．まず，$g_2(l_1,l_2,l_3) = g_0(l_1,l_2,l_3)$ により明らかに $m_2(x) = m_0$ である．また，$m_2(x+1)$ を

求めると

$$
\begin{aligned}
m_2(x+1) &= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_0(l_1,l_{2,3})(l_2+l_3+1) \\
&= (n-x-2)\sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x}\frac{x!(n-l_1-l_2-l_3-3)!}{(x-l_1-l_2-l_3)!}l_2 \\
&\qquad + (n-x-2)\sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x}\frac{x!(n-l_1-l_2-l_3-3)!}{(x-l_1-l_2-l_3)!}l_3 \\
&\qquad + (n-x-2)\sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x}\frac{x!(n-l_1-l_2-l_3-3)!}{(x-l_1-l_2-l_3)!}
\end{aligned}
$$

となるが，最終式右辺の各項は $l_1+l_2+l_3$ の大きさのみに依存するので，第１項＝第２項＝m_0 である．また，第３項＝ n_0 である．よって，

$$m_2(x+1) = 2m_0 + n_0$$

が得られる．また，タイプ０において l_1 と l_2 のみを特定して l_3 を任意の数とした場合の順序の数は，

$$h_0(l_1,l_2) = \binom{x}{l_1}l_1!\binom{x-l_1}{l_2}l_2!(n-l_1-l_2-2)!$$

であり，これによって

$$m_0 = \sum_{0\le l_1+l_2\le x} h_0(l_1,l_2)l_2$$

と表せる．タイプ１の並び方は，最初の DD プレイヤーを k と呼べば，タイプ０の並び方となるが，そのような k の候補は $(n-x-2)$ 人いるので，

$$g_1(l_1,l_2) = (n-x-2)h_0(l_1,l_2)$$

が成り立つ．よって，

$$m_1(x) = m_1(x+1) = (n-x-2)m_0$$

が得られる．また，タイプ３の並び方は，タイプ０で i と k を入れ替えてさらに j を k と呼んだものと同じだから，

$$
\begin{aligned}
m_3(x+1) &= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_3(l_1,l_2,l_3)l_3 \\
&= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_0(l_1,l_2,l_3)l_3 \\
&= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} (n-x-2)\frac{x!(n-l_1-l_2-l_3-3)!}{(x-l_1-l_2-l_3)!}l_3 \\
&= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} (n-x-2)\frac{x!(n-l_1-l_2-l_3-3)!}{(x-l_1-l_2-l_3)!}l_2 \\
&= \sum_{0\le l_1+l_2+l_3\le x} g_0(l_1,l_2,l_3)l_2 \\
&= m_0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上により，

$$
\begin{aligned}
E_x(K_2|A) &= \frac{(n-x-2)m_0+m_0}{(n-x-2)n_0+n_0} = \frac{m_0}{n_0}, \\
E_{x+1}(K_2|A) &= \frac{(n-x-2)m_0+(2m_0+n_0)+m_0}{(n-x-2)n_0+n_0+n_0} = \frac{(n-x+1)m_0+n_0}{(n-x)n_0},
\end{aligned}
$$

が得られる．よって，

$$
\begin{aligned}
n!U_{dif.}(x) &= \{n_1+n_2\}\{\frac{m_0}{n_0}\alpha-\beta\} \\
&= (n-x-1)n_0\{\frac{m_0}{n_0}\alpha-\beta\} \\
&= (n-x-1)(m_0\alpha-n_0\beta) \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n!U_{dif.}(x+1) &= \{n_1+n_2+n_3\}\{\frac{(n-x+1)m_0+n_0}{(n-x)n_0}\alpha-\beta\} \\
&= (n-x)n_0\{\frac{(n-x+1)m_0+n_0}{(n-x)n_0}\alpha-\beta\} \\
&= \{(n-x+1)m_0+n_0\}\alpha-(n-x)n_0\beta \\
&= (n-x-1)(m_0\alpha-n_0\beta)+(2m_0+n_0)\alpha-n_0\beta \\
&= n!U(x)+(2m_0+n_0)\alpha-n_0\beta \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．(4.3) 式より，$U_{dif.}(x)>0$ であれば $m_0\alpha-n_0\beta>0$ でなければならないが，このとき，(4.4) 式で $(2m_0+n_0)\alpha-n_0\beta=(m_0+n_0)\alpha+(m_0\alpha-n_0\beta)>0$ であるので，$U_{dif.}(x+1)>U_{dif.}(x)$ が成り立つ．$\alpha>\beta$ のときは，$(2m_0+n_0)\alpha-n_0\beta=2m_0\alpha+n_0(\alpha-\beta)>0$ であるので，すべての $x\ge 0$ において $U_{dif.}(x+1)>U_{dif.}(x)$ が成り立つ．以上により証

明が完了する．■

4.5 まとめ

この章では，非協力行動の有無が観察される情報構造をもつジレンマゲームについて均衡分析を行った．その結果，前章と同様にプレイヤー全員が協力行動を採る均衡，プレイヤー全員が非協力行動を採る均衡，一部のプレイヤーが協力行動を採る均衡が存在することが示された．これらの均衡について安定性を検討した結果は，表 4.1 のようにまとめられる．

表 4.1: $\Gamma(\mathscr{Q})$ の均衡

戦略プロファイル	逐次均衡	完全均衡	強完全均衡
$(CD, ..., CD)$	○	×	＞のとき
CD と DD の組み合わせ	○	×	＞のとき
$(DD, ..., DD)$	○	○	○

本章の結果は，非協力行動の有無が観察されるという荒い情報構造においても，ジレンマ的利得構造のもとで社会的ジレンマは解消され得ることを示している．また既に生起している社会的ジレンマについても非協力行動が支配戦略としてではなくナッシュ均衡戦略として採られている可能性を示唆している．

前章の $\Gamma(\mathscr{Q})$ では複数均衡の問題が指摘された．$\Gamma(\mathscr{R})$ においても同様の問題が存在することが判明したが，プレイヤー全員が同一の平行型線形利得関数を持つ場合には，ナッシュ均衡は 2 種類に絞り込まれ複数均衡問題が部分的に解決することが示された．$\Gamma(\mathscr{R})$ の複数均衡問題については，第 6 章の進化的安定性の分析の第 6.3 節で再び採りあげる．

第5章　協力行動の実現に対する情報構造の有効性

5.1　本章の目的と概要

第３章と第４章の分析によって，非協力行動の数が観察される情報構造をもつジレンマゲーム $\Gamma(\mathscr{Q})$ と非協力行動の有無が観察される情報構造をもつジレンマゲーム $\Gamma(\mathscr{R})$ においては，利得関数が一定の条件を満たすとき，全員または一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡が存在することが明らかにされた．

情報構造をもつジレンマゲームには，$\mathscr{Q}$ や $\mathscr{R}$ 以外にも様々な情報構造を考えることができる．それらの情報構造をもつジレンマゲームの中にも，全員または一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡を持つものがあり得る．この章では，そのような情報構造と比較して，$\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ が協力行動を実現することに対してより有効性が高いか否かを検討する．

次節では，まずプレイヤー全員による協力行動の実現について情報構造の有効性を検討し，あらゆる情報構造の中で $\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ は，最も有効性が高い情報構造であることを示す．第３節では，一部のプレイヤーによる協力行動の実現に関する情報構造の有効性を検討する．ここでは，情報構造と戦略プロファイルに対称性の概念を導入し，対称な情報構造と対称なナッシュ均衡に限定して有効性を比較する．分析の結果，任意の人数の協力行動の実現に対して $\mathscr{Q}$ が最も有効性の高い情報構造であることが明らかになる．

5.2　プレイヤー全員の協力行動の実現に対する情報構造の有効性

社会的ジレンマの解消においてまず目指すべき状態は，すべてのプレイヤーが協力行動を採る状態である[1]．この節では，プレイヤー全員の協力行動の実現に対する情報構造の有

[1]社会的ジレンマの解消可能性が検討されるとき，より多くのプレイヤーが協力行動を採る状態が社会にとってより良い状態であることが暗黙の前提となる．しかし，社会の状態の優劣を経済厚生によって評価する伝統的な経済学の観点に立てば，これは必ずしも正しくない．ジレンマ的利得構造のもとでは，協力行動を採るプ

効性を検討する．

次の定理が成り立つ．

定理 5.1. $\mathscr{P}$ を任意の情報構造とする．$\Gamma(\mathscr{P})$ においてプレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡が存在するならば，条件 $(c1)$ が成り立たなくてはならない．

証明． s を $\Gamma(\mathscr{P})$ においてそのプレイでプレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡であるとする．ここで，プレイヤー i のみが s_i の代わりに $\mathscr{P}_i$ のすべての情報集合で D をとる戦略に変更したとする．このときプレイヤー i の期待利得は，

$$v \equiv \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} f_i(D, \pi(i) - 1 + k_i(\pi, s))$$

となる．ここで $k_i(\pi, s)$ は，順序 π において，プレイヤー i が D をとり，他のプレイヤー j（$j \neq i$）が s_j に従うとき，プレイヤー i の後に C を採るプレイヤーの数を表す．s は，全員の協力が実現するナッシュ均衡であるから，プレイヤー i の手番の前には誰も D を採らない．よって，順序 π においては，$\pi(i)-1$ 人のプレイヤーが彼の前に C を採る．したがって，π において，プレイヤー i が D を採るとき，$\pi(i)-1+k_i(\pi, s)$ 人が C を採るプレイヤーの数となる．s は，全員の協力が実現するナッシュ均衡だから，$f_i(C, n-1) \geq v$ がすべての $i \in N$ について成り立つ．ここで，仮定（A.3）より，$v \geq (1/n!)\sum_{\pi\in\Pi} f_i(D, \pi(i) - 1)$ が成り立つ．さらに，右辺において $\pi(i) - 1 = k$ となる π は，各 $k = 0, ..., n-1$ について $(n-1)!$ 個あるので，右辺 $= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i(D, k)$ が成り立つ．よって，$f_i(C, n-1) \geq (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} f_i(D, k)$，つまり条件 $(c1)$ の不等式が成り立たなければならない．■

$\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ においては，誰かが D を採ったことが確実に他者に観察される．これによって $s^{\{0\}}$ や $(CD, ..., CD)$ では，誰かが D を採ったときそれが D の連鎖を引き起こし，それが D の選択を抑制する．これ以上に強く D の選択を抑制するものはないことがこの定理が成り立つ理由である．

２つの情報構造 $\mathscr{P}$ と $\mathscr{P}'$ において，どちらも利得関数が何らかの条件を満たすならば，プレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡が存在するとしよう．ただし，その条件は，前者の条件が後者の条件の必要条件であるとすると，前者の均衡条件の方がより弱い条件で

レイヤーが多い状態の方がそれの少ない状態よりパレート劣位になることがあり得る．このようなことが生じないためには，利得関数が一定の条件を満たさなければならない．詳しくは付録Bを参照せよ．

あるといえる．そこで，このような場合，プレイヤー全員の協力行動の実現に対して，前者の方が後者より有効性が高いと定義する．上の定理から，$\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ は，プレイヤー全員による協力行動の実現に対して最も有効性が高い情報構造である．

5.3 対称性のもとでの情報構造の有効性

第３章と第４章で見たように，プレイヤー全員が協力行動を採るナッシュ均衡が存在しなくても，一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡は存在する場合がある．本節では，一部のプレイヤーの協力行動の実現に対して有効な情報構造について検討する．

次の例は，n より小さい期待協力者数の実現に対して最も有効な情報構造は $\mathscr{Q}$ や $\mathscr{Q}$ とは異なるものとなり得ることを示している．

例 5.1. $n = 3$ で以下に述べるような情報構造 $\mathscr{P}^* = \{\mathscr{P}_1^*, \mathscr{P}_2^*, \mathscr{P}_3^*\}$ を持つジレンマゲームを考える．順序 $(1, 2, 3)$ に注目し，この順序でプレイヤー１と２が C を採ったとき到達するプレイヤー３のノードを x_3 とする．非協力行動の有無が観察される情報構造 $\mathscr{R}$ を使って，$\mathscr{P}_i^* = \mathscr{R}_i$（$i = 1, 2$），$\mathscr{P}_3^* = \{R_3^0 - \{x_3\}, R_3^1, \{x_3\}\}$ と定義する．$\mathscr{P}^*$ では，x_3 へ到達したことをプレイヤー３が識別できる点が $\mathscr{R}$ と異なる．ここで，プレイヤー３の戦略として，$s_3(R_k^0 - \{x_3\}) = C$，$s_3(R_3^1) = s_3(\{x_3\}) = D$ を考える．このとき戦略プロファイル (CD, CD, s_3) は次の条件が成り立つときナッシュ均衡となる． $i = 1, 2$ について

$$(1/6)f_i(C, 1) + (5/6)f_i(C, 2) \geq (1/3)\{f_i(D, 0) + f_i(D, 1) + f_i(D, 2)\},$$

$$(5/6)f_3(C, 2) + (1/6)f_3(D, 2) \geq (1/3)\{f_3(D, 0) + f_k(D, 1) + f_3(D, 2)\}.$$

プレイヤー１と２においては，この戦略プロファイルでは，$(1, 2, 3)$ 以外では，自分以外の２人のプレイヤーが C を採り，$(1, 2, 3)$ では自分以外の１人のプレイヤーが C を採るので，上記の不等式左辺の期待利得が得られる．上の戦略から逸脱して C の代わりに D を採ると，(CD, CD, CD) のときの逸脱と同様のプレイとなり上式の右辺のような期待利得となる．プレイヤー３においては，$(1, 2, 3)$ では D をそれ以外の順序では C を採るがどちらでも他の２人のプレイヤーは C を採るので，この戦略プロファイルでは上の不等式の左辺が期待利得となる．彼が上の戦略から逸脱する場合，利得が増大する可能性があるのは $R_3^0 - \{x_3\}$ で D を採る場合である．このとき，(CD, CD, CD) のときの逸脱と同様のプレイとなるので，

彼は上の不等式の右辺の期待利得を得る．こうして上の３つの不等式が均衡条件となる．なお，$f_i(C,1) < f_i(D,2)$ から上の不等式条件の中では，プレイヤー３のものが最も弱い条件である．

何らかの情報構造において，プレイヤー３が１つの順序のプレイで D を他の順序のプレイでは C を採りプレイヤー１と２はすべての順序のプレイで C を採る戦略プロファイルがナッシュ均衡となる条件としては，上の均衡条件よりも弱いものは存在しないことが Nishihara（2008）によって保証される[2]．□

上の例は，一般の期待協力者数の実現に対しては，プレイヤーの名前に依存した情報構造において最も弱い条件でナッシュ均衡が存在することを示している．そのような情報構造は，$\mathscr{Q}$ や $\mathscr{R}$ とは異なるものである．

ここで考慮すべき情報構造の範囲を限定することを考えよう．そもそも本論文の議論は非協力行動の観察可能性を考慮して情報構造を再検討することから始まった．行動の観察可能性は，対象とする状況の非協力行動が何であるかによって決まるもので，それは個人の特性には依存しない．実際，$\mathscr{Q}$ や $\mathscr{R}$ の構造はそのような構造をもつ．この点を重視して，以下では各プレイヤーが本質的に同一の情報を得ることのできる情報構造に限定して有効性を検討することを試みる．

プレイヤー全員が本質的に同一の情報構造をもつとき，彼らは本質的に同一の戦略的構造を持ち，本質的に同一の行動様式である戦略を採ることができる．例えば，$\Gamma(\mathscr{Q})$ における $s^{\{k\}}$ では，各プレイヤーは「自分の前に k 人が D を採るときには C を採る」という戦略を採るが，この行動様式はどのプレイヤーにおいても本質的に同一であると言うことができる．

Harsanyi and Selten (1988) では，複数のナッシュ均衡からの均衡選択問題が検討されているが，その中で彼らは各プレイヤーが本質的に同一の戦略的構造をもつゲームを考察し次のように述べている：

合理的な均衡選択理論は戦略的考察のみに基づくものであり，それがいかなるものであっ

[2] これは Nishihara（2008）の Lemma 2 (b) による．この補題により，このようなプレイとなるあらゆる場合（それは実質的には，プレイヤー３が D を採るとき彼の手番が，１番目のときか，２番目のときか，３手番目のときかの３種類であるが）について最も弱い均衡条件が与えられる．それらの条件の比較によって上で求めた均衡条件が最も弱いものであることが確認できる．

ても同形に関する不変性は不可欠な要請であると我々は判断している．(In our judgment invariance with respect to isomorphisms is an indispensable requirement for any rational theory of equilibrium point selection that is based on strategic consideration exclusively. Harsanyi and Selten 1988, p. 73.)

ここで「同形（isomorphism）」とは，ゲームの構造がプレイヤーの名前に依存しないという性質である．以下では，この考え方に従い，各プレイヤーが本質的に同一の情報構造をもつ場合は，合理的なナッシュ均衡としてすべてのプレイヤーが本質的に同一の行動様式をもつものに注目することにする．

情報構造と戦略プロファイルについてプレイヤーの間の本質的同一性を定式化するために以下のように記号と定義を追加する．$\varphi : N \to N$ を**名前の付け替え**と呼び，Φ を名前の付け替えの全体とする．例えば，$n = 3$ で，名前の付け替え $\varphi \in \Phi$ が，$(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)) = (3, 1, 2)$ であるとすると，この φ は，プレイヤー 1, 2, 3 を新たにプレイヤー 3, 1, 2 と呼び替える名前の付け替えである．$\varphi(\pi)$ は，名前の付け替え $\varphi \in \Phi$ によって手番の順序 π が新しい名前で表されたものである．

各 $i \in N$ について X_i の要素を (π, α) で表す．ここで，α は，ϕ または $(a_1, ..., a_m)$（$m \leq n$, $a_k \in \{C, D\}$）で，(π, ϕ) は「自然」によって π が選ばれた後の 1 番目の手番のプレイヤーの意思決定ノードを表し，$(\pi, (a_1, ..., a_m))$ は $\pi \in \Pi$ の後に行動の列 $(a_1, ..., a_m)$ が採られたときに到達する $m + 1$ 番目の手番のプレイヤーの意思決定ノードを表す．

$\varphi \in \Phi$ が与えられたとき，$\psi^1_\varphi : X \to X$ を $x = (\pi, \alpha) \in X$ に $(\varphi(\pi), \alpha) \in X$ を対応させる写像であると定義する．情報構造の全体を $\mathscr{S}$ で表す．$\varphi \in \Phi$ が与えられたとき，$\psi^2_\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ を $\{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_n\}$ に $\{\hat{\mathscr{P}}_{\varphi(1)}, ..., \hat{\mathscr{P}}_{\varphi(n)}\}$ を対応させる写像であると定義する．ただし，$\hat{\mathscr{P}}_{\varphi(i)} = \{\psi^1_\varphi(P^k_i) : P^k_i \in \mathscr{P}_i\}$ とする．これは，プレイヤー i の情報構造 $\mathscr{P}_i$ に対して，各情報集合をその中のノードを ψ^1_φ で写してできる情報集合からなる情報構造である．

定義 5.1. 任意の $\varphi \in \Phi$ について

$$\mathscr{P} = \psi^2_\varphi(\mathscr{P}) \tag{5.1}$$

であるとき，情報構造 $\mathscr{P}$ は対称であるという．

この定義の意味は以下の通りである．プレイヤー i を固定し，$\varphi(i) = j$ とする．条件 (5.1)

は，もしすべてのプレイヤーが φ によって名前を付け替えられるならば，$\mathscr{P}_i$ と $\mathscr{P}_j$ は意思決定ノードの分割の仕方が本質的に同じであることを言っている．$\mathscr{P}_i$ は，プレイヤー i が獲得できる情報を表す．よって, 条件 (5.1) が成り立つならば，プレイヤー i の情報が，名前の付け替えの後のプレイヤー j の獲得できる情報と等しいことになり，プレイヤー j がプレイヤー i と同じ視点を持つことを意味している．定義 5.1 は，この同等性が，任意の名前の付け替えと任意のプレイヤーについて成り立っていることを述べている．つまり，すべてのプレイヤーが同等の視点を持つことを言っている

例 5.2. $n = 2$ の状況を考える．2 つの順序を $\pi_1 = (1, 2)$，$\pi_2 = (2, 1)$，で表す．プレイヤー 1，2 の意思決定ノードの集合は，$X_1 = \{(\pi_1, \phi), (\pi_2, C), (\pi_2, D)\}$，$X_2 = \{(\pi_2, \phi), (\pi_1, C), (\pi_1, D)\}$ である．このとき，以下の (1) から (5) が成り立つ．

(1) $\mathscr{P}_1 = \{\{(\pi_1, \phi)\}, \{(\pi_2, C)\}, \{(\pi_2, D)\}\}$，$\mathscr{P}_2 = \{\{(\pi_2, \phi)\}, \{(\pi_1, C)\}, \{(\pi_1, D)\}\}$ であるとき，$\mathscr{P} = \{\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2\}$ は完全情報を表し，対称な情報構造である．

(2) $\mathscr{P}_1 = \{X_1\}$，$\mathscr{P}_2 = \{X_2\}$ であるとき，$\mathscr{P} = \{\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2\}$ は，無情報の状況を表し，対称な情報構造である．

(3) $\mathscr{P}_1 = \{\{(\pi_1, \phi), (\pi_2, C)\}, \{(\pi_2, D)\}\}$，$\mathscr{P}_2 = \{\{(\pi_2, \phi), (\pi_1, C)\}, \{(\pi_1, D)\}\}$ であるとき，$\mathscr{P} = \{\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2\}$ は，非協力行動の有無が観察される情報構造を表し，対称な情報構造である．

(4) $\mathscr{P}_1 = \{\{(\pi_1, \phi)\}, \{(\pi_2, D)\}, \{(\pi_2, C)\}\}$，$\mathscr{P}_2 = \{\{(\pi_2, \phi)\}, \{(\pi_1, D)\}, \{(\pi_1, C)\}\}$ であるとき，$\mathscr{P} = \{\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2\}$ は，対称な情報構造である．

(5) $\mathscr{P}_1 = \{\{(\pi_1, \phi)\}, \{(\pi_2, D), (\pi_2, C)\}\}$，$\mathscr{P}_2 = \{\{(\pi_2, \phi)\}, \{(\pi_1, D), (\pi_1, C)\}\}$ であるとき，$\mathscr{P}$=$\{\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2\}$ は，対称な情報構造である．

これ以外の情報構造で対称なものはない． ■

次に，戦略プロファイルの対称性を定義する．(5.1) 式の条件において, 任意の $P_i \in \mathscr{P}_i$ は，$P_i = \varphi(P'_i)$ によって $P'_i \in \mathscr{P}_{\varphi(i)}$ に対応する．プレイヤー i とプレイヤー $\varphi(i)$ が，このようにして対応する 2 つの情報集合において同じ行動を選択するものであれば，彼らの行動様式が同等であると言うことができる．この考え方によって次の定義を与える．

定義 5.2. 対称な情報構造 $\mathscr{P}$ の戦略プロファイル $s \in S(\mathscr{P})$ において，任意の $\varphi \in \Phi$，$i \in N$，$P_i \in \mathscr{P}$ について，$s_i(P_i) = s_{\varphi(i)}(\varphi(P_i))$ が成り立つとき，s は**対称**であると定義

する．

命題 5.1. $\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ は対称な情報構造であり，これらの情報構造において，$(s_1^K, ..., s_n^K)$ と $(ab, ab, ..., ab)$ は対称な戦略プロファイルである．

証明． $\mathscr{Q}$ において，プレイヤー i の情報集合 Q_i^k について考える．これは，i の手番の前までにちょうど k 人が D を採ったときに到達する i のノードからなる．これは，プレイヤーの番号がどのようにつけられているかに依存しない．よって，任意の $\varphi \in \Phi$ について，$Q_{\varphi(i)}^k = \varphi(Q_i^k)$ が成り立つ．よって，任意の $\varphi \in \Phi$ について，$\mathscr{Q}_{\varphi(i)} = \varphi(\mathscr{Q}_i)$ が成り立つので，$\mathscr{Q}$ は対称な情報構造である．$\mathscr{R}$ についても同様．戦略プロファイルの対称性は定義より明らか．■

戦略プロファイル s が対称でナッシュ均衡であるとき，s は**対称なナッシュ均衡**であるという．対称な戦略プロファイルについて，次の性質が成り立つ．

命題 5.2. 対称な情報構造 $\mathscr{P}$ における戦略プロファイル s が対称なとき，任意の 2 つの順序 $\pi, \pi' \in \Pi$ における s のプレイ $a(s, \pi)$ と $a(s, \pi')$ は等しい．

証明． $a(s, \pi) = (a_1, ..., a_n)$，$a(s, \pi') = (a'_1, ..., a'_n)$ と表す．一般性を失うことなく，$\pi = (1, 2, ..., n)$ と仮定し，$\pi' = (i_1, i_2, ..., i_n)$ とする．$\varphi(k) = i_k$（$k = 1, 2, ..., n$）となる名前の付け替え φ を考える．以下では，数学的帰納法により，$a_k = a'_k$ （$k = 1, 2, ..., n$）を示す．まず，$a_1 = a'_1$ を示す．プレイヤー 1 の π における意思決定ノード x は，$x = (\pi, \phi)$ と表せる．また，プレイヤー i_1 の π' における意思決定 x' ノードは，$x' = (\pi', \phi)$ と表せる．これらのノードにおける両者の選択する行動が等しいことを示せばよい．$\varphi(\pi) = \pi'$ であるから，$\varphi(x) = x'$ である．よって，$\varphi(\mathscr{P}_1(x)) = \mathscr{P}_{i_1}(x')$ が成り立つ[3]．s は対称な戦略プロファイルだから，$s_1(\mathscr{P}_1(x)) = s_{i_1}(\mathscr{P}_{i_1}(x'))$ が成り立つ．よって，$a_1 = a'_1$．帰納法の仮定として $(a_1, ..., a_{k-1}) = (a'_1, ..., a'_{k-1})$ を仮定する．$a_k = a'_k$ を示そう．証明は，上とほぼ同様である．プレイヤー k の π における意思決定ノードを $\hat{x} = (\pi, a_1, ..., a_{k-1})$，プレイヤー i_k の π' における意思決定ノードを $\hat{x}' = (\pi', a'_1, ..., a'_{k-1})$ と表す．これらのノードで選択される行動が等しいことを示せばよい．$\varphi(\pi) = \pi'$ と帰納法の仮定から，$\varphi(\hat{x}) = \hat{x}'$

[3]一般に，プレイヤー i の情報構造 $\mathscr{P}_i$ と彼の意思決定ノード $x \in X_i$ が与えられたとき，$\mathscr{P}_i(x)$ によって x を含むプレイヤー i の情報集合を表す．

である．よって，$\varphi(\mathscr{P}_k(\hat{x})) = \mathscr{P}_{i_k}(\hat{x}')$ が成り立つ．s は対称な戦略プロファイルだから，$s_k(\mathscr{P}_k(x)) = s_{i_k}(\mathscr{P}_{i_k}(x'))$ が成り立ち，数学的帰納法が完成する．■

情報構造と戦略プロファイルがそれぞれ対称であるとき，すべてのプレイヤーが同じように情報を獲得し，同じように行動する．そのため，順序が異なってもそのプレイで採られる行動の列が異なることがなく，どの順序のプレイも同一となるというのが，上の命題の成立する理由である．

２つの対称な情報構造 $\mathscr{P}$ と $\mathscr{P}'$ において，どちらも利得関数が一定の条件を満せば，k 人のプレイヤーが協力行動を採る対称なナッシュ均衡が存在するとしよう．このとき，もし，前者の条件が後者の条件の必要条件となっているならば，k 人のプレイヤーの協力行動の実現に対して前者は後者よりも有効性が高いと定義する．

一定の数のプレイヤーが C を採る状況について，対称な情報構造の間で対称なナッシュ均衡で有効性を比較したとき，最も有効性の高いものは何かを考える．次の定理がこれに解答を与える．

定理 5.2. $\mathscr{P}$ を対称な情報構造，s を $\Gamma(\mathscr{P})$ における対称なナッシュ均衡とする．s において期待協力者数が m であれば，$k = n - m$ について条件 $(ck1)$ が成り立たなければならない．

証明． 命題 5.2 より s において，各順序におけるプレイは同一となる．それを $(a_1, ..., a_n)$ で表す．いま協力者数が m であるから，$a_1, ..., a_n$ の中の m 個が C で，$n - m$ 個が D である．$a_t = C$ である添え字 t の集合を T で表わす．いま，s において，プレイヤー i が戦略 s_i の代わりにすべての情報集合で D をとる戦略を採るとする．このとき，彼は，s において彼が C を採っていたすべての順序において D を採る．よって，$\pi(i) \in T$ の順序 π において彼は選択を C から D に変更する．１つの $t \in T$ に対して $\pi(i) = t$ となる順序 π が $n - 1$ 個あることに注意せよ．これから，$\pi(i) \in T$ である順序は $(n-1)!m$ 個存在する．$\pi(i) = t \in T$ なる順序において D に変更すると，彼は利得 $f_i(D, t - 1 + \gamma_i(s, \pi))$ を得る．ここで $\gamma_i(\pi, s)$ は，順序 π においてプレイヤー i が D をとり他のプレイヤー j（$j \neq i$）が s_j に従うときのプレイヤー i より後に C を採るプレイヤーの数を表す． よって，戦略の変更によってプレ

イヤー i が得る期待利得は，次の v となる．

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{(n-1)!m}\sum\nolimits_{\pi:\pi(i)\in T} f_i(D,\pi(i)-1+\gamma_i(\pi,s)) \\
&\geq \frac{1}{(n-1)m!}\sum\nolimits_{\pi:\pi(i)\in T} f_i(D,\pi(i)-1) \\
&= \frac{1}{(n-1)!m}(n-1)!\sum\nolimits_{h=1}^{m} f_i(D,h-1) \\
&= \frac{1}{m}\sum\nolimits_{h=1}^{m} f_i(D,h-1)
\end{aligned}
$$

となる． s におけるプレイヤー i の利得は $f_i(C,m-1)$ である．s はナッシュ均衡だから，$f_i(C,m-1)\geq v$ が成り立たなくてはならない． $l=h-1$ と表わし，$m=n-k$ を代入すれば，条件 $(ck1)$ の不等式 $f_i(C,n-k-1)\geq 1/(n-k)\sum_{l=0}^{n-k-1} f_i(D,l)$ が得られる．■

この定理の成立する理由は，次のように理解することができる．命題 5.2 より，対称な情報構造と戦略プロファイルのもとでは，どの順序のプレイも同一となる．ここで一般に，特定の k 個の手番では D が採られて残りの $n-k$ 個の手番では C が採られるというプレイを考えよう．$\mathscr{Q}$ においては，各プレイヤーは自分の前に何人のプレイヤーが D を採った分かるので，プレイヤー達は,「D を採るプレイヤーが k 人になるまでは D を採り，D を採るプレイヤーが k 人になったら C を採る．自分の前のプレイヤーがこのルールを破った場合は D をとる」という選択の仕方でこのようなプレイを実行することができる．このプレイにおいては，C を採るべきプレイヤー i が D を採ると，その後の手番のプレイヤーはすべて D を採る．このような逸脱に反応して採られる D の数は $\mathscr{Q}$ において最も多い．これが，この定理が成り立つことの理由である．

定理 5.2 から，対称な情報構造の対称な戦略プロファイルにおいては，期待協力者数は整数となる．定理 5.2 は，対称な情報構造と対称なナッシュ均衡の比較であれば，任意の期待協力者数において，その実現に対して $\mathscr{Q}$ は最も有効性が高い情報構造であることを示している．

ここで強調すべき点は期待協力者数がいかなる値でもよいことである．これは，任意の利得関数の組において，対称な情報構造と対称なナッシュ均衡で実現しうる最大の期待協力者数は，必ず $\Gamma(\mathscr{Q})$ の $s^{\{n-m\}}$ によって達成されることを意味する．つまり，対称な情報構造と対称なナッシュ均衡という範囲であれば，$\mathscr{Q}$ はあらゆる利得関数の組において最大の期待協力者数を達成する情報構造である．

5.4 まとめ

この章では，協力行動の実現に対する情報構造の有効性を一般的に比較した．有効性は，所与の人数の協力行動について，それが達成されるナッシュ均衡の均衡条件がより弱いほど情報構造はより有効性が高いと定義した．

まず，プレイヤー全員の協力行動の実現について分析し，$\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ が最も有効性の高い情報構造であることを示した．次に一部のプレイヤーによる協力行動の実現を考慮に入れて情報構造の有効性を検討した．n 人未満の協力行動を実現する情報構造は，一般には $\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ 以外のものとなり得ることを例示した．そこで，情報構造と戦略プロファイルに対称性の概念を導入し，対称な情報構造と対称なナッシュ均衡の範囲で比較するとき，任意の期待協力者数の実現に対して $\mathscr{Q}$ は最も有効性の高い情報構造であることを明らかにした．

本節の分析によって，本論文の考察する情報構造 $\mathscr{Q}$ と $\mathscr{R}$ が，いくつかの具体的事例に対応するというだけでなく，他のあらゆる情報構造との比較の中で優れた性質を持つものであることが明らかにされた．

第6章　進化的安定性の分析

6.1　本章の目的と概要

進化ゲーム理論は，２０世紀後半に急速に発展した数理生物学の一分野である．この理論は，W.D. Hamilton による利他行動の進化に関する論文（Hamilton 1964）を契機として始まった．1970 年台に入って J. Meynard Smith が，ＥＳＳ（進化的安定戦略）とレプリケーターダイナミックスの分析概念を提唱すると，これらを使って数多くの成果が上げられるようになり[1]，行動生態学という分野が生み出された．その後，その分析手法は人文社会科学にも採り入れられ，心理学，言語学，倫理学，政治学，社会学などに強い影響を与えた．

経済学において，ＥＳＳとレプリケーターダイナミックスの概念は，近視眼的で限定合理的な経済主体の行動を記述する概念として受け入れられた．Kandori, Mailath and Rob (1993) や Young（1993）は，離散的ダイナミックスに基づく進化ゲームを提案し，これらは，現在，進化的安定性によるゲーム分析の理論として用いられている[2]．

本章では，Kandori, Mailath and Rob (1993) によって提案され，Kandori and Rob（1995）によって一般化された進化ゲーム（以下 KMR 進化ゲームと呼ぶ）の理論を $\Gamma(\mathscr{R})$ に適用して，進化的安定性の観点から社会的ジレンマの解消の可能性を検討する．非協力行動の観察可能性が，限定合理的な意思決定主体の適応行動においてどのように働き，社会的ジレンマの解消を促すか否かを検討することがこの分析の目的である．

分析の結果，すべてのプレイヤーが同一の利得関数を持ち，プレイヤー全員が協力行動を採る状態と全員が非協力行動を採る状態のみが最適反応に対して安定な状態である場合には，後者が進化的に安定であることが示される．一方，各プレイヤーが２つの利得関数のどちらかを持つ２タイプの場合には，一定の条件の下で，一方のタイプのプレイヤーが協力行動を採りもう一方のタイプのプレイヤーが非協力行動を採る状態が，進化的に安定であるこ

[1] Maynard Smith (1981), Meynard Smith and Price (1973) 参照.

[2] Friedman(1988), Kandori and Rob (1995)，Vega Redondo (1995) などを参照.

とが示される．これによって，進化的に安定な状態として社会的ジレンマが解消し得ることが示唆される．

6.2 KMR 進化ゲーム

すべてのプレイヤーが同一のジレンマ的利得関数 f を持つ $\Gamma(\mathscr{R})$ について考える．関数 f は次の仮定を満たすとする．

仮定 6.1. $f(C, n-1) > \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(D, k)$ が成り立つ．

これは，条件 $(c1)$ が厳密な不等式で成立することを意味し，第４章の定理4.1から $(CD, ..., CD)$ がナッシュ均衡となる．

Kandori and Rob (1995) のモデルを $\Gamma(\mathscr{R})$ に適用すると以下のように定式化される．離散的な期間 $t = 1, 2, ...$ を考える．各期の期首において各プレイヤーは，CC，CD, DC, DD の４つの戦略の中の１つを選択する．社会には m 人（m は n の倍数）のプレイヤーがおり，これらのプレイヤーの中で何人がどの戦略をとっているかを記述したものを**状態**と呼ぶ．以下では，状態を $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ によって表す．ただし，z_1, z_2, z_3, z_4 は，それぞれ CC, CD, DC, DD を採るプレイヤーの人数である．状態の空間を

$$Z = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1, ..., z_4 \text{は 0 以上の整数で } z_1 + ... + z_4 = m\}$$

で表す．状態 $(0, m, 0, 0)$ は，戦略プロファイル $(CD, ..., CD)$ に対応し，状態 $(0, 0, 0, m)$ は戦略プロファイル $(DD, ..., DD)$ に対応する．第 t 期の状態を $z(t)$ で表わす．各期において，プレイヤーは何度もマッチングして n 人のグループを作り，そのグループで $\Gamma(\mathscr{R})$ を何度もプレイすると考える[3]．彼らはマッチングとプレイを通してその期の状態を知ることができるとする．(y_1, y_2, y_3, y_4)（y_i は 0 以上の整数で $y_1 + ... + y_4 = m - 1$）を**外部戦略分布**と呼ぶ[4]．状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ において，戦略 $s \in \{CC, CD, DC, DD\}$ を採っているプレイ

[3] この想定は以下の展開に必ずしも必要ない．$m = n$ で同じプレイヤーの集団が $\Gamma(\mathscr{R})$ をプレイし続けるとし，プレイヤーは近視眼的に行動選択を行うと想定しても以下の展開に支障をきたさない．第２章の事例２であげたローカルコモンズの状況はこちらの想定の方が適切であろう．事例４の学生寮におけるマナーの場合は入居者の入れ替わりが頻繁であればマッチングの状況と考えられるかもしれない．

[4] この言葉は，以下の記述を簡単にするために本論文で独自に定義される．

ヤーの外部戦略分布を $y(z,s)=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ と定義する[5]．ただし，$j=1,2,3,4$ について

$$y_j=\begin{cases} z_j-1 & z_j\text{が戦略 } s \text{ を採るプレイヤーの数を表わすとき,} \\ z_j & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とする．任意のプレイヤーにおいて，外部戦略分布 $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ で戦略 s を採るときの期待利得は，次のように表わされる．

$$v(s,y)=\sum_{x_1,x_2,x_3,x_4:\sum_{k=1}^{4}x_k=n-1} p(x_1,x_2,x_3,x_4:y)U(s:x_1,x_2,x_3,x_4)$$

ここで，$U(s:x_1,x_2,x_3,x_4)$ は，プレイヤー i が戦略 s を採り，彼以外のプレイヤーの中で CC，CD，DC，DD を採る人数がそれぞれ x_1，x_2，x_3，x_4 人であるときに，プレイヤー i が $\Gamma(\mathscr{R})$ で得る期待利得を表わす．$p(x_1,x_2,x_3,x_4:y)$ は，次のような確率関数である．

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4:y)=\frac{\binom{y_1}{x_1}\binom{y_2}{x_2}\binom{y_3}{x_3}\binom{y_4}{x_4}}{\binom{m-1}{n-1}},$$

つまり，$p(x_1,x_2,x_3,x_4:y)$ は，外部戦略分布 y において $m-1$ 人のプレイヤーから $n-1$ 人が無作為にとりだされるときに，CC，CD, DC, DD を採るプレイヤーの数がそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 である確率を表す．

この期待利得によって状態に対する最適反応を定義する．上述したように各プレイヤーはマッチングとプレイを通して状態を知るが，$z=(z_1,z_2,0,0)$ と表される状態については注意が必要である．この状態においては，すべてのプレイヤーが情報集合 R_i^0 で C を採るので，CC を採るプレイヤーと CD を採るプレイヤーの区別がつかない．仮定 6.1 より $(0,m,0,0)$ ではどのプレイヤーにおいても CC と CD が最適な戦略であるので，$z=(z_1,z_2,0,0)$ においてもそれがなり立つとして次のように仮定する．

仮定 6.2. $z=(z_1,z_2,0,0)$ と表される状態に対しては，どのプレイヤーにおいてもこの状態で採っている戦略 CC，CD が最適反応である[6]．

[5] この章では戦略を一般に s で表わす．この記号が戦略プロファイルを表わすことはない．

[6] Nöldeke and Samuelson (1993) も展開形ゲームにおける進化的ゲームモデルの展開において同様の仮定を置いている．ただし，この仮定は本論文の以下の結果に影響しない．すべての状態において最適反応を下の (6.2) 式によって定義しても以下の結果と同じ結果が得られる．

$(z_1, z_2, 0, 0)$ 以外の状態については，期待利得が最大となる戦略を最適反応とする．こうして，$s \in \{CC, CD\}$ を採るプレイヤーの状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ に対する最適反応の集合 $B_s(z)$ は，$z_3 = z_4 = 0$ のとき，

$$B_s(z) = \{s\} \tag{6.1}$$

$z_3 + z_4 \geq 1$ のとき，$s \in \{CC, CD, DC, DD\}$ について，

$$B_s(z) = \underset{s' \in \{CC,CD,DC,DD\}}{\arg\max} v(s', y(z, s))) \tag{6.2}$$

と定義される．

戦略 s に対して $\eta(s, y)$ を**適応確率**と呼ぶ．これは，s を採るプレイヤーが $B_s(y)$ に含まれる戦略に戦略を変更する確率である. どの戦略にどのような確率で変更するかは $B_s(y)$ をサポートとする所与の確率分布 $\gamma(s, y)$ に従うとする．以下の展開は，$\eta(s, y)$ や $\gamma(s, y)$ の確率分布に依存しないので，これらの関数形については詳述しない．$\eta(s, y)$ と $\gamma(s, y)$ はすべてのプレイヤーに共通であると仮定する．

各期 $t = 1, 2, ...$ において各プレイヤーは確率 $\varepsilon > 0$ でこのマッチングの母集団から離れ新たなプレイヤーに置き換えられる．これを**ミューテーション**と呼ぶ．新しいプレイヤーは，一定の確率分布 (q_1, q_2, q_3, q_4)（$q_1, ..., q_4 > 0$）で戦略 CC, CD, DC, DD のいずれかを採るとする．新しくゲームに参加するプレイヤーはゲームについては全く無知で，戦略の比較は行わずランダムに戦略を採ると考える．

以上の設定のもとで，状態の時間的推移は有限状態空間 Z 上のマルコフチェーンとなる．推移確率を $\Pr(z(t+1) = z' | z(t) = z) = p_{zz'}(\varepsilon)$ と表す．$p_{zz'}(\varepsilon)$ を要素とする推移確率行列を $P(\varepsilon)$ で表す.

定義 6.1. Z 上の確率分布 $\mu(\varepsilon)$ が $\mu(\varepsilon)P(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)$ を満たすとき，$\mu(\varepsilon)$ を**定常分布**と呼ぶ[7].

定義 6.2. $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon) = \mu^*$ を**極限分布**と呼ぶ．極限分布のサポートに入る状態を**長期状態**と呼ぶ[8].

定義 6.3. 状態の集合 $A \subseteq Z$ が以下の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとき A を**極限集合**と呼ぶ．極限集合のクラスを Ω で表す.

[7] $\epsilon > 0$ と $q_1, ..., q_4 > 0$ からこの有限状態のマルコフチェーンは既約で非周期的であるので，定常分布は一意に存在する.

[8] 極限分布は存在し，$\mu^* P(0) = \mu^*$ が成り立つ.

(i) $P(0)$ において，$\Pr(z(t+1) \in A | z(t) \in A) = 1$

(ii) $P(0)$ において，任意の $z, z' \in A$ についてある $k > 0$ が存在して $\Pr(z(t+k) = z' | z(t) = z) > 0$.

$P(0)$ において $\Pr(z(t+k) = z' | z(t) = z) > 0$ が成り立つとき，z **から** z' **へ** k **期で推移可能である**という．ある $k > 0$ が存在して，z から z' へ k 期で推移可能であるとき，単に z **から** z' **へ推移可能である**という．上の条件 (ii) は，極限集合においては，それに含まれる任意の状態の間で互いに推移可能でなければならないことを言っている．

極限分布 μ^* は，次の形に一意に表される．

$$\mu^* = \sum\nolimits_{A \in \Omega^*} r_A \mu_A.$$

ただし，$\Omega^* \subseteq \Omega$，$\mu_A$ は極限集合 A の上の定常分布，$r_A \in [0, 1]$ は極限集合 A の尤度を表す．

定義 6.4. Ω^* の要素を**長期均衡**と呼ぶ．

長期均衡は極限集合であり，それは１つの状態からなる集合である場合といくつかの状態からなる集合である場合がある．長期均衡は複数存在しうる．

Kandori and Rob（1995）は，長期均衡を求めるためのアルゴリズムを示した．その記述のために以下の定義を与える．

２つの状態 z, z' の間の距離を $d(z, z') = (1/2) \sum_{k=1}^{4} |z_k - z'_k|$ と定義する．これは，z から z' へ状態が推移するために必要とされる戦略を変更するプレイヤーの数である．状態間の推移コストを次のように定義する．

$$c(z, z') = \min_{z'' \in b(z)} d(z', z'')$$

ただし，$b(z) = \{z'' : p_{zz''}(0) > 0\}$ とする．$b(z)$ は，状態 z から１期で推移可能な状態の集合である．したがって，$c(z, z')$ は z から z' へ推移するために必要な戦略を変更するプレイヤーの数を推移コストとして表わすが，その際，最適反応戦略への変更はコストとして数えない．２つの極限集合 A と A' の間の推移コストを次のように定義する．

$$C(A, A') = \min_{z \in A, z' \in A'} \min_{g \in G'(z, z')} N(g).$$

ただし，$G'(z, z')$ は，状態の列 $(z^1, z^2, ..., z^T)$ の中で $z^1 \in A$ と $z^T \in A'$ を満たし，z^t（$t = 2, ..., T-1$）が他の極限集合 $A'' (\neq A, A')$ に含まれないものの全体であり，$g \in G'(z, z')$ に対して $N(g) = \sum_{t=1}^{T-1} c(z^t, z^{t+1})$ とする．

Kandori and Rob（1995）は，次の命題を示した．

命題 6.1. 長期均衡の集合は，

$$\min_{A\in\Omega}\min_{h\in H_A}\sum_{(A',A'')\in h} C(A',A'') \tag{6.3}$$

の解 A によって与えられる．ただし，H_A は A-ツリーと呼ばれ，極限集合をノードとし，方向つきの枝からなる樹形図で，A 以外のノードには後ろのノードが存在するものである．

この命題の示すところによれば，長期均衡を見つけるためには，まず,（1）極限集合のクラスを明らかにし，次に,（2）極限集合をノードとする樹形図 h について $\sum_{(A',A'')\in h} c(A',A'')$ を求めれば良い．それらの中で最小の値となるもののルートノードを集めたものが長期均衡の集合である．

6.3 長期均衡

本節では，前節で定式化された進化ゲームの長期均衡を求める．まず，各状態における最適反応から状態間の推移可能性を分析し，その結果から極限集合のクラスを明らかにする．その後，命題 6.1 のアルゴリズムを用いて長期均衡を導出する．

始めに，$(0,k,0,m-k)$（$0\le k\le m-1$）と表わされる状態に対する最適反応を求め，この形で表される状態の間の推移可能性を明らかにする．

まず，DD プレイヤーの最適反応を考える[9]．$k=m-1$ のとき，DD プレイヤーは，常に $n-1$ 人の CD プレイヤーとマッチングする．仮定 6.1 より, 条件 $(c1)$ が厳密な不等式で成り立つので，最適な戦略は CD と CC である．次に $m-k\ge 2$ の場合について考える．この場合，DD プレイヤーが戦略を CD に変更するときと，そのまま DD を採りつづけるときの期待利得は以下のように表される．

$$v(CD,(0,k,0,m-k-1)) = \sum_{x=0}^{n-1} h(x:k)U(CD:0,x,0,n-x-1).$$

$$v(DD,(0,k,0,m-k-1)) = \sum_{x=0}^{n-1} h(x:k)U(DD:0,x,0,n-x-1).$$

[9]第４章の 4.4 節と同様に，戦略 s を採るプレイヤーを s プレイヤーと呼ぶ．

ここで，$h(x:k)$ は次のような超幾何分布の確率関数である：

$$h(x:k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{m-k-1}{n-x-1}}{\binom{m-1}{n-1}}.$$

ただし，$x > k$，$x < n-m+k$（$\Leftrightarrow n-x-1 > m-k-1$）のときは，$h(x:k) = 0$ とする．なぜなら，$x > k$ はすべてのプレイヤーの中で CD を採っている数 k よりマッチングした CD プレイヤーの数 x が多いことを意味し，$n-x-1 > m-k-1$ はすべてのプレイヤーの中で DD を採っている数 $m-k-1$ よりマッチングした DD プレイヤーの数 $n-x-1$ が多いことを意味するからである．

$$w(k) = v(CD, (0, k, 0, m-k-1)) - v(DD, (0, k, 0, m-k-1))$$

と定義する．上の２つの等式から $w(k)$ は次のように表わされる．

$$w(k) = \sum_{x=0}^{n-1} h(x:k)\{U(CD:0, x, 0, n-x-1) - U(DD:0, x, 0, n-x-1)\}.$$

$k = m-1$ のときは，$h(n-1:k) = 1$ であり，$U(CD:0, n-1, 0, 0) = f(C, n-1)$，$U(DD:0, n-1, 0, 0) = (1/n)\sum_{l=0}^{n-1} f(D, l)$ である．仮定 6.1 から $U(CD:0, n-1, 0, 0) > U(DD:0, n-1, 0, 0)$ であり，$w(m-1) > 0$ であることに注意せよ．

第４章の命題 4.1 より，１人でも DD を採るプレイヤーがいるとき，CC と DC は最適反応にならない．よって，状態 $z = (0, k, 0, m-k)$（$k < m-1$）に対する最適反応は CD か DD である．そこで $w(k)$ を使って DD プレイヤーの $z = (0, k, 0, m-k)$（$m-k \geq 2$）に対する最適反応は，次のように表わされる：

$$B_{DD}(0, k, 0, m-k) = \begin{cases} \{CD\} & w(k) > 0 \text{ のとき}, \\ \{CD, DD\} & w(k) = 0 \text{ のとき}, \\ \{DD\} & w(k) < 0 \text{ のとき}. \end{cases} \tag{6.4}$$

一方，状態 $z = (0, k-1, 0, m-k)$（$m-k \geq 1$）において，CD プレイヤーが CD を採り続けるときと DD に変更するときの期待利得は，

$$v(CD, (0, k-1, 0, m-k)) = \sum_{x=0}^{n-1} h(x:k-1)U(CD:0, x, 0, n-x-1),$$

$$v(DD, (0, k-1, 0, m-k)) = \sum_{x=0}^{n-1} h(x:k-1)U(DD:0, x, 0, n-x-1)$$

と表わされ,

$$v(CD,(0,k-1,0,m-k))-v(DD,(0,k-1,0,m-k))=w(k-1)$$

が成り立つ．よって，最適反応は，関数 $w(k-1)$ を使って,

$$B_{CD}(0,k,0,m-k)=\begin{cases}\{CD\} & w(k-1)>0 \text{ のとき,}\\ \{CD,DD\} & w(k-1)=0 \text{ のとき,}\\ \{DD\} & w(k-1)<0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{6.5}$$

となる．ここで，関数 $w(k)$ について次の仮定をおく．

仮定 6.3. $w(k)=0$ または $w(k)w(k+1)<0$ が成り立つ k の値は一つのみ存在する．

仮定 6.1 から $w(m-1)>0$ であり，ジレンマ的利得関数の仮定（A.1）より $w(0)<0$ である．よって仮定 6.3 は，$w(k)$ のグラフがただ一度だけ横軸を横切ることを意味する．これは，極限集合が $\{(z_1,z_2,0,0)\}$ と $\{(0,0,0,m)\}$ の 2 つのみであるための必要十分条件である．なぜならば，この仮定で述べている k の値が 2 つ以上あれば，$w(k^*)\geq 0$ で $w(k^*+1)\leq 0$ となる k^* が存在することになるが，その場合，CD プレイヤーの最適反応が CD，DD プレイヤーの最適反応が DD であるので，$\{(0,k^*,0,m-k^*)\}$ が極限集合となるからである．

仮定 6.3 が成り立つためには $w(k)$ が厳密な増加関数であればよい．そのための 1 つの十分条件は次のように与えられる．

補題 6.1. プレイヤー全員が同一の平行型線形利得関数 $f(C,k)=\alpha k$，$f(D,k)=\alpha k+\beta$ (α,$\beta>0$,$\alpha(n-1)>\beta$) を持ち，$\alpha>\beta$ であれば，$w(k)$ は k の厳密な増加関数である．

証明 . 第 4 章の補題 4.1 により，$\alpha>\beta$ のとき，$U(CD:0,x,0,n-x-1)-U(DD:0,x,0,n-x-1)$ は x の厳密な増加関数である．一方，超幾何分布 $h(x:k)$ は，$h(x:k-1)$ に対して第 1 種確率優位である．これより $w(k)$ は k の厳密な増加関数となる．■

次の 2 つの命題が得られる．

命題 6.2. 状態 $z=(0,m-1,0,1)$ からの推移について以下が成り立つ．

(i) $w(m-2)\geq 0$ であれば，z からは $(1,m-1,0,0)$ と $(0,m,0,0)$ の状態へのみ 1 期で推移可能である．

(ii) $w(m-2) < 0$ であれば，z からは $(0,0,0,m)$，$(1,0,0,m-1)$，$(0,1,0,m-1)$ の各状態へのみ１期で推移可能である．

証明． まず，仮定 6.1 より $v(CD,(0,m-1,0,0)) > v(DD,(0,m-1,0,0))$ が成り立つので，$w(m-1) > 0$ が成り立ち，$B_{DD}(0,m-1,0,1) = \{CC, CD\}$ であることに注意せよ．（6.5）式より，$w(m-2) \geq 0$ であれば $CD \in B_{CD}(0,m-1,0,1)$ である．推移についての仮定から CD プレイヤーは CD を採り続けるので (i) が成り立つ．$w(m-2) < 0$ であれば，（6.5）式より，$B_{CD}(0,m-1,0,1) = \{DD\}$ であるので，(ii) が成り立つ．■

命題 6.3. 状態 $z = (0,k,0,m-k)$（$m-k \geq 2$）からの推移について以下が成り立つ．

(i) $w(k-1) \geq 0$ であれば，z からは $(0,k',0,m-k')$（$k' \geq k$）の各状態へのみ１期で推移可能である．

(ii) $w(k) > 0$ かつ $w(k-1) < 0$ であれば，z からはすべての $(0,k',0,m-k')$（$0 \leq k' \leq m$）の各状態へのみ１期で推移可能である．

(iii) $w(k) \leq 0$ であれば，z からは $(0,k',0,m-k')$（$k' \leq k$）の各状態へのみ１期で推移可能である．

証明． まず (i) を示す．$w(k-1) \geq 0$ であれば仮定 6.3 より $w(k) > 0$ である．よって，(6.4) 式より $B_{DD}(0,k,0,m-k) = \{CC\}$ である．また，(6.5) 式より，$w(k-1) \geq 0$ であれば $CD \in B_{CD}(0,k,0,m-k)$ であるので，推移についての仮定から CD プレイヤーは CD を採り続ける．よって (i) が成り立つ．次に (ii) を示す．$w(k) > 0$ であれば，(6.4) 式より，$B_{DD}(0,m-1,0,1) = \{CD\}$ である．$w(k-1) < 0$ であれば，(6.5) 式より，$B_{CD}(0,m-1,0,1) = \{DD\}$ である．よって，(ii) が成り立つ．最後に (iii) を示す．$w(k) \leq 0$ であれば $w(k-1) < 0$ であるので，$B_{CD}(0,k,0,m-k) = \{DD\}$ であり，CD プレイヤーは推移するとすれば DD へ推移する．一方 DD プレイヤーは，$w(k) \leq 0$ から，$B_{DD}(0,k,0,m-k)$ は $\{CD, DD\}$ または $\{DD\}$ であるのでいずれにしても DD を採り続ける．よって，(iii) が成り立つ．■

以上の結果に基づいて極限集合について考える．まず，以下の２つの補題が得られる．

補題 6.2. $z_3 > 0$ である状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ は，いかなる極限集合にも含まれない．

証明． z がある極限集合 A に入るとして矛盾を導く．２つの場合に分ける．まず，$z_3 + z_4 \geq 2$ であるとする．このとき，CC プレイヤーは，DC プレイヤーや DD プレイヤーにマッチ

ングする可能性があるので，彼によって CC は最適反応でない．また，DC プレイヤーについても同様に DC は最適反応でない．よって，z から，$z' = (0, k, 0, m-k)$ と表わせる状態へ１期で推移可能である．極限集合の定義の条件 (ii) より $z' \in A$ でなければならない．命題 6.2 と 6.3 より，z' からは，$(0, k', 0, m-k')$ と表せる状態へのみ推移可能である．よって，$z_3 > 0$ なる状態へは推移可能でなく，A は極限集合の定義を満たさない．次に，$z_3 = 1$, $z_4 = 0$ であるとする．このとき，CC プレイヤーは，DC プレイヤーにマッチングする可能性があるので，彼にとって CC は最適反応でない．よって，z から，$z'' = (0, m-1, 1, 0)$ と表せる状態へ１期で推移可能である．ここで，条件 $(c1)$ が厳密な不等式で成り立つので，$n-1$ 人の CD とマッチングする DC プレイヤーの最適な戦略は CC または CD である．よって，z'' からは，１期で $(0, m, 0, 0)$ へ推移可能であり，この状態も A に属さなければならない．しかし，この状態からは，それ自身へしか推移可能でなく，z へ推移可能でない．よって，A は，極限集合の定義を満たさない．以上により，z が極限集合 A に入るとすると矛盾が生じる．■

補題 6.3. $z_1 > 0$ かつ $z_4 > 0$ である状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ は，いかなる極限集合にも含まれない．

証明． 上の補題 6.2 より $z_3 = 0$ の場合を考えればよい．z が極限集合 A に入るとして矛盾を導く．$z_4 > 0$ より CC プレイヤーは DD プレイヤーにマッチングする可能性があるので，CD または DD が唯一の最適反応である．よって，z からは，$(0, k, 0, m-k)$ と表せる状態へ１期で推移可能であり，この状態も A に入らなければならない．命題 6.2 と 6.3 より，$(0, k, 0, m-k)$ からは，$(0, k', 0, m-k')$ と表せる状態へのみ推移可能であり，z（$z_1 > 0$）へは推移しない．よって，A は極限集合の定義を満たさない．■

以上の２つの補題から，極限集合に入る可能性のある状態は，$(k, m-k, 0, 0)$，$(0, k, 0, m-k)$ と表せるものに限られることが分かった．以上の準備のもとで，極限集合について次の命題が得られる．

命題 6.4. $\{(k, m-k, 0, 0)\}$（$0 \le k \le m$）および $\{(0, 0, 0, m)\}$ は極限集合であり，極限集合はこれら以外に存在しない[10]．

[10]仮定 6.2 を採用せず，状態 $(z_1, z_2, 0, 0)$ においても期待利得によって最適反応を定める場合，ある値 k' があって $0 \le k \le k'$ の範囲で $\{(k, m-k, 0, 0)\}$ が極限集合となる．その場合でも次の定理は成立する．

証明． 各 $\{(k, m-k, 0, 0)\}$（$0 \leq k \leq m$）および $\{(0, 0, 0, m)\}$ が極限集合であることは，これらの状態がそれ自身へのみ推移可能であることから明らか．他に極限集合が存在しないことを示す．上記以外の任意の状態 z について，補題 6.2 と 6.3 から，z から $(0, m, 0, 0)$ または $(0, 0, 0, m)$ へ推移可能であるが，これらから逆向きには推移可能でない．よって，極限集合の条件 (ii) が満たされず，z を含む極限集合は存在しない．■

命題 6.1 により，次の定理を得る．

定理 6.1. $\{(0, 0, 0, m)\}$ が唯一の長期均衡である．

証明． 状態 $(m-1, 0, 0, 1)$ からの推移可能性について考える．この状態において，CC プレイヤーにとって DD が唯一の最適反応となる．なぜなら，この状態において DD プレイヤーにマッチングする可能性があるので CD または DD が最適反応であるが，いずれの戦略を採ろうとも，CC プレイヤーは C を DD プレイヤーは D を採るので，DD が最適な戦略となるからである．したがって，$(m-1, 0, 0, 1)$ からは 1 期で $(0, 0, 0, m)$ へ推移可能である．よって，$(m, 0, 0, 0)$ からは 1 ミューテーションで $(0, 0, 0, m)$ へ推移する．$\{(0, 0, 0, m)\}-$ ツリー として次のようなものを考える．

$$\{(0, 0, 0, m)\} \leftarrow \{(m, 0, 0, 0)\} \leftarrow \{(m-1, 1, 0, 0)\} ... \leftarrow \{(1, m-1, 0, 0)\} \leftarrow \{(0, m, 0, 0)\}$$

すると，$\sum_{(A', A'') \in h} C(A', A'') = m+1$ である．これは，極限集合の数が $m+2$ であるので，(6.3) で比較するすべての $A-$ ツリーの中で最少の値である．$\{(0, 0, 0, m)\}$ から他の極限集合への推移においては，*2* 以上のミューテーションが必要である．なぜなら $(0, 0, 0, m)$ から 1 人が DD 以外の戦略に変更しても，彼以外は全員 DD を採るので，再び $(0, 0, 0, m)$ へ推移してしまうからである．よって，$A = \{(0, 0, 0, m)\}$ が最小化問題 (6.3) の唯一の解であり，定理の主張が成り立つ．■

こうして，プレイヤー全員が協力行動を採る状態と全員が非協力行動を採る状態の 2 種類のみが最適反応に対して安定である場合には，後者のみが進化的に安定な状態となることが判明した．これは，社会的ジレンマの解消可能性に対しては否定的な結論である．

均衡の選択という観点から見れば，上の設定は，すべてのプレイヤーが同一の平行型線形利得関数を持ち，ナッシュ均衡が CD と CC の組み合わせと $(DD, ..., DD)$ である状況に

対応する．定理 6.1 は，このとき $(DD, ..., DD))$ が選択されることが示している．第４章で行った均衡の絞り込みの試みは，進化的安定性に関しては否定的な結果となった．

プレイヤー全員が協力行動を採る状態が長期均衡とならないのは次のような理由による．すべてのプレイヤーが CD を採る状況が生じたとする．この状況ではどのプレイヤーも自分からは D を採らない．そこで，ミューテーションによって新しくこの社会に入って来たプレイヤーが CC を採っても彼らは戦略を変えようとしない．そこで，ミューテーションによって次第に CC を採るプレイヤーが増えていく．ところが CC があまりにも多くなると，DC または DD を採るプレイヤーがミューテーションによって入って来たときに，DD を採ることが最適になってしまう．その結果全員が DD を採るようになってしまう．逆に全員が DD を採る状況は，新しく入って来たプレイヤーが CC や CD を採ってもそれは最適な戦略ではないからすぐに DD に変更してしまう．その結果，DD 以外の戦略を採るプレイヤーは増えることはない．

6.4　２タイプモデル

前節では，すべてのプレイヤーが同一の利得関数を持ち，プレイヤー全員が協力行動を採る状態と全員が非協力行動を採る状態のみが極限集合となる場合について長期均衡を検討した．結果は社会的ジレンマの解消に関しては否定的なものであった．本節では，一部のプレイヤーが協力行動を行う状態も極限集合となり得るとして長期均衡について再検討する．

前節では，仮定 6.3 から $w(k)$ の単調性によって極限集合が２つであることを保証した．この仮定を外すことによって，一部のプレイヤーが CD を残りのプレイヤーが DD を採る状態も極限集合となりうる．しかし，その場合はそのような極限集合が数多く存在する可能性が生じ，長期均衡を特徴づけることは難しくなると予想される．この困難を回避するために，本節では，すべてのプレイヤーが２つの利得関数のどちらかを持つ２タイプのプレイヤーの存在する状況を想定する．この場合は仮定 6.3 と同様の仮定のもとで，一方のタイプのプレイヤーが CD をもう一方のタイプのプレイヤーが DD を採る１つの状態のみが極限集合に追加されることになる．

本来のＫＭＲ進化ゲームでは，各プレイヤーは同一の利得関数を持つと仮定する．しかし，各プレイヤーが２種類の利得関数のどちらかをもつと仮定しても，以下のように支障な

くモデルは展開できる．この設定で再度KMR進化ゲームを$\Gamma(\mathscr{R})$に適用し，長期均衡を検討することが本節の目的である．

２つの利得関数をf^aとf^bで表し，次の仮定を置く．

仮定 6.4. $\theta = a, b$について，$f^\theta(C, n-1) > \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^\theta(D, k)$が成り立つ．

この仮定により，どちらのタイプの利得関数についても，定理 4.1 の条件 $(c1)$ が厳密な不等式で成り立ち $(CD, ..., CD)$ がナッシュ均衡となる．利得関数 f^a を持つプレイヤーをタイプ a と呼び，利得関数 f^b を持つプレイヤーをタイプ b と呼ぶ．いま，タイプ a のプレイヤー m^a 人とタイプ b のプレイヤー m^b 人からなる社会を考え，この $m^a + m^b = m$ 人のプレイヤーについてKMR進化ゲームを考える．ただし，それぞれのタイプのプレイヤーの人数はすべての期を通して不変であるとする．

社会の状態を $z = (z_1^a, z_2^a, z_3^a, z_4^a; z_1^b, z_2^b, z_3^b, z_4^b)$ で表す．ただし，$\theta = a, b$ について，$z_1^\theta + z_2^\theta + z_3^\theta + z_4^\theta = m^\theta$ とする．$z_1^\theta, z_2^\theta, z_3^\theta, z_4^\theta$ はそれぞれ，タイプ θ のプレイヤーの中で戦略 CC，CD，DC，DD を採るプレイヤーの人数を表す．状態の空間を Z^{ab} で表す．$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ が，$y_1, ..., y_4$ が 0 以上の整数で，$y_1 + ... + y_4 = m - 1$ を満たすとき，これを再び**外部戦略分布**と呼ぶ．

以下の分析では，タイプに関わりなく特定の戦略を採るプレイヤーの人数が問題となるので，状態 z において $z_k = z_k^a + z_k^b$（$k = 1, 2, 3, 4$）と表わし，$(z_1, ..., z_4)$ を z における**戦略分布**と呼ぶ．前節と同様に状態 z において戦略 $s \in \{CC, CD, DC, DD\}$ を採るプレイヤーの外部戦略分布を $y(z, s)$ で表わす．外部戦略分布 y において，タイプ θ のプレイヤーが戦略 s を採るときの期待利得を

$$v^\theta(s, y) = \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4 : \sum_{k=1}^4 x_k = n-1} p(x_1, x_2, x_3, x_4 : y) U^\theta(s : x_1, x_2, x_3, x_4)$$

で表わす．ここで，$U^\theta(s : x_1, x_2, x_3, x_4)$ はタイプ θ のプレイヤーの期待利得関数である．$p(x_1, x_2, x_3, x_4 : y)$ は前節で与えた確率関数で，外部戦略分布 y の成り立つ状況において，無作為に $m-1$ から $n-1$ 人が抽出されるとき，その $n-1$ 人の中に CC を採るプレイヤーが x_1 人, CD を採るプレイヤーが x_2 人, DC を採るプレイヤーが x_3 人, DD を採るプレイヤーが x_4 人含まれる確率である．

前節と同様に，状態 z において $z_3 = z_4 = 0$ のとき $s = CC, CD$ について

$$B_s^\theta(z) = \{s\}$$

とする．$z_3 + z_4 \geq 1$ のときは，$s = CC, CD, DC, DD$ について

$$B_s^\theta(z) = \underset{s' \in \{CC,CD,DC,DD\}}{\arg\max} v^\theta(s', y(z, s)) \tag{6.6}$$

とする．こうして，戦略 s を採るタイプ θ のプレイヤーの状態 z における最適反応集合が定義される．

以上の定義以外は前節の定義に従い，KMR進化ゲームの諸概念を定義する．こうして定義されるモデルを**２タイプモデル**と呼ぶ．これに対して，前節で分析したモデルを**１タイプモデル**と呼ぶ．

２タイプモデルの長期均衡を求めよう．

前節で定義した関数 $w(k)$ をこの節では利得関数 f^θ の期待利得関数 U^θ によって，

$$w^\theta(k) = \sum_{x=0}^{n-1} h(x:k)\{U^\theta(CD:0,x,0,n-x-1) - U^\theta(DD:0,x,0,n-x-1)\}$$

と定義する．この関数について以下の２つの仮定をおく．

仮定 6.5. $\theta = a, b$ について，いかなる k についても $w^\theta(k) = 0$ とはならない．

仮定 6.6. $\theta = a, b$ について，$w\theta(k)w\theta(k+1) < 0$ となる k の値は一つのみ存在する．

仮定 6.5 は，どちらの $\theta = a, b$ についてもちょうど $w^\theta(k) = 0$ となる整数値 k においてこの関数のグラフが横軸を横切ることはないことを意味する．この仮定は以下の分析において必ずしも必要でないが，これによって瑣末で煩雑な問題から免れることができる．仮定 6.6 は前節の仮定 6.3 に対応する．これによって，以下の分析が簡単になる．

関数 $w^\theta(.)$ の定義から，$z_1 = z_2 = 0$，$z_4 \geq 2$ なる状態 z におけるタイプ θ の DD プレイヤーの最適反応は次のように表わされる：

$$B_{DD}^\theta(z) = \begin{cases} \{CD\} & w^\theta(z_2) > 0 \text{ のとき,} \\ \{DD\} & w^\theta(z_2) < 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

$z_4 = 1$ のときは，1 人の DD プレイヤー以外に DC や DD を採るプレイヤーがいないので，$\{CD\}$ が $\{CC, CD\}$ に $\{DD\}$ が $\{DC, DD\}$ となる．

さらに，状態 $z_1 = z_3 = 0$，$z_4 \geq 1$ なる状態 z におけるタイプ θ の CD プレイヤーの最適反応は次のように表わされる：

$$B^{\theta}_{CD}(z) = \begin{cases} \{CD\} & w^{\theta}(z_2 - 1) > 0 \text{ のとき}, \\ \{DD\} & w^{\theta}(z_2 - 1) < 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

以上の結果から，極限集合について以下の 2 つの補題が得られる．証明は上述の補題 6.2 と 6.3 と同様である．

補題 6.4. $z_3 > 0$ である状態は，いかなる極限集合にも含まれない．

補題 6.5. $z_1 > 0$ かつ $z_4 > 0$ である状態は，いかなる極限集合にも含まれない．

これらの補題から，極限集合に入る可能性のある状態は，$z_3 = z_4 = 0$ か $z_1 = z_3 = 0$ を満たすものに限られる．ここで，

$$\hat{k}^{\theta} = \max\{k : w^{\theta}(k) < 0\}$$

と定義する．仮定 6.5 より，$w(\hat{k}^{\theta} + 1) > 0$ であることに注意せよ．次の仮定を置く．

仮定 6.7. $\hat{k}^a < \hat{k}^b$ が成り立つ．

上述の $w^{\theta}(.)$ と最適反応の関係より，$z_1 = z_3 = 0$ である状態において，タイプ θ の CD プレイヤーの最適反応は，$\hat{k}^{\theta}$ と z_2 との大小関係で決定する．仮定 6.7 は，このとき，タイプ a の方がより小さい z_2 の値において 最適反応が CD となることを意味する．次の補題が成り立つ．

補題 6.6. 状態 $z = (0, z_2^a, 0, z_4^a; 0, z_2^b, 0, z_4^b)$（$z_4 \geq 2$）において，以下の (i), (ii), (iii) が成り立つ．

(i) $z_2 \leq \hat{k}^{\theta}$ であれば，z からは $\bar{z}_2^{\theta} \leq z_2^{\theta}$，$\bar{z}_4^{\theta} = m^{\theta} - \bar{z}_2^{\theta}$ なる状態 $\bar{z}$ へのみ 1 期で推移可能である．

(ii) $z_2 - 1 \leq \hat{k}^{\theta}$ かつ $z_2 > \hat{k}^{\theta}$ であれば，$\bar{z}_1 = \bar{z}_3 = 0$ であるすべての状態 $\bar{z}$ へ 1 期で推移可能である．

(iii) $z_2 - 1 > \hat{k}^{\theta}$ であれば，$\bar{z}_2^{\theta} \geq z_2^{\theta}$，$\bar{z}_4^{\theta} = m^{\theta} - \bar{z}_2^{\theta}$ なる状態 $\bar{z}$ へのみ 1 期で推移可能である．

ここで，$z_4 = z_4^{\theta} = 1$ のときは，(ii) と (iii) において $z_1^{\theta} = 1$ なる状態へも推移可能となる．$z_4 \geq 2$ は上述の結果が成り立つために必要な仮定である．

以上の準備のもとで，極限集合について次の命題が得られる．

命題 6.5. $\hat{k}^a < m^a < \hat{k}^b$ であれば，極限集合は，$\{(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)\}$（$z_1^\theta + z_2^\theta = m^\theta$），$\{(0, m^a, 0, 0; 0, 0, 0, m^b)\}$ および $\{(0, 0, 0, m^a; 0, 0, 0, m^b)\}$ である．

証明． $\{(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)\}$ が極限集合であることは，状態 $(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)$ において，CC プレイヤーも CD プレイヤーもそれぞれ CC と CD が最適反応であることから明らか．$\{(0, m^a, 0, 0; 0, 0, 0, m^b)\}$ が極限集合でことは，$\hat{k}^a < m^a < \hat{k}^b$ の仮定より CD プレイヤーの最適反応が CD で，DD プレイヤーの最適反応が DD であることから成り立つ．$\{(0, 0, 0, m^a; 0, 0, 0, m^b)\}$ は，４章の分析よりどちらのタイプでも $(DD, ..., DD)$ がナッシュ均衡であることから明らか．状態 $(z_1^a, z_2^a, 0, z_4^a; z_1^b, z_2^b, 0, z_4^b)$（$z_2^a > 0$ かつ $z_4^a > 0$，あるいは $z_2^b > 0$ かつ $z_4^b > 0$）からは，補題 6.6 より，CD プレイヤーが増加するか減少する方向へ状態が推移し，すべての推移先からもとの状態へ推移することができないから，$\{(z_1^a, z_2^a, 0, z_4^a; z_1^b, z_2^b, 0, z_4^b)\}$ は極限集合にはならない．■

以上のように極限集合のクラスが明らかにされた．以下で述べる定理のために２つの状態における DD プレイヤーの最適反応について２つの補題を示す．証明は次節で与える．

補題 6.7. 状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$（$z_4 \geq 2$）と $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ において，$(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4) = (z_1, z_2, z_3 - l, z_4 + l)$（$l > 0$）が成り立つとする．このとき，$CD \in B_{DD}^\theta(z)$ であれば $CD \in B_{DD}^\theta(\hat{z})$ である．

補題 6.8. 任意の k_1 と k_2（$k_1 \geq k_2$）について $f^\theta(C, k_1 + 1) - f^\theta(C, k_1) \leq f^\theta(D, k_2 + 1) - f^\theta(D, k_2)$ が成り立つとする．状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$（$z_4 \geq 2$）と $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ が $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4) = (z_1 - l, z_2 + l, 0, z_4)$（$l > 0$）を満たすとき，$CD \in B_{DD}^\theta(z)$ であれば $CD \in B_{DD}^\theta(\hat{z})$ である．

註． この補題の仮定である条件「$\forall k_1$，$\forall k_2$（$k_1 \geq k_2$），$f^\theta(C, k_1+1) - f^\theta(C, k_1) \leq f^\theta(D, k_2+1) - f^\theta(D, k_2)$」は，平行型線形利得関数の場合や線形利得関数で $f^\theta(C, k)$ の傾きが $f^\theta(D, k)$ の傾きより小さい場合に成り立つ．また，$f^\theta(D, k) - f^\theta(C, k)$ が一定または k について減少し，$f^\theta(D, k)$ と $f^\theta(C, k)$ の差分がそれぞれ k について減少するときもこの条件は成り立つ．

以上の結果から次の定理が得られる．

定理 6.2. $\theta = a, b$ において $f^\theta(C, k_1 + 1) - f^\theta(C, k_1) \leq f^\theta(D, k_2 + 1) - f^\theta(D, k_2)$ が任意の k_1 と k_2（ただし $k_1 \geq k_2$）について成り立つとする．このとき，$\{(0, m^a, 0, 0; 0, 0, 0, m^b)\}$ が

唯一の長期均衡となるための必要十分条件は，$\hat{k}^a < (m^a - 1)/2$ かつ $\hat{k}^a < \hat{k}^b - m^a$ である．

証明． $\{(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)\}$（$z_1^\theta + z_2^\theta = m^\theta$）と表わされる極限集合のクラスを $\mathscr{A}$ で表わす．$0 \le z_1^a \le m^a$，$0 \le z_1^b \le m^b$ よりこれは，$r = (m^a+1)(m^b+1)$ 個の要素をもつ集合である．$\mathscr{A}$ に含まれる極限集合 $\{(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)\}$ と $\{(z_1^a \pm 1, z_2^a \mp 1, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)\}$ の間の推移コストは１，$\{(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b, z_2^b, 0, 0)\}$ と $\{(z_1^a, z_2^a, 0, 0; z_1^b \pm 1, z_2^b \mp 1, 0, 0)\}$ の間の推移コストも１であるから，$\mathscr{A}$ の中の極限集合は互いに推移コスト１のチェーンを形作る．このチェーンの中の推移コストの合計は，$r - 1$ である．命題 6.1 の最小化問題を解くためには，$A_1 = \{(0, m^a, 0, 0; 0, 0, 0, m^b)\}$ と $A_2 = \{(0, 0, 0, m^a; 0, 0, 0, m^b)\}$ の間，およびこれらの極限集合と $\mathscr{A}$ の間の推移コストが分かればよい．ここで，極限集合 A_k（$k = 1, 2$）について，A_k から $\mathscr{A}$ への推移コストを $\min_{A' \in \mathscr{A}} C(A_k, A')$，$\mathscr{A}$ から A_k への推移コストを $\min_{A' \in \mathscr{A}} C(A', A_k)$ と定義する．

まず，A_1 と A_2 の間の推移コストについて考える．$\hat{k}^a$ の定義から $C(A_2, A_1) = \hat{k}^a + 1$，$C(A_1, A_2) = m^a - \hat{k}^a$ が成り立つ．

次に，A_1 から $\mathscr{A}$ への推移コストについて考える．A_1 からコスト $\hat{l}_1 = \hat{k}^b - m^a + 1$ で推移できる状態 $z' = (0, m^a, 0, 0; 0, \hat{l}_1, 0, m^b - \hat{l}_1))$ に注目する．この状態の CD プレイヤーの数は $\hat{k}^b + 1$ 人だから，この状態からは $\mathscr{A}$ に含まれる極限集合 $A_0 = \{(0, m^a, 0, 0; 0, m^b, 0, 0)\}$ に１期で推移可能である．

この $\hat{l}_1$ が A_1 から $\mathscr{A}$ の中の極限集合への推移コストの中で最小の値であることを示す．A_1 から推移コスト l'（$l' < \hat{l}_1$）で到達できる状態 $z^{(1)}$ においては，CD のより多い状態へは推移不可能であることを示そう．$z^{(1)}$ ですべての DC プレイヤーが DD に変更した状態を $z^{(2)}$ とする（DC プレイヤーがいなければ $z^{(2)} = z^{(1)}$ とせよ）．さらに，$z^{(2)}$ ですべての CC プレイヤーが CD に変更した状態を $z^{(3)}$ とする（CC プレイヤーがいなければ $z^{(3)} = z^{(2)}$ とせよ）．$z^{(1)}$ において，CD がタイプ b の DD プレイヤーの最適反応であれば，補題 6.7 より，$z^{(2)}$ においてもそうでなければならない．$z^{(2)}$ において，CD がタイプ b の DD プレイヤーの最適反応であれば，補題 6.8 より，$z^{(3)}$ においてもそうでなければならない．しかし，$z^{(3)}$ において $z_2 < \hat{k}^b$ だから，CD はタイプ b の DD プレイヤーの最適反応にならない．よって，$z^{(1)}$ において，CD はタイプ b の DD プレイヤーの最適反応にならない．$z^{(1)}$ において，CC や DC が最適反応でないので CC プレイヤーと DC プレイヤーが少なくなるよ

うに状態は推移するが，たとえ全員が CD を採ったとしても $(0, m^a, 0, 0; 0, l', 0, m^b - l')$ にしかならず，CD はタイプ b の DD プレイヤーの最適反応にならない．よって，$z^{(1)}$ から CD のより多い状態へは推移不可能である．よって，A_1 から $\hat{l}_1$ よりも小さな推移コストで $\mathscr{A}$ に推移することはできない．

次に，A_2 から $\mathscr{A}$ への推移コストについて考える．$z'' = \{(\hat{k}^b{+}1, 0, 0, m^a{-}(\hat{k}^b{+}1); 0, 0, 0, m^b)$ に注目する．CD プレイヤーの数が十分大きいので，この状態からは $\mathscr{A}$ に含まれる極限集合 $A_0 = \{(m^a, 0, 0, 0; m^b, 0, 0, 0)\}$ に１期で推移可能である．上述の A_1 から $\mathscr{A}$ の中の極限集合への最小の推移コストが $\hat{l}_1$ であることの証明と同様にして，この $\hat{l}_2 = \hat{k}^b - m^a + 1$ が A_2 から $\mathscr{A}$ へ最も小さい推移コストであることを示すことができる．

$\mathscr{A}$ から A_1，A_2 への推移コストについて考える．極限集合 $A_{01}{=}\{(0, m^a, 0, 0; m^b, 0, 0, 0)\}$ に注目する．ここで，１人のミューテーションによって，$\{(0, m^a, 0, 0, 0; m^b - 1, 0, 0, 1)\}$ に移るとすべての CC プレイヤーにとって DD が最適反応になり，１期で A_1 へ推移可能となる．よって，$C(A_{01}, A_1) = 1$ である．また，極限集合 $A_0{=}\{(m^a, 0, 0, 0; m^b, 0, 0, 0)\}$ に注目する．ここで，１人のミューテーションによって，$\{(m^a, 0, 0, 0; m^b - 1, 0, 0, 1)\}$ に移るとすべての CC プレイヤーにとって DD が最適反応になり，１期で A_2 へ推移可能となる．よって，$C(A_{02}, A_2) = 1$ である．よって，$\mathscr{A}$ から A_1，A_2 への推移コストは，どちらも１である．

A_1-ツリーの中で総推移コストの最小のものは，以下の３つの中のいずれかである．

(1.1) $A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \mathscr{A}$：総推移コストは，$(\hat{k}^a + 1) + 1 + (r - 1) = \hat{k}^a + r + 1$.

(1.2) $A_1 \leftarrow \mathscr{A} \leftarrow A_2$：総推移コストは，$1 + (r - 1) + \hat{k}^b + 1 = \hat{k}^b + r + 1$.

(1.3) $A_2 \rightarrow A_1 \leftarrow \mathscr{A}$：総推移コストは，$(\hat{k}^a + 1) + 1 + (r - 1) = \hat{k}^a + r + 1$.

$\hat{k}^b - \hat{k}^a > m^a$ の仮定より $\hat{k}^b > \hat{k}^a$ だから，これらの中で最小のものは，(1.1) と (1.3) の $\hat{k}^a + r + 1$ である．

A_2-ツリーの中で総推移コストの最小のものは，以下の３つの中のいずれかである．

(2.1) $A_2 \leftarrow A_1 \leftarrow \mathscr{A}$：総推移コストは，$(m^a - \hat{k}^a) + 1 + r - 1 = m^a - \hat{k}^a + r$.

(2.2) $A_2 \leftarrow \mathscr{A} \leftarrow A_1$：総推移コストは，$1 + (r - 1) + \hat{k}^b - m^a + 1 = \hat{k}^b - m^a + r + 1$.

(2.3) $A_1 \rightarrow A_2 \leftarrow \mathscr{A}$：総推移コストは，$(m^a - \hat{k}^a) + 1 + r - 1 = m^a - \hat{k}^a + r$.

ここで，$\hat{k}^a < (m^a - 1)/2$ の仮定より $m^a - \hat{k}^a > \hat{k}^a + 1$ だから，(2.1)，(2.3) の総推移コストは，$\hat{k}^a + r + 1$ より大きい．また，$\hat{k}^b - \hat{k}^a > m^a$ の仮定から，(2.2) の総推移コストは，$\hat{k}^a + r + 1$ より大きい．よって，いずれも (1.1) や (1.3) の総推移コスト $\hat{k}^a + r + 1$ を上回る．

$A \in \mathscr{A}$ である A-ツリーの中で総推移コストの最小のものは，以下の３つの中のいずれかである．

(3.1) $\mathscr{A} \leftarrow A_1 \leftarrow A_2$：総推移コストは，$(r-1)+(\hat{k}^b-m^a+1)+(\hat{k}^a+1) = \hat{k}^a+\hat{k}^b-m^a+r+1$.

(3.2) $\mathscr{A} \leftarrow A_2 \leftarrow A_1$：総推移コストは，$(r-1)+(\hat{k}^b+1)+(m^a-\hat{k}^a) = \hat{k}^b-\hat{k}^a+m^a+r-1$.

(3.3) $A_1 \rightarrow \mathscr{A} \leftarrow A_2$：総推移コストは，$(\hat{k}^b-m^a+1)+(r-1)+(\hat{k}^b+1) = 2\hat{k}^b-m^a+r+1$.

仮定より $\hat{k}^b > m^a$ だから，(3.1) の総推移コストは $\hat{k}^a+r+1$ より大きい．また，仮定から $\hat{k}^b > \hat{k}^a$ であるので，(3.2) の総推移コストは m^a+r 以上であるが，これは，$\hat{k}^a < (m^a-2)/2$ の仮定より $\hat{k}^a+r+1$ より大きい．最後に，$\hat{k}^b > \hat{k}^a$ より (3.3) の総推移コストは，(3.1) のそれより大きい．

以上により，この定理の仮定のもとでは，A_1 が命題 6.1 の最小化問題の解となり，唯一の長期均衡となる．

なお，仮定 $\hat{k}^a < (m^a-1)/2$ が成り立たなければ，(2.1) や (2.3) の総推移コスト $\leq$ (1.1) や (1.3) の総推移コストとなる．また，$\hat{k}^a < \hat{k}^b - m^a$ が成り立たなければ，(2.2) の総推移コスト $\leq$ (1.1) や (1.3) の総推移コストとなる．どちらの場合も A_2-ツリーと A_1-ツリーの総推移コストの比較において前者の方が後者より大きいか等しい方が小さくなり，A_1 は唯一の長期均衡ではなくなる．■

このように，２タイプモデルでは一定の条件のもとで，あるタイプのプレイヤーが全員 CD を採りもう１つのタイプのプレイヤーが全員 DD を採る状態が，長期均衡となる．この状態は，$m = n$ の場合には１つの戦略プロファイルとなるので，１つのナッシュ均衡が進化的安定性によって選択されたと考えることができる．

２タイプモデルにおけるこの結果は，前節の１タイプモデルにおいては全員が DD を採る状態のみが長期均衡になったことと対照的である．前節の１タイプモデルでは，全員が CD を採る状況が生じたとき，プレイヤーのミューテーションで CC を採るプレイヤーが増えていき，ついには CC プレイヤーばかりになった結果，ミューテーションで１人の DD プレイヤーが生じると一挙に全員が DD を採るようになった．本節の２タイプモデルでは，一方のタイプのプレイヤーが DD を採ることによって，そのような CC プレイヤーの増加が抑えられている．いわば，逸脱者が存在することにより，そのような者に出会ったしたときに D を採ることの必要性から CD が忘れられることがないので，CD の選択が維持されるのである．

この定理の仮定の $\hat{k}^a < (m^a-1)/2$ は，$k = [(m^a-1)/2]$ なる k について $v^a(CD,(0,k,0,0,m-k-1)) > v^a(DD,(0,k,0,0,m-k-1))$ が成り立つことを意味する[11]．これはタイプ a のプレイヤーにとっては，同じタイプのプレイヤーの中のたとえ半分しか CD を採る者がいなくても DD より CD を採る方が良いことを意味する．また，$\hat{k}^a < \hat{k}^b - m^a$ の仮定は，$\hat{k}^a$ が $\hat{k}^b$ よりも大幅に小さいことを意味するが，これが A_1 から $\mathscr{A}$ を経由して A_2 に推移するコストが十分大きく，A_2-ツリーの総推移コストが A_1-ツリーの総推移コストを下回らないことを保証する．

上の定理で示された長期均衡の存在を次の例で見ることができる．

表 6.1: 平行型線形利得関数の囚人のジレンマ

		プレイヤー 2	
		C	D
プレイヤー 1	C	6, 6	0, 6+ β
	D	6+β, 0	β, β

例 6.1. 表 6.1 のような囚人のジレンマを考える．このゲームの利得関数は，$\alpha = 1$ の平行型線形利得関数として表すことができる．タイプの違いは β の値の違いであるとし，後に β^θ（$\theta = a, b$）の値を $0 < \beta^\theta < 3$ の範囲で具体的に与える．$0 < \beta^\theta < 3$ よりどちらのタイプにおいても条件 $(c1)$ が成り立つ．以下では，まず，この利得関数について，一般の β について $\hat{k}$ を求める．次にその結果に基づいて，定理 6.2 の仮定を満たす β^a，β^b，m^a，m^b が存在することを確認する．

まず，$U(CD,CD) = 6$，$U(CD,DD) = \beta/2$，$U(DD,CD) = 3+\beta/2$，$U(DD,DD) = \beta$ が確かめられる．よって，CD プレイヤーに出会う確率が p，DD プレイヤーに出会う確率が $1-p$（$0 \le p \le 1$）のとき，CD を採るときの期待利得は，

$$pU(CD,CD) + (1-p)U(CD,DD) = 6p + \frac{\beta}{2}(1-p)$$

DD を採るときの期待利得は，

$$pU(DD,CD) + (1-p)U(DD,DD) = (3+\beta)p + \beta(1-p)$$

[11] [ ] はガウス記号を表わす．

となる．これらの関数のグラフの交点は，$p = \beta/(6-\beta)$ となる．よって，$\hat{k}$ は，$k/m < \beta/(6-\beta)$ を満たす最大の整数 k となる．

いま，$\beta^a = 0.1$，$\beta^b = 2.9$，$m^a = 910$，$m^b = 90$ とする．このとき，$\hat{k}^a = 17$，$\hat{k}^b = 935$ であるから，$\hat{k}^a < 454.5 = (m^a - 1)/2$ および $\hat{k}^b - \hat{k}^a = 918 > m^a$ が成り立つ．よって，定理 6.2 の仮定が満たされ $A_1 = \{(0, 910, 0, 0; 0, 0, 0, 90)\}$ が唯一の長期均衡となる．

この均衡では，910 人のタイプ a のプレイヤーが CD を採り，90 人のタイプ b のプレイヤーが DD を採る．タイプ a のプレイヤーは，約 91 %の確率で同じタイプ a のプレイヤーにマッチングして協力 (C, C) を実現できる．□

6.5 補題の証明

この節では，前節で述べた補題 6.7 と 6.8 を証明する．

補題 6.7 の証明のためには，さらに 1 つの補題が必要である．まず，任意のプレイヤー i と j を定める．プレイヤー j の戦略 s_j と i と j 以外のプレイヤーの戦略 s_{-ij} に対してプレイヤー i が CD を採るときの期待利得と DD を採るときの期待利得の差を次のように定義する．

$$u^{\theta}_{dif.}(s_j, s_{-ij}) = u^{\theta}(CD, s_j, s_{-ij}) - u^{\theta}(DD, s_j, s_{-ij})$$

ただし，θ はプレイヤー i のタイプで，u^{θ} はタイプ θ のプレイヤーの $\Gamma(\mathscr{R})$ における利得関数である．次の補題が成り立つ．

補題 6.9. 任意の s_{-ij} において，$u^{\theta}_{dif.}(DD, s_{-ij}) > u^{\theta}_{dif.}(DC, s_{-ij})$ が成り立つ．

証明． 順序 π が選ばれた後，戦略の組 s においてプレイヤー i が得る利得を $u^{\theta}_i(s : \pi)$ で表わす．この補題を証明するためには，いかなる順序 π においても

$$u^{\theta}_{dif.}(DD, s_{-ij} : \pi) \geq u^{\theta}_{dif.}(DC, s_{-ij} : \pi)$$

が成り立ち，ある π においては，これが厳密な不等式で成り立つことを示せばよい．以下，順序 π について場合分けする．

（1）$\pi(j) < \pi(i)$ のとき．プレイヤー j の戦略が DD と DC のいずれであってもプレイヤー i が CD，DD を採るときの選択はどちらでも D であるので，左辺 = 右辺 = 0 である．

（2）$\pi(i) < \pi(j)$ のとき．プレイヤー i の前に DC プレイヤーまたは DD プレイヤーがいる順序では,（1）と同様に 左辺 = 右辺 = 0 である．プレイヤー i と j の間に DC プレイヤーまたは DD プレイヤーがいる順序では，プレイヤー j が DD を採るときは彼は D を選択し，DC を採るときは C をプレイするが，これは，プレイヤー i の戦略に無関係であるので，左辺 = 右辺 が成り立つ．最後にプレイヤー i と j の間に 1 人も DC または DD を採るプレイヤーがいない場合を考える．このとき，プレイヤー i が CD を採れば，プレイヤー j は DD と DC のいずれを採るときも D をプレイするので，$u^\theta(CD, DD, s_{-ij} : \pi) = u^\theta(CD, DC, s_{-ij} : \pi)$ である．プレイヤー i が DD を採れば，プレイヤー j が DD を採るときのプレイは D であり，プレイヤー j が DC を採るときのプレイは C であるので，$u^\theta(DD, DD, s_{-ij} : \pi) < u^\theta(DD, DC, s_{-ij} : \pi)$ である．よって，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= u^\theta(CD, DD, s_{-ij} : \pi) - u^\theta(DD, DD, s_{-ij} : \pi) \\ &> \text{右辺} = u^\theta(CD, DC, s_{-ij} : \pi) - u^\theta(DD, DC, s_{-ij} : \pi) \end{aligned}$$

が成り立つ．以上により求める結論が得られる．■

補題 6.7 の証明

$l = 1$ について示す．それができれば，任意の $l \geq 2$ についても成り立つことは明らか．プレイヤー $1, 2, ..., m$ を N_1,..., N_4 の 4 つのグループに分ける．それぞれの人数を z_1,...,z_4 人とする．ただし，$z_3, z_4 \geq 1$ とする．N_1 のプレイヤーが CC を採り，N_2 のプレイヤーが CD を採り，N_3 のプレイヤーが DC を採り，N_4 のプレイヤーが DD を採る状況を状況 1 とする．これは状態 $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ である．この状況で N_4 に属するタイプ θ のプレイヤー i において $CD \in B^\theta_{DD}(z)$ であるための条件は，$v^\theta(CD, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1)) \geq v^\theta(DD, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1))$ である．状況 1 における各プレイヤー k（$k = 1, 2, ..., m$）の戦略を s_k と表わすと，

$$v^\theta(s_i, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1)) = \sum_{\{i_1,...,i_{n-1}\} \subset \{1,2,...,m\} - \{i\}} \frac{1}{\binom{m-1}{n-1}} u^\theta(s_i, s_{i_1} ..., s_{i_{n-1}})$$

と表せる．よって，

$$\begin{aligned} &v^\theta(CD, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1)) - v^\theta(DD, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1)) \\ &\quad = \sum_{\{i_1,...,i_{n-1}\} \subset \{1,2,...,m\} - \{i\}} \frac{1}{\binom{m-1}{n-1}} \{u^\theta(CD, s_{i_1} ..., s_{i_{n-1}}) - u^\theta(DD, s_{i_1} ..., s_{i_{n-1}})\} \end{aligned}$$

が成り立つ．

一方，N_3 の中の１人のプレイヤーをプレイヤー j と呼び，状況１から，j のみが選択を DC から DD に変更した状況を状況２と呼ぶ．この状態は $\hat{z} = (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4 + 1)$ と表わされる．プレイヤー i にとって状況２で CD が最適反応であるための条件は，$v^\theta(CD, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4)) \geq v^\theta(DD, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4))$ である．状況２におけるプレイヤー k（$k = 1, 2, ..., m$）の戦略を $\hat{s}_k$ と表わすと，

$$v^\theta(s_i, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4)) = \sum_{\{i_1,...,i_{n-1}\} \subset \{1,2,...,m\} - \{i\}} \frac{1}{\binom{m-1}{n-1}} u^\theta(s_i, \hat{s}_{i_1}..., \hat{s}_{i_{n-1}})$$

と表すことができる．よって，

$$v^\theta(CD, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4)) - v^\theta(DD, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4))$$

$$= \sum_{\{i_1,...,i_{n-1}\} \subset \{1,2,...,m\} - \{i\}} \frac{1}{\binom{m-1}{n-1}} \{u^\theta(CD, \hat{s}_{i_1}..., \hat{s}_{i_{n-1}}) - u^\theta(DD, \hat{s}_{i_1}..., \hat{s}_{i_{n-1}})\}$$

が成り立つ．

ここで，任意の $\{i_1, ..., i_{n-1}\} \subset \{1, 2, ..., m\} - \{i\}$ について，

$$\Delta = u^\theta(CD, s_{i_1}..., s_{i_{n-1}}) - u^\theta(DD, s_{i_1}..., s_{i_{n-1}})$$

と

$$\hat{\Delta} = u^\theta(CD, \hat{s}_{i_1}..., \hat{s}_{i_{n-1}}) - u^\theta(DD, \hat{s}_{i_1}..., \hat{s}_{i_{n-1}})$$

の比較を行う．$i_1, ..., i_{n-1}$ の中に j が含まれなければ，明らかに $\Delta = \hat{\Delta}$ である．$i_1, ..., i_{n-1}$ の中に j が含まれるとき．$(s_{i_1}..., s_{i_{n-1}})$ と $(\hat{s}_{i_1}..., \hat{s}_{i_{n-1}})$ を比較すると，プレイヤー j 以外は同じ戦略を採り，プレイヤー j は前者において DC を採り後者において DD を採る．よって，補題 6.9 より，$\Delta < \hat{\Delta}$ が成り立つ．こうして，

$$v^\theta(CD, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1)) - v^\theta(DD, (z_1, z_2, z_3, z_4 - 1))$$

$$< v^\theta(CD, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4)) - v^\theta(DD, (z_1, z_2, z_3 - 1, z_4))$$

が得られる．よって，左辺が正であれば右辺も正であり，$CD \in B^\theta_{s_i}(z)$ ならば $CD \in B^\theta_{s_i}(\hat{z})$ が得られる．■

補題 6.8 の証明のために次の補題が必要である．

補題 6.10. 任意の k_1 と k_2（ただし $k_1 \geq k_2$）について $f^\theta(C, k_1+1) - f^\theta(C, k_1) \leq f^\theta(D, k_2+1) - f^\theta(D, k_2)$ が成り立てば，DC を含まない任意の s_{-ij} において，$u^\theta_{dif.}(CD, s_{-ij}) > u^\theta_{dif.}(CC, s_{-ij})$ が成り立つ．

証明． 補題を証明するためには，いかなる π においても，

$$u^\theta_{dif.}(CD, s_{-ij} : \pi) \geq u^\theta_{dif.}(CC, s_{-ij} : \pi)$$

が成り立ち，ある π において，これが厳密な不等式で成り立つことを示せばよい．順序 π について場合分けする．

（1）$\pi(j) < \pi(i)$ の場合．プレイヤー i の前に DC または DD を採るプレイヤーが少なくとも 1 人いるとき，プレイヤー i は CD と DD のいずれを採ろうとも D をプレイヤーするので，左辺=右辺=0 である．プレイヤー i の前に DC または DD を採るプレイヤーが 1 人もいないときは，プレイヤー j は CD と CC のいずれを採ろうとも C をプレイするので，左辺=右辺が成り立つ．

（2）$\pi(i) < \pi(j)$ の場合．プレイヤー i の前に DC または DD を採るプレイヤーが少なくとも 1 人いるとき，上に述べた理由により左辺=右辺=0 が成り立つ．

プレイヤー i の前に DC または DD を採るプレイヤーが 1 人もいない場合を考える．ここで，プレイヤー i と j の間に少なくとも 1 人の DC または DD プレイヤーがいるとき，プレイヤー j は CD を採るときには D を，CC を採るときは C をプレイする．よって，プレイヤー i が CD を採るとき，プレイヤー j が $s_j = CD$ を採るならば，このときに i と j 以外で C をプレイするプレイヤーの数を k_1 とすると $u^\theta(CD, s_j, s_{-ij}) = f^\theta(C, k_1)$ となり，j が $s'_j = CC$ を採るならば $u^\theta(CD, s'_j, s_{-ij}) = f^\theta(C, k_1+1)$ となる．プレイヤー i が DD を採るとき，プレイヤー j が $s_j = CD$ を採るならば，このときのプレイヤー j 以外の C をプレイするプレイヤーの数を k_2 とすると，$u^\theta(DD, s_j, s_{-ij}) = f^\theta(D, k_2)$ となり，j が $s'_j = CC$ を採るならば $u^\theta(DD, s'_j, s_{-ij}) = f^\theta(D, k_2+1)$ となる．よって，問題の不等式は，左辺 $= f^\theta(C, k_1) - f^\theta(D, k_2)$，右辺 $= f^\theta(C, k_1+1) - f^\theta(D, k_2+1)$ となり，

$$\begin{aligned} \text{左辺} \geq \text{右辺} \quad &\Longleftrightarrow \quad f^\theta(C, k_1) - f^\theta(D, k_2) \geq f^\theta(C, k_1+1) - f^\theta(D, k_2+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad f^\theta(D, k_2+1) - f^\theta(D, k_2) \geq f^\theta(C, k_1+1) - f^\theta(C, k_1) \end{aligned}$$

である．いま，s_{-ij} は DC を含まないことから $k_1 \geq k_2$ が成り立つので，補題の仮定より左辺 $\geq$ 右辺 が得られる．

最後に，プレイヤー j の前に DC または DD を採るプレイヤーが 1 人もいない場合について考える．このとき，プレイヤー i が CD を採れば，j が $s_j = CD$ と $s'_j = CC$ のいずれを採るときも C をプレイするので，$u_i^\theta(CD, s_j, s_{-ij} : \pi) = u_i^\theta(CD, s'_j, s_{-ij} : \pi)$ が成り立つ．一方，プレイヤー i が DD を採るときプレイヤー j が CD を採れば D をプレイし，CC を採れば C をプレイするので，$u_i^\theta(DD, s_j, s_{-ij} : \pi) < u_i^\theta(DD, s'_j, s_{-ij} : \pi)$ が成り立つ．よって，左辺 $>$ 右辺 $= 0$ が成り立つ．

以上により求める結論が得られる．■

補題 6.9 から補題 6.7 を導出した論法と同様にして，この補題 6.10 から補題 6.8 が得られる．

補題 6.8 の証明

略．■

6.6 まとめ

本章では，非協力行動の有無が観察されるジレンマゲームに対して，KMR 進化ゲームを適用し，いかなる状態が長期均衡となるかを検討した．

前半では，すべてのプレイヤーが同一の利得関数を持ち，最適反応に対して安定な状態が全員が CD を採る状態と全員が DD を採る状態の 2 つだけである場合を分析した．そしてこの場合は，プレイヤー全員が DD を採る状態のみが長期均衡となることを明らかにした．これは，プレイヤー全員が CD を採る状態においては，ミューテーションによって CC を採るプレイヤーが侵入したときに CC がそのまま最適反応になり，CC を採るプレイヤーが増えていくといずれミューテーションでたった 1 人の DD プレイヤーが出現することによって全員にとって DD が最適反応になってしまうからである．

本章の後半では，プレイヤーが 2 つの利得関数のどちらかを持つ 2 タイプの状況を分析した．そして，一定の条件のもとで，一方のタイプのプレイヤーが CD を採りもう一方のタイプのプレイヤーが DD を採る状態が長期均衡となることを明らかにした．そこでは，DD プレイヤーとマッチングすることがあるので，ミューテーションによって CC を採るプレイ

ヤーが侵入してもすぐに最適反応によって CD を採るようになるからである．言いかえれば，社会の多様性と非協力行動を採る逸脱者の存在によって，一部のプレイヤーが協力行動を採る状態が進化的に安定となり得るのである．

後半の結果は，非協力行動の有無が観察可能性な状況では，限定合理的な主体の適応行動によって社会的ジレンマが部分的に解消する可能性があることを示唆している．

第7章　終章

本論文では，ジレンマ的利得構造のもとで非協力行動の観察可能性に焦点をあて，これが社会的ジレンマの解消の要因としてどのように働くかを検討した．非協力行動が観察される状況を「非協力行動の採られた数が観察される情報構造」と「非協力行動の有無が観察される情報構造」で表し，これらの情報構造を持つジレンマゲームのナッシュ均衡を分析することによって協力行動の実現可能性を検討した．

本論文の主要な貢献は以下の３つである．

1. 上述の２つの情報構造のもとでは，全員または一部のプレイヤーが協力行動を採るナッシュ均衡，プレイヤー全員が非協力行動を採るナッシュ均衡が存在し，それらが，プレイヤーの選択ミスに対して一定の安定性をもつことを示した．これは，ジレンマ的利得構造のもとであっても社会的ジレンマが解消される可能性があることを示唆する．

2. 協力行動の実現に対する有効性について，上述の２つの情報構造を他のあり得るすべての情報構造と比較した．プレイヤー全員の協力行動の実現については，これらの２つの情報構造は最も有効性の高い情報構造であることを明らかにした．情報構造と戦略プロファイルについて対称性を定義し，対称性が成り立つ範囲で比較すると，非協力行動の数が観察される情報構造は，任意の数の協力行動の実現に関して最も有効性の高い情報構造であることを示した．

3. 非協力行動の有無が観察される情報構造を持つジレンマゲームに Kandori *et al.*（1993）による進化ゲームの理論を適用し，長期均衡となる状態を検討した．全員が同一の利得関数を持ち，全員が協力行動を採る状態と全員が非協力行動を採る状態の２つのみが最適反応に対して安定である場合は，後者のみが長期均衡となることを明らかにした．また，２種類の利得関数のプレイヤーが混在する２タイプの場合は，一定の条件が満たされれば，一方のタイプのプレイヤーが協力行動をもう一方のタイプのプレイヤーが非協力行動を採ることが唯一の長期均衡となることを示した．

第１の結果から，非協力行動の観察可能性は社会的ジレンマの解消の要因となり得ると言うことができる．また，人々が上述の２つの情報構造のいずれかを持つ場合に，社会的ジレンマが生起していたとしても，それは複数あるナッシュ均衡の１つに過ぎない可能性がある．その場合は，均衡の変更によって社会的ジレンマが解消される可能性がある．

第２の結果は，本論文で検討した２つの情報構造が協力行動の実現に対して相当に効果的であることを意味する．理論的にあり得る情報構造は非常に多いが，それらの中で本論文で考察した２つの情報構造は特に優れたものであるということができる．

第３の結果のうち，前半は，社会的ジレンマの解消に関して悲観的な結果である．しかし，後半の結果は，２タイプの場合には進化的に協力行動が採られるようになり，社会的ジレンマが解消する可能性があることを示している．そのとき，一部に非協力行動を採り続ける人々がいることが重要で，それらの人々の存在が協力行動の維持につながることが明らかにされた．

本論文で分析した２つのゲームは，実際に起こりうるゲーム的状況を単純化したものであり，いくつかの方向で拡張することができる．

まず，本論文では，非協力行動は確実に観察され協力行動は全く観察されないという仮定を置いたが，これは特殊な状況で，どちらの行動も何らかの確率で観察され，その確率が異なるとする方がより一般的であろう．そのような設定の試論として２人ゲームの分析を付録Ｃに示す．そこでは，２つの行動の観察確率がある範囲にある場合，高い確率でどちらのプレイヤーも協力行動を採る部分ゲーム完全均衡が存在する．この分析を一般の n 人ゲームとして分析することにより，行動の観察可能性と協力の実現の関係がより一般的に明らかにされるであろう．これは，１つの重要な拡張の方向である．

また，実際のゲーム的状況では，人々が協力行動か非協力行動の選択を行う時点を選んでいる可能性がある．第１章の事例１の家畜の放牧の例では，牛飼いたちは，家畜の子供が売られるシーズン中の適当な時期に，市場に行って仔牛か仔ヤギを購入する．行動の決定時点を後の方にすれば，他者の非協力行動を観察できる可能性が高まる．しかし，シーズンの後の方になるほど家畜の価格が高くなったり家畜を購入できなくなる可能性が高まることが考えられる．付録Ｄでは，時間の経過による価格上昇を考慮に入れて，２人の牛飼いが行動決定時点を選ぶ場合の分析の試論を行っている．分析の結果，１つの部分ゲーム完全均衡の存在が明らかにされ，そこでは，２人の牛飼いは一様分布の混合確率によって行動決定時点

を選び，行動決定に際しては第３章における CD 戦略を採る．この均衡では，どちらのプレイヤーが先に行動を決定するかが 1/2 ずつの確率となる．これは，本論文で「自然」によって外生的に決定するとした行動決定の順序が，戦略的選択の結果として内生的に決定することを示している．この分析を一般の n 人ゲームとして分析することにより，より一般的な協力行動の実現の可能性が明らかにされるであろう．これもまた１つの重要な拡張の方向である．

人々が互いの行動をどのように観察して行動を行うかは，観察可能な範囲や不確実性の存在，各人の行動の選択の仕方などを考慮すると多種多様であり，本論文で検討した状況はその中のごく一部である．様々な行動の観察可能性が社会的ジレンマの解消にどのように働くかを明らかにするためには，より詳しい研究が必要である．そのような研究の第一歩として本論文を位置づける．

付 録 A　$\hat{s}^k$ が完全均衡とならない例

この付録Aでは，$\Gamma(\mathscr{Q})$ の戦略プロファイル $\hat{s}^k$ が，ナッシュ均衡であっても完全均衡でないことを反例によって示す．

例 A.1.　プレイヤー１と２が次のような利得関数を持つ３人ゲームを考える．

$$f_i(C,0) = -4,\ f_i(C,1) = -1,\ f_i(C,2) = 0$$

$$f_i(D,0) = -3,\ f_i(D,1) = 0,\ f_i(D,2) = 4$$

このとき，$(ck2)$ の条件は，$i = 1,2$ について $f_i(C,1) \geq (1/3)f_i(D,0)$ が成り立つことである．これは等式で成り立つので $(s_1^{\{0,1\}}, s_2^{\{0,1\}}, s_3^{\phi})$ はナッシュ均衡である．しかし，以下に示すようにこれは完全均衡ではない．

$\lim_{\nu\to\infty} \eta^\nu = 0$ を満たす列 $\{\eta^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ と $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathscr{P})$ の行動戦略の組の列 $\{b_1^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$，$\{b_2^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$，$\{b_3^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ を考える．ただし，これらの戦略の列は，各々$s_1^{\{0,1\}}$, $s_2^{\{0,1\}}$, s_3^{ϕ} に収束すると仮定する．以下では，十分に大きな ν において，$(b_1^\nu, b_2^\nu, b_3^\nu)$ は，$\Gamma_{\eta^\nu}(\mathrm{P})$ のナッシュ均衡でないことを示す．これによって，$(s_1^{\{0,1\}}, s_2^{\{0,1\}}, s_3^{\phi})$ が完全均衡でないことが示される．

以下，(1) から (4) に分けて $(b_1^\nu, b_2^\nu, b_3^\nu)$ が $\Gamma_{\eta^\nu}(\mathrm{P})$ のナッシュ均衡でないことを示す．なお，以下では記号の簡単化のために $b_i^\nu(Q_i^k, a)$ を $b(ik, a)$ と表わす．

まず，情報集合 Q_1^0 で C を採るときのプレイヤー１の条件付期待利得を求める．この情報集合に入るプレイヤー１の意思決定ノードをその前に選ばれた順序とプレイヤー１の手番までに採られた選択によって表わす．ただし，プレイヤー１が順序の先頭であるときは，それまでに採られた選択は ϕ で表わす．Q_1^0 に含まれるノードとその到達確率は次のようになる．$(123, \phi)$ と $(132, \phi)$ は $1/6$，$(213, C)$ は $(1/6)(1-b(20,D))$，$(231, CC)$ は $(1/6)(1-b(20,D))b(30,C)$，$(312, C)$ は $(1/6)b(30,C)$，$(321, CC)$ は $(1/6)b(30,C)(1-b(20,D))$．

これらの各ノードにおいてプレイヤー１が C を採るときの期待利得は以下のようになる．

$(123, \phi)$ では，

$$
\begin{aligned}
&b(20,C)b(30,C)f_1(C,2)+b(20,C)b(30,D)f_1(C,1)\\
&\qquad +b(20,D)b(31,C)f_1(C,1)+b(20,D)b(30,D)f_1(C,0)\\
&=-(1-b(20,D))(1-b(30,C))\\
&\qquad -b(20,D)b(31,C)-4b(20,D)(1-b(30,C))\\
&=-1-3b(20,D)+b(30,C)+3b(20,D)b(30,C)-b(20,D)b(31,C).
\end{aligned}
$$

$(132,\phi)$ では，

$$
\begin{aligned}
&b(30,C)b(20,C)f_1(C,2)+b(30,C)b(20,D)f_1(C,1)\\
&\qquad +b(30,D)b(21,C)f_1(C,1)+b(30,D)b(21,D)f_1(C,0)\\
&=-b(30,C)b(20,D)-(1-b(30,C))(1-b(21,D))-4(1-b(30,C))b(21,D)\\
&=-1-3b(21,D)+b(30,C)-b(20,D)b(30,C)+3b(21,D)b(30,C).
\end{aligned}
$$

$(213,C)$ では，

$$
b(30,C)f_1(C,2)+b(30,D)f_1(C,1)=-(1-b(30,C))=-1+b(30,C).
$$

$(231,CC)$ では，$f_1(C,2)=0$.

$(312,C)$ では，$b(20,C)f_1(C,2)+b(20,D)f_1(C,1)=-b(20,D)$

$(321,CC)$ では，$f_1(C,2)=0$.

これらより，Q_1^0 においてプレイヤー１が C を採るときの条件付期待利得は，

$$
\begin{aligned}
&E(10,C)\\
&=\tfrac{1}{6h_0}[\{-1-3b(20,D)+b(30,C)+3b(20,D)b(30,C)-b(20,D)b(31,C)\}\\
&\qquad +\{-1-3b(21,D)+b(30,C)-b(20,D)b(30,C)+3b(21,D)b(30,C)\}\\
&\qquad +(1-b(20,D))(-1+b(30,C))-b(30,C)b(20,D))]\\
&=\tfrac{1}{6h_0}[-3-2b(20,D)-3b(21,D)+3b(30,C)-b(20,D)b(31,C)+3b(21,D)b(30,C)]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，h_0 は，Q_1^0 に含まれる６つのノードの到達確率の合計である．

一方，Q_1^0 に入る各ノードにおいてプレイヤー１が D を採るときの期待利得は以下のようになる．

$(123,\phi)$ では，

$$
\begin{aligned}
&b(21,C)b(31,C)f_1(D,2)+b(21,C)b(31,D)f_1(D,1)\\
&\qquad +b(21,D)b(32,C)f_1(D,1)+b(21,D)b(32,D)f_1(D,0)\\
&=4(1-b(21,D))b(31,C)-3b(21,D)(1-b(32,C))\\
&=4b(31,C)-4b(21,D)b(31,C)-3b(21,D)(1-b(32,C)).
\end{aligned}
$$

$(132,\phi)$ では，

$$
\begin{aligned}
&b(31,C)b(21,C)f_1(D,2)+b(31,C)b(21,D)f_1(D,1)\\
&\qquad +b(31,D)b(22,C)f_1(D,1)+b(31,D)b(22,D)f_1(D,0)\\
&=4b(31,C)(1-b(21,D))-3(1-b(31,C))(1-b(22,C))\\
&=4b(31,C)-4b(31,C)b(21,D)-3+3b(31,C)+3b(22,C)-3b(22,C)b(31,C).
\end{aligned}
$$

$(213,C)$ では，$b(31,C)f_1(D,2)+b(31,D)f_1(D,1)=4b(31,C)$.

$(231,CC)$ では，$f_1(D,2)=4$.

$(312,C)$ では，$b(21,C)f_1(D,2)+b(21,D)f_1(D,1)=4b(21,C)=4-4b(21,D)$.

$(321,CC)$ では，$f_1(D,2)=4$.

これらより，$Q10$ においてプレイヤー 1 が D を採るときの条件付期待利得は，

$$
\begin{aligned}
E(10,D)=&\tfrac{1}{6h_0}[\{4b(31,C)-4b(21,D)b(31,C)-3b(21,D)(1-b(32,C))\}\\
&+\{4b(31,C)-4b(31,C)b(21,D)-3+3b(31,C)+3b(22,C)-3b(22,C)b(31,C)\}\\
&+4(1-b(20,D))b(31,C)+4(1-b(20,D))b(30,C)\\
&+b(30,C)\{4-4b(21,C)\}+4b(30,C)(1-b(20,D))]\\
=&\tfrac{1}{6h_0}[-3-3b(21,D)+3b(22,C)+12b(30,C)+15b(31,C)\\
&-8b(20,D)b(30,C)-4b(20,D)b(31,C)-4b(21,C)b(30,C)\\
&-8b(21,D)b(31,C)+3b(21,D)b(32,C)-3b(22,C)b(31,C)]
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&6h_0\{E(10,C)-E(10,D)\}\\
&=\{-3-2b(20,D)-3b(21,D)+3b(30,C)-b(20,D)b(31,C)+3b(21,D)b(30,C)\}\\
&\qquad -\{-3-3b(21,D)+3b(22,C)+12b(30,C)+15b(31,C)\\
&\qquad -8b(20,D)b(30,C)-4b(20,D)b(31,C)-4b(21,C)b(30,C)\\
&\qquad -8b(21,D)b(31,C)+3b(21,D)b(32,C)-3b(22,C)b(31,C)\}\\
&=-2b(20,D)-3b(22,C)-9b(30,C)-15b(31,C)+8b(20,D)b(30,C)\\
&\qquad +3b(20,D)b(31,C)+7b(21,D)b(30,C)\\
&\qquad +8b(21,D)b(31,C)-3b(21,D)b(32,C)+3b(22,C)b(31,C)\\
&=\{-2+3b(31,C)\}b(20,D)+3\{-1+b(31,C)\}b(22,C)\\
&\qquad +\{-9+8b(20,D)+7b(21,D)\}b(30,C)+\{-15+8b(21,D)\}b(31,C)\\
&\qquad -3b(21,D)b(32,C)
\end{aligned}
$$

$\nu \to \infty$ のとき $b(20, D), b(21, D), b(30, C), b(31, C) \to 0$ より，十分に大きな ν において最終式は負となる．よって，十分に大きな ν において $E(01, C) < E(01, D)$ となり $(b_1^\nu, b_2^\nu, b_3^\nu)$ はナッシュ均衡にならない．よって，$(s_1^{\{0,1\}}, s_2^{\{0,1\}}, s_3^{\phi})$ は完全均衡ではない．□

付 録B　協力行動と経済厚生

ジレンマ的利得構造においては，C を採るプレイヤーが多いことと経済厚生の高いことは必ずしも同等ではない．それは次のような囚人のジレンマにおいて確認できる．

表 B.1: (C, C) がパレート最適でない囚人のジレンマ

		プレイヤー２	
		C	D
プレイヤー１	C	3, 3	0, 7
	D	7, 0	1, 1

この例では，プレイヤー１と２が（C, D）と（C, D）を 1/2 ずつの確率で採りあうと各々の期待利得は 3.5 であり，これは（C, C）のときの利得より高い．つまり，協力行動をより多く採る状態が，それの少ない状態よりもパレート劣位にある．これはジレンマ的利得構造の条件（A.1）,（A.2）,（A.3）によって排除することができない．

このため囚人のジレンマに関する研究では，多くの場合，確率的選択を考慮にいれても（C, C）がパレート最適となることを保証するために，

$$f_i(C, 1) > (1/2)f_i(C, 0) + (1/2)f_i(D, 1)\ (i = 1, 2) \tag{B.1}$$

という条件が仮定として追加される．この条件は次のような図形的意味をもつ．プレイヤー１，２の利得の組を２次元座標平面で表わす．

$$(\frac{1}{2}f_1(C, 0) + \frac{1}{2}f_1(D, 1), \frac{1}{2}f_2(C, 0) + \frac{1}{2}f_2(D, 1))$$

は，(C, D) と (C, D) における利得の組 $A = (f_1(C, 0), f_2(D, 1))$ と $B = (f_1(D, 1), f_2(C, 0))$ の中点である．仮定 (A.1) と (A.3) から $f_i(C, 0) < f_i(D, 1)$ であるので，直線 AB は右下がりであるので，上の（B.1）の不等式が成り立つとき，(C, C) に対応する点は直線 AB の右上にあり，(C, C) がパレート劣位とならない．

次の条件は,（B.1）の不等式を n 人プレイヤーの場合に拡張したものである．

仮定 B.1. 任意の整数 k（$1 \leq k \leq n-1$）について，あるベクトル $(p_1, ..., p_n)$（$p_1, ..., p_n > 0$）が存在し，k 人のプレイヤーからなる任意の集合 K と l 人（$l < k$）のプレイヤーからなる任意の集合 L について，

$$\sum_{i \in K} p_i f_i(C, k-1) + \sum_{i \in N-K} p_i f_i(D, k) > \sum_{i \in L} p_i f_i(C, l-1) + \sum_{i \in N-L} p_i f_i(D, l) \qquad \text{(B.2)}$$

が成り立つ．

この条件は，任意の選択の組がそれよりも少ない C の状態のいくつかの確率混合よりもパレート劣位にならないことを意味する．この意味を理解するために以下のように記号を定義する．各 k（$1 \leq k \leq n-1$）について

$$\begin{aligned} M_k &= max_{K:|K|=k} \sum_{i \in K} p_i f_i(C, k-1) + \sum_{i \in N-K} p_i f_i(D, k), \\ m_k &= min_{K:|K|=k} \sum_{i \in K} p_i f_i(C, k-1) + \sum_{i \in N-K} p_i f_i(D, k). \end{aligned}$$

また，$a \in \{C, D\}^n$ について，$k_i(a)$ を $a = (a_1, ..., a_n)$ の中で $a_j = C$（$j \neq i$）を満たすものの数と定義する．さらに

$$\begin{aligned} U_k &= \{(a_1, ..., a_n) : a_1 \text{から} a_n \text{の中で} a_i = C \text{を満たすものが} k \text{個}\}, \\ V_k &= \{(f_1(a_1, k_1(a)), ..., f_n(a_n, k_n(a)) : a \in U_k\} \end{aligned}$$

とする．仮定 $B.1$ が成り立つとき，$k > l$ なる任意の k と l について $m_k > h > M_l$ なる値 h が存在して，超平面 $p_1 x_1 + ... + p_n x_n = h$ が，V_k の凸包と V_l の凸包の分離超平面となる．U_k はちょうど k 人のプレイヤーが C を採る選択の組の全体であり，V_k は，U_k に入る選択の組における利得の組の全体である．したがって，上のようにすべての係数が正の分離超平面が存在すれば，k 人のプレイヤーが C を採る選択の組は，l 人のプレイヤーが C を採る選択の組のいかなる確率混合に対しても，パレート劣位にならない．こうして，上の仮定は，任意の選択の組が，それよりも少ない数の C が選択されるいくつかの状態の確率混合よりもパレート劣位にならないことを保証する．

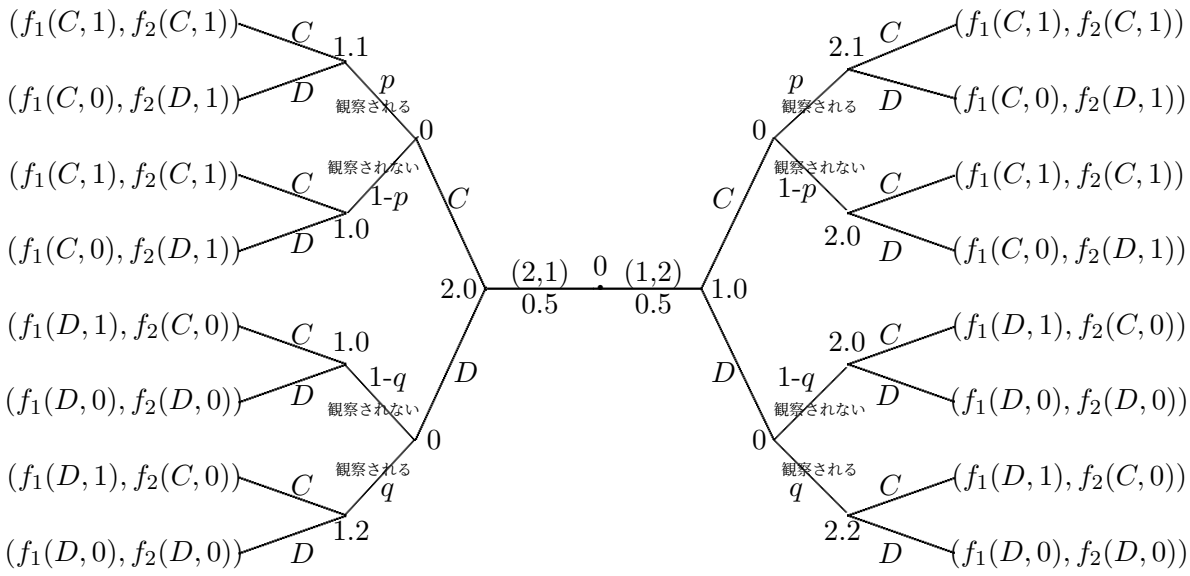
$k = n-1$ と $l = n-2$ のとき，上の仮定は，$\{(f_1(C, n-1), ..., f_n(C, n-1))\}$ と V_{n-2} との間にすべての係数が正の分離超平面が存在することを意味し，上述の囚人のジレンマの条件における (C, C) に対応する点が直線 AB の右上にあるという図形的性質に対応する．

付 録C　行動が確率的に観察される場合の２人ゲーム

この付録Cの目的は，協力行動と非協力行動がそれぞれ確率的に観察される状況においても均衡行動として協力行動が採られる場合があることを示し，非協力行動や協力行動が確率的に観察可能な状況へも本論文の結果が拡張可能であることを示すことにある．

分析を簡単にするためにプレイヤーの人数は２人とし，次のような展開形ゲームを考える．

図 C.1：協力行動と非協力行動が確率的に観察されるゲーム



このゲームは，情報構造をもつジレンマゲームのように，まず「自然」の手番においてプレイヤー１と２のどちらが先手となるかが確率 0.5 ずつで決定し，その順序でプレイヤー１，２が C（協力行動）か D（非協力行動）を選択する．ただし，先手のプレイヤーが C を選択したときには確率 p でそのことが後手のプレイヤーに知られ，D を選択したときには確

率 q でそのことが後手のプレイヤーに知られる．後手のプレイヤーも C か D を選び，利得関数 $f_1(.,.)$，$f_2(.,.)$ に従って利得が与えられる．各プレイヤーは，３つの情報集合を持つ．１つは，相手の行動について何の情報も得られない場合のノードからなるもので，この集合に入るプレイヤー i（$i = 1, 2$）のノードは $i.0$ で表わされる．２つ目は，相手が C を採りそれが観察された場合のノードからなるもので，この集合に入るノードは $i.1$ で表わされている．３つ目の情報集合は，相手が D を採りそれが観察された場合のノードからなるもので，これに入るノードは $i.2$ で表わされている．$p = 0$，$q = 1$ の場合，このゲームは，$\Gamma(\mathscr{Q})$ や $\Gamma(\mathscr{R})$ となることに注意せよ．つまり，このゲームは，$\Gamma(\mathscr{Q})$ や $\Gamma(\mathscr{R})$ を一般化したものである．

利得関数を次のように特定化して，このゲームの部分ゲーム完全均衡を求めよう．

$$f_i(C, C) = 5, \qquad f_i(C, D) = -1, \qquad f_i(D, C) = 6, \qquad f_i(D, D) = 0.$$

プレイヤー $i = 1, 2$ の戦略を (a_0, a_1, a_2) で表す．ただし，a_k（$k = 0, 1, 2$）は，ノード $i.k$ で採る行動を表す．

ノード $i.1$ と $i.2$ においては，プレイヤー i は自分が後手であることが分かるので，彼の最適な選択は D である．$< (D, D, D), (D, D, D) >$ は，明らかに部分ゲーム完全均衡である．$< (C, D, D), (C, D, D) >$ が部分ゲーム完全均衡となる条件を求めよう．まず，この戦略の組においてプレイヤー１の得る期待利得は，

$$0.5\{-p + 5(1 - p)\} + 0.5\{6p + 5(1 - p)\} = 5 - (5/2)p$$

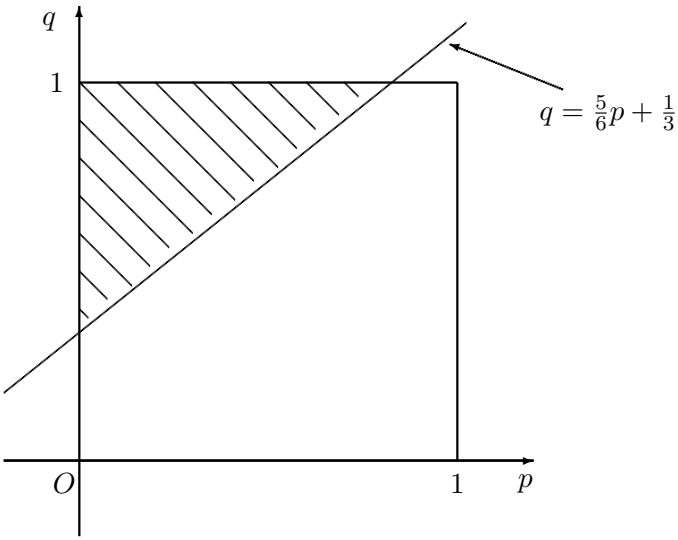
である．一方，プレイヤー１が 1.0 のノードで D を採るときの期待利得は，

$$0.5\{6(1 - q)\} + 0.5\{6p + 6(1 - p)\} = 6 - 3q$$

である．よって，$5-(5/2)p \geq 6-3q$ 即ち，$q \geq (5/6)p+1/3$ が成り立つとき $< (C, D, D), (C, D, D) >$ は部分ゲーム完全均衡となる．それは図 C.2 の斜線の領域である（境界を含む）．

この図から判るように，$(p, q) = (0, 1)$ の場合だけでなく，それを含む領域の (p, q) において，$< (C, D, D), (C, D, D) >$ は部分ゲーム完全均衡となる．その領域は 45 度線より上にあるので $q > p$ でなければならない．つまり，この戦略の組が部分ゲーム完全均衡であるためには，少なくとも協力行動の観察される確率が非協力行動の観察される確率より小さくなくてはならない．ただし，$< (C, D, D), (C, D, D) >$ においては，どちらのプレイヤーも確実

図 C.2: 協力が実現する領域



に協力行動を採るわけではないことに注意すべきである．先手のプレイヤーが採った協力行動が後手に観察されないときに限り２人とも協力行動を採ることになる．このゲームでは２人の協力行動の選択は確率的に生起する．

第３，４章で得られた協力行動が採られるナッシュ均衡が存在するという結果は，協力行動や非協力行動が確率的に観察可能である場合に拡張され得る．

付 録D　行動決定時点が戦略的に選択される場合の２人ゲーム

本論文のモデルでは、プレイヤーの行動選択の時点は「自然」によってランダムに選ばれるとした．これは何らかの外生的要因によって彼らの選択の時点が決められることを表している．しかし，例えば家畜の購入の場合，それをいつ行うかを家計の計画の一部と考えれば，その時点はプレイヤー本人によって決められると考える方が自然である．この付録Dでは，プレイヤーの行動選択の時点をプレイヤー本人が決定するとして，情報構造を持つジレンマゲームを再検討する．分析の結果，混合戦略によって手番の順序が決められる均衡の存在が示される．これは手番の順序の不確実性が内生化されることを意味する．

事例１の家畜の放牧の状況を考えよう．プレイヤーの人数は２人とし，プレイヤー１，２と呼ぶ．プレイヤー $i = 1, 2$ は，時点 $t_i \in [0, 1]$ を選び，予算 I のもとで仔牛か仔ヤギを市場で購入する．時点 $t \in [0, 1]$ における仔牛の価格を

$$p(t) = \alpha t + \beta \quad (\alpha > 0)$$

で表わす．これは時間の経過とともに家畜の価格は増加することを表わす．仔ヤギの価格は，仔牛の半額 $p(t)/2$ であるとする．状況を単純にするために次の仮定を置く．

仮定 D.1. $\alpha + \beta \leq I < (3/2)\beta$ が成り立つ．

これは，$p(1) \leq I < (3/2)p(0)$ を書き換えたもので，どの時点においても仔牛ならば１頭，仔ヤギならば２頭購入できるが，どちらもそれより多くは購入できないことを表わす．この仮定から，$\alpha < \beta/2$ が必要条件として得られる．

仔牛を購入して共有地で飼育すると１年後に価格 v で売ることができる．仔ヤギの場合は，γv（$\gamma > 0$）で売ることができる．

仔牛に比べて仔ヤギは，牧草を食べるとき根元まで食べてしまうので，それが牧草の再生

を妨げ，外部不経済を及ぼす．仔ヤギ１頭によって生じる外部不経済を e で表わし，この大きさだけすべての家畜の売値が低下するとする．ここで次のように仮定する

仮定 D.2. $(2\gamma-1)v/2 < e < (2\gamma-1)v$ が成り立つ．

これは，外部不経済 e が適度な大きさであるとする仮定であるが，詳しくは後述する．時点 t を固定して，各プレイヤーにおいて，仔牛を１頭購入する行動を C と呼び，仔ヤギを２頭購入する行動を D と呼ぶとすると，それぞれのプレイヤーが行動を選んだときの利得は，次の表のようにまとめられる．

表 D.1: 時点 t における利得表

		プレイヤー２	
		C	D
プレイヤー１	C	$v-p(t),\quad v-p(t)$	$v-p(t)-e,\ 2\gamma v-p(t)-e$
	D	$2\gamma v-p(t)-e,\ v-p(t)-e$	$2\gamma v-p(t)-2e,\quad 2\gamma v-p(t)-2e$

この利得表が囚人のジレンマになっていることが次のようにして確かめられる．プレイヤー２が C を採るとき，プレイヤー１の行動 C, D における利得を比べると

$$\begin{aligned} C\text{ を採るときの利得} &< D\text{ を採るときの利得} \\ \iff \quad v-p(t) &< 2\gamma v-p(t)-e \\ \iff \quad e &< (2\gamma-1)v. \end{aligned}$$

最後の不等式は，仮定 D.2 の後半の不等式として成り立つ．プレイヤー２が D を採るときのプレイヤー１の２つの行動における利得を比べると

$$\begin{aligned} C\text{ を採るときの利得} &< D\text{ を採るときの利得} \\ \iff v-p(t)-e &< 2\gamma v-p(t)-2e \\ \iff \quad e &< (2\gamma-1)v. \end{aligned}$$

再び仮定 D.2 より最後の不等式は成り立つ．さらに，２人とも C を採るときと２人とも D

をとるときを比べると

$$\begin{aligned} \text{2人とも } C \text{ を採るときの利得} &> \text{2人とも } D \text{ を採るときの利得} \\ \iff v - p(t) &> 2\gamma v - p(t) - 2e \\ \iff e &> (2\gamma - 1)v/2 \end{aligned}$$

であり，これは仮定D２の最初の不等式として成り立つ．このように任意の時点において，プレイヤー１，２の直面する状況は囚人のジレンマである．

プレイヤー１，２は，行動する時点を選ぶことができる．そのため，どちらかが先に行動を行うことになる．先に行動する者が D を選べばそれは，後に行動するプレイヤーに判り，C を選べばそれは後に行動するプレイヤーに判らないとする．

以上の状況を第１段階では各プレイヤーが行動時点を選択し，第２段階では第１段階での選択で決まる手番の順序で行動を決定する２段階ゲームとして分析する．ただし，第１段階で決まった手番の順序は第２段階では各プレイヤーに伝えられないとする．第２段階において先手が D を採ったときは後手はそれに気づくが，先手が C を採った場合は後手は自分が後手であることに気づかずに行動を決定する．

このゲームにおけるプレイヤー $i = 1, 2$ の戦略を $(\varphi_i, a_i b_i)$ で表わす．ただし，φ_i は，$[0, 1]$ 上で定義される確率密度関数で，第１段階におけるプレイヤー i の混合戦略を表わす．$a_i \in \{C, D\}$ は，第２段階で相手の行動が D であることが伝えられないときの選択，$b_i \in \{C, D\}$ は，第２段階で相手の行動が D であることが伝えられたときの選択を表わす．プレイヤー１，２が戦略 $s_1 = (\varphi_1, a_1, b_1)$ と $s_2 = (\varphi_2, a_2, b_2)$ を選ぶとき，プレイヤー i $(i = 1, 2)$ は期待利得 $u_i(s_1, s_2)$ を得る．第２段階で先手が D を採った場合は，それ以下は部分ゲームとなり，そこでは囚人のジレンマの構造から後手は D を採ることが最適であることに注意せよ．

φ^u を一様分布の確率密度関数とすると，協力の実現について次の命題が得られる．

命題 D.1. 戦略プロファイル $s^* =< (\varphi^u, CD), (\varphi^u, CD) >$ は，以下の条件 (a), (b) のいずれかが成り立つとき部分ゲーム完全均衡である：

(a) $\alpha \geq e$ かつ $e \geq (2\gamma - 1)v/2 + \alpha/4$,

(b) $\alpha < e$ かつ $e \geq (2\gamma - 1)v - \alpha/2$.

証明． 先手となったプレイヤーが D を採った後の部分ゲームでは，上述したように D が後手にとっての最適な選択となる．それ以外には厳密な部分ゲームは存在しない．よって，この命題を証明するためには，s^* がナッシュ均衡であることを示せばよい．プレイヤー１の戦略の変更について考える．プレイヤー１，２の行動時点をそれぞれ確率変数 T_1，T_2 で表す．s^* においては，結局どちらのプレイヤーも C を採るので，期待利得は，

$$E_0 \equiv v - E(p(T_1)) = v - (\alpha/2 + \beta)$$

となる．ここで，プレイヤー１が (φ_1, DD) に変更すると，$T_1 < T_2$ のときには２人は D を採り，$T_1 > T_2$ のときはプレイヤー１は D，プレイヤー２は C を採る．よって，プレイヤー１の期待利得は，

$$\begin{aligned} E_1 \equiv\ & Pr(T_1 < T_2)\{2\gamma v - 2e - (\alpha E(T_1|T_1 < T_2) + \beta)\} \\ & \qquad + Pr(T_1 > T_2)\{2\gamma v - e - (\alpha E(T_1|T_1 > T_2) + \beta)\} \\ =\ & 2\gamma v - e - \beta - Pr(T_1 < T_2)e - \alpha E(T_1) \end{aligned}$$

である．これらにより

$$\begin{aligned} & E_0 \geq E_1 \\ \iff\ & Pr(T_1 < T_2)e + \alpha E(T_1) \geq (2\gamma - 1)v - e + \alpha/2 \end{aligned} \tag{D.1}$$

ここで，

$$\begin{aligned} Pr(T_1 < T_2) &= \int_0^1 (\int_{t_1}^1 \varphi^u(t_2)dt_2)\varphi_1(t_1)dt_1 \\ &= \int_0^1 (1 - t_1)\varphi_1(t_1)dt_1 = 1 - E(T_1) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \text{不等式（D.1）左辺} &= (1 - E(T_1))e + \alpha E(T_1) \\ &= e + (\alpha - e)E(T_1) \end{aligned}$$

ここで $\alpha \geq e$ であれば，$E(T_1) \geq 0$ から最終式 $\geq e$．よって，$e \geq$ (D.1) 式右辺 であれば（D.1）式が成り立ち s^* はナッシュ均衡である．これは (a) が成り立つ場合である．また，$\alpha < e$ であれば，$E(T_1) \leq 1$ から最終式 $\geq \alpha$．よって，$\alpha \geq$ (D.1) 式右辺 であれば，(D.1) 式が成り立ち s^* はナッシュ均衡である．これは，条件 (b) が成り立つ場合である．■

命題 D.1 の示す部分ゲーム完全均衡においては，２人のプレイヤーは行動時点を $[0,1]$ 上の一様分布によって選ぶ．その結果，プレイヤー１と２のどちらが先に行動を行うかが $1/2$ ずつの確率によって決定する．

最後に，仮定 D.1，D.2 と命題 D.2 の条件が矛盾しないことを見るために，$\alpha = 0.3$，$\beta = 1$，$v = 2$，$\gamma = 0.6$ の場合を考えよう．このとき，仮定 D.1 は，$1.3 \leq I \leq 1.5$，仮定 D.2 は，$0.2 < e < 0.4$ である．命題 D.1 の条件 (a) は $0.3 \geq e$ かつ $e \geq 0.275$ となり，条件 (b) は $0.3 < e$ かつ $e \geq 0.25$ となる．よって，$1.3 \leq I \leq 1.5$ である I において，$0.275 \leq e < 0.4$ であれば，s^* は部分ゲーム完全均衡となる．

謝辞

本論文を作成するにあたり，多くの方々よりご指導，ご助言，ご協力をいただきました．ここに感謝の意を表します．

篠塚友一教授（筑波大学大学院人文社会科学研究科）には，博士論文に着手する以前より学会の先輩として多くのご助言をいただいておりましたが，特に本博士論文の作成においては，多大なご指導と支援をいただきました．

金子守教授（筑波大学大学院システム情報科）には，大学院時代から長期にわたり忍耐強くご指導していただきました．

阿比留正弘教授（福岡大学経済学部），臼井功教授（横浜国立大学経営学部），鍵原理人准教授（福岡大学経済学部），米田清教授（福岡大学経済学部），渡辺淳一教授（福岡大学経済学部），和光純教授（学習院大学経済学部）からは，本論文作成にあたり温かい励ましとご支援をいただきました．

本論文は，社会的ジレンマの解消に関する３本の査読付き論文に基づいて作成されましたが，それらの論文の作成に際しては，岡田章教授（一橋大学大学院経済学研究科），戸田学教授（早稲田大学社会科学総合学術院），Babu Nahata 教授（米国ルイビル大学），Subhashis Rauchaudhuri 研究員（アメリカンエキスプレス，元福岡大学経済学部講師）から貴重なコメントをいただきました．

誠にありがとうございました．

最後に，公私において私を支えてくれたすべての皆様に感謝の意を表します．

参考文献

Allison, S.T. and D.M. Messick (1985), "Effects of Experience on Performance in a Replenishable Resource Trap," *Journal of Personality and Social Psychology* Vol. 49, pp. 943-948.

Axelrod, R. (1984), *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York.

Binmore, K. (1994), *Game Theory and Social Contract Volume I: Playing Fair*, MIT Press, Massachusetts.

Brechner, K.C. (1977), "An Experimental Analysis of Social Traps," *Journal of Experimental Social Psychology*, Vol. 13, pp. 552-564.

Dawes, R. M. (1980), "Social Dilemmas," *Annual Review of Psychology* Vol. 31, pp. 169-193.

Dawes, R.M., J.M. Orbell, R.T. Simmons and A.J.C. van de Kragt (1986), "Organizing Groups for Collective Action," *American Political Science Review*, Vol. 80, pp. 1171-1185.

Dubey, P. and M. Shubik, (1981), "Information Conditions, Communication and General Equilibrium," *Mathematics of Operations Research* Vol. 6, pp. 186-189.

Edney, J.J. and C.S. Harper (1978), "Heroism in a Resource Crisis: A Simulation Study," *Environmental Management* Vol. 2, pp. 523-527.

Ely, J. and J. Välimäki (2002), "A Robust Folk Theorem for the Prisoners' Dilemma," *Journal of Economic Theory* Vol. 102, pp. 84-105.

Erev, I. and A. Rapoport (1990) , "Provision of Step-level Public Goods: The Sequential Contribution Mechanism," *Journal of Conflict Resolution*, Vol. 34, pp. 401-425.

Flood, M. M. (1952), "Some Experimental Games," *Research Memorandum* RM-789-1, The RAND Cooperation, Santa Monica.

Friedman, D. (1988), "On Economic Applications of Evolutionary Game Theory," *Evolutionary Economics* Vol. 8, pp. 15-43.

Friedman, I. W. (1971), "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies* Vol. 12, pp. 1-12.

Fudenberg, D., D. Levine and E. Maskin (1994), "The Folk Theorem with Imperfect Public Information," *Econometrica* Vol. 62, pp. 997-1039.

Fudenberg, D. and E. Maskin (1986), "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information," *Econometrica* Vol. 54, pp. 533-554.

藤村美穂（2001）「『みんなのもの』とは何かーむらの土地と人」，井上・宮内編『コモンズの社会学』第１章，新曜社.

Hamburger, H. (1973), "N-person Prisoner's Dilemma," *Journal of Mathematical Sociology* Vol. 3, pp. 27-48.

Hamburger, H., M. Guyer and J. Fox (1975), "Group Size and Cooperation," *Journal of Conflict Resolution* Vol. 19, pp. 503-531.

Hamilton, W.D. (1964), "The Genetical Evolution of Social Behaviour. I and II," *Journal of Theoretical Biology* Vol. 19, pp. 1-16; 17-32.

Hardin, G. (1968), "The Tragedy of the Commons," *Science* Vol. 162, pp. 1243-1248.

Harsanyi, J.C. and R. Selten (1988), *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, The MIT Press.

Hayashi, N., E. Ostrom, J. Walker and T. Yamagishi (1999), "Reciprocity, Trust, and the Sense of Control: a Cross-societal Study," *Rationality and Society* Vol. 11, pp. 27-46.

井上真（2004）『コモンズの思想を求めて』岩波書店.

Kalai, E. (1981), "Preplay Negotiations and the Prisoner's Dilemma," *Mathematical Social Sciences* Vol. 1, pp. 375-379.

Kandori, M., G.J. Mailath, and R. Rob (1993), "Learning, Mutation and Long Run Equilibria in Games," *Econometrica* Vol. 61, pp. 29-56.

Kandori, M. and R. Rob (1995), "Evolution of Equilibria in the Long Run: a General Theory and Applications," *Journal of Economic Theory* Vol. 65, pp. 383-414.

Kaneko, M. (1982), "Some Remarks on the Folk Theorem in Game Theory," *Mathematical Social Sciences* Vol. 3, pp. 281-290.

Komorita, S.S. and C.D. Park (1996) *Social Dilemmas*, Westview Press, Colorad.

Kreps, D.M., P. Milgrom, J. Roberts and R. Wilson (1982), "Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma," *Journal of Economic Theory* Vol. 27, pp. 245-252.

Linster, B. (1990) *Essays on Cooperation and Competition*, PhD thesis, University of Michigan.

Luce, R.D. and H. Raiffa, (1957), *Games and Decisions*, John Wiley and Sons, New York.

Matsushima, H. (2004), "Repeated Games with Private Monitoring: Two Players," *Econometrica* Vol. 72. pp. 823-852.

Maynard Smith, J. (1981), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge.

Maynard Smith, J. and G.R. Price (1973), "The Logic of Animal Conflict," *Nature* Vol. 246, pp. 15-18.

Messick, D.M., S.T. Allison and C.D. Samuelson (1988), "Framing and Communication Effects on Groups Members 'Responses to Environmental and Social Uncertainty," in S. Maital (ed), *Applied Behavioral Economics* Vol. II, pp. 677-700. New York.

南真木人（2005）「カースト社会の『森の民』」，池谷和信編『熱帯アジアの森の民』第２部，人文書院.

Nash, J. (1951), "Non-cooperative Games," *Annals of Mathematics* Vol. 54. pp. 286-295.

Neyman, A. (1999), "Cooperation in Repeated Games when the Number of Stages is not Commonly Known," *Econometrica* Vol. 67, pp. 45-64.

Nishihara, K. (1991), "A Note on the Equivalence of the Two Definitions of Common Knowledge," *Mathematical Social Sciences* Vol. 21, pp. 177-178.

Nishihara, K. (1997), "A Resolution of N-person Prisoners' Dilemma," *Economic Theory* Vol. 10, pp. 531-540.

Nishihara, K. (1999), "Stability of the Cooperative Equilibrium in N-person Prisoners' Dilemma with Sequential Moves," *Economic Theory* Vol. 13, pp. 483-494.

Nishihara, K. (2008), "The Expected Number of Cooperators in N-person Prisoners' Dilemma with Random Order Moves," *The Japanese Economic Review* Vol. 59, pp. 241-257.

Nöldeke, G. and L. Samuelson (1993), "An Evolutionary Analysis of Backward and Forward Induction," *Games and Economic Behavior* Vol. 5, pp. 425-454.

Nowak, M. and K. Sigmund (1993), "A Strategy of Win-Stay, Lose-Shift that Outperforms Tit-for-Tat in the Prisoner's Dilemma Game," *Nature* Vol. 364, pp. 56-58.

Okada, A. (1981), "On Stability of Perfect Equilibrium Points," *International Journal of Game Theory* Vol. 10, pp. 67-73.

Okada, A. (1993), "The Possibility of Cooperation in an n-person Prisoners' Dilemma with Institutional Arrangements," *Public Choice* Vol. 77, pp. 629-656.

Olson, M. (1965), *The Logic of Collective Action*, Harvard University Press.

Orbell, J. and R. Dawes (1981), "Social Dilemmas," in G. Stephenson and J.H. Davis (eds), *Progress in Applied Social Psychology* Vol. 1, pp. 37-66.

Orbell, J. and R. Dawes (1991), "A' Cognitive Miser 'Theory of Cooperators' Advantage," *American Political Science Review* Vol. 85, pp. 515-528.

Rubinstein, A. (1979), "Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion," *Journal of Economic Theory* Vol. 21, pp. 1-9.

佐伯朕，亀田達也　編著（2002）『進化ゲームとその展開』共立出版.

佐藤一郎 (1985)『地球砂漠化の現状』清文社.

Schelling, T.C. (1973), Hockey Helmets, Concealed Weapons, and Daylight Saving, *Journal of Conflict Resolution*, Vol. 17, pp. 381-428.

Schelling, T.C. (1978), *Micromotives and Macrobehavior*, W.W. Norton, New York.

Selten, R. (1975), "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games," *International Journal of Game Theory* Vol. 4, pp. 25-55.

Stern, P.C. (1976), "Effect of Incentives and Education on Resource Conservation Decisions in a Simulated Commons Dilemma," *Journal of Personality and Social Psychology* Vol. 34, pp. 1285-1292.

Suleiman, R. and A. Rapoport (1992), "Provision of Step-level Public Goods with

Continuous Contribution," *Journal of Behavioral Decision Making*, Vol. 5, pp. 133-153.

Tajfel, H., M.G. Billing, R.P. Bundy, and C. Flament (1971), "Social Categorization in Intergroup Behavior," *European Journal of Social Psychology* Vol. 1, pp. 149-178.

van Damme, E. (1991), *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin.

Varian, H.R. (1994), "A Solution to the Problem of Externalities When Agents Are Well-Informed," *American Economic Review* Vol. 84, pp. 1278-1293.

山岸俊男 (1990a)「社会的ジレンマ研究の主要な理論的アプローチ」心理学評論 Vol. 32, pp. 262-294.

山岸俊男 (1990b)『社会的ジレンマのしくみ』サイエンス社.

山岸俊男 (2002)「社会的ジレンマ研究の新しい動向」，今井晴雄，岡田章（編）『ゲーム理論の新展開』第７章，勁草書房.

吉川賢，山中典和，大手信人（編著）(2004)『乾燥地の自然と緑化』共立出版.