2011筑波大学附属駒場論集51集

筑駒における数学を主とした総合学習教材の開発

－数学史を利用した探求的な学習－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世

筑駒における数学を主とした総合学習教材の開発

ー数学史を利用した探求的な学習ー

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世

要約

筆者は本論の探求的な学習を問題解決的な学習が発展的に繰り返されていく一連の学習と捉えている。すなわち，繰り返し学習（スパイラル学習）により生徒の学びはもとより，生徒の学びのステージは生徒の探求活動と興味関心によってさらに高まっていく学習活動と考えている。

筆者は，総合的な学習の時間が新設された当初から，高度情報化社会において自ら課題を見つけ，自ら学び，自ら考え，主体的に判断し，問題解決する資質や能力を育てる重要な手だてになるものと考え，教科数学科を中心とする授業実践に資する教材開発に取り組んできた。本論文では，日本数学史との関連について，和算にその話題を求め論じた。

キーワード：総合的な学習の時間，課題学習，和算，算額

1　はじめに

平成20年の学習指導要領の改訂により，総合的な学習の時間の扱いが強化された。各学校においては総合的な学習の時間（以降，総合学習と記す）を，どのようなねらいをもって，子どもたちに身につけさせたい力は何であるのかを教育課程の中で明らかにしていくことが求められている。とくに修得と活用を基本とする教科の学習と総合学習との連携は，生徒の学力を伸長するものと期待されている[1]。そのため，これまでの総合学習が目指してきた自ら学び自ら考える力を育むために既存の教科等の枠を超えた横断的・総合的な学習に，体験的な活動を通して探求的な学習となることが求められている。総合学習における探求的な学習は主に教科の知識を用いることから，総合学習における教科の役割は重要になっている。

筆者はこの探求的な学習を問題解決的な学習が発展的に繰り返されていく一連の学習と捉えている。すなわち，繰り返し学習（スパイラル学習）により生徒の学びはもとより，生徒の学びのステージは生徒の探求活動と興味関心によってさらに高まっていく活動と考えている。

筆者は，総合学習が新設された当初から，高度情報化社会において自ら課題を見つけ，自ら学び，自ら考え，主体的に判断し，問題解決する資質や能力を育てる重要な手だてになるものと考え，教科数学科を中心とする授業実践に資する教材開発に取り組んできた。

本論文では，総合学習が目指す探求的な学習による問題解決能力を育むことを，教科数学科との連携した教材を開発し提案することである。なお，第２章では「教科数学科を中心とする実践」について，これまでに開発した教材とその実践を紹介する。第３章ではこれまでに実践した総合学習を紐解き，本研究の動機について述べる。第４章では「研究の方法」について，探求的な学習を実現するために日本独自の文化である算額を利用した教材を提案し，授業への展開を考察する。第５章では「結論と今後の課題」を述べる。

Development of Teaching Materials for Mathematics Education in Integrated Study at TSUKUKOMA. - Discovery-Oriented Learning based on The History of Mathematics -

２　教科数学科を中心とする実践

筆者が勤務する筑波大学附属駒場中・高等学校における総合学習は，これまでに培った教育活動を発展させて実施している。筆者が実践した教科数学科を中心とする総合学習は次の通りである。

(1) 水田稲作（中学１年次）：勤務校が所有するケルネル田圃を歩測やメジャーを用いて，長さや面積を測量した[(2)]。

(2) 東京地域研究（中学１年次，２年次）：東京都渋谷区の金王八幡宮の算額を教材化した[(3)]。またフィールドワークを行い実際の算額を生徒に見学させ，算額をまねた問題づくりを実践した。

(3) 東北地域研究（中学２年次，３年次）：岩手県平泉町の中尊寺，岩手県遠野市の駒形神社，早池峰神社の算額を教材化した[(4)]。中学の授業においてもこの教材化した算額を利用した。また，算額をまねた問題づくりを実践した[(5)]。

(4) 関西地域研究（高校１年次，２年次）：奈良県奈良市内の円満寺，弘仁寺，耳成山口神社，庚申堂の算額を教材化した[(6)(7)]。旅行委員会の生徒から関西地域研究において算額コースを設定したいという要請があり，希望者を募ったところ，160名中18名の希望者があり，バスを１台仕立てて算額見学のフィールドワークを実践した。教師は資料の提供を行ったが，それ以外はすべて生徒が主体的に行った。

(5) ゼミナール（高校２年次）：教員がいろいろなテーマを挙げ，生徒が興味関心をもった内容のゼミナールに参加する。筆者が担当した数学では，生徒が日頃興味関心を持った内容を深化させる活動を行う。その際に担当の教員から指導したり，大学の先生の指導を仰いだりする。その成果については，高校３年次に卒業論文集として発表される[(8)]。筆者が担当した近年の卒業論文には，「リーマン・ゼータ関数の複素解析」，「Pell方程式の一般解」，「整角四角形について」，「ババ抜きの確率論的考察」などがある。

３　研究の動機

筆者がこれまでに実践した総合学習のうち，高校２年次において関西地域研究で実施した奈良県の算額フィールドワークが今でもとくに印象深い。事前指導では教師が，高校１年次から授業のそれぞれの単元に合った算額を利用した。また当日の行動のために，旅行委員会の生徒が主体的に，当日の算額見学のために計画から，バスの手配，神社やお寺の算額管理者，町内会長さん等との連絡調整をしてくれた。そうした生徒の主体的な行動により，このフィールドワークはとてもよい実践となった。その原動力となったものはフィールドワークのもととなる算額を，生徒の興味関心により数学科の内容を用いて事前に指導することができたからである。

本研究の動機は，新しい総合学習をよりよい取り組みにするために，教科数学科を中心とする探求的な学習の教材開発が重要であると考えるからである。

４　研究の方法

本研究では，２章で紹介した総合学習で開発した教材から，総合学習において和算を利用した教材を開発する。その際，次の観点に留意する。

(1) 教科数学科を中心に数学史を利用した探求活動により問題解決能力を育むためには，教材をどのように扱えばよいのか。

(2) 我が国の数学の歴史や数学文化などの課題を生徒に感じさせるようにするためには，教材をどのように扱えばよいのか。

生徒はこのような経験によって，数学を文化として捉える態度を育むことができると考える。こうした生徒の態度は，通常の数学の授業においても，生徒の興味と関心をもって数学を文化として捉えることにつながると考える。

この章では，探求的な学習として算額を利用した教材を中心に，とりわけ日本独自の文化である算額を利用した教材を提案する。

４．１　奈良県奈良市の円満寺の算額(9) (10)

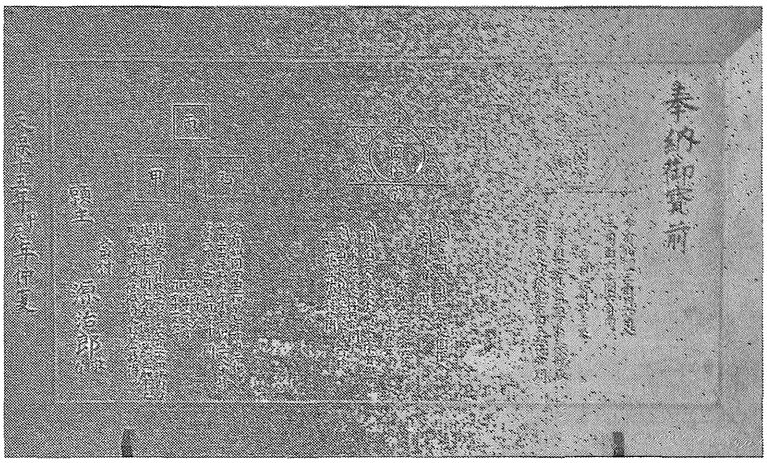


写真１　円満寺の算額（1858 年，天保 15 年奉納，複製）

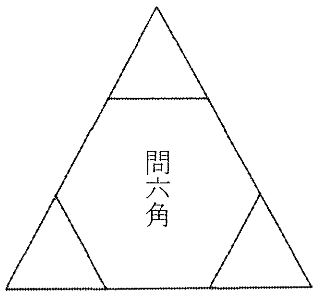
（原文）

今有如圖三角内六角入
三角面六尺問六角面ヲ
答曰六角一方二尺
術曰面六尺自之四三三ヲ乗三除術ヲ減
止余二五九八以除是止余開平方得合問

（現代語訳）

$\boxed{\text{問題}}$　図１のように，正三角形の中に正六角形が内接していて，正三角形の一辺が６尺のとき，正六角形の一辺の長さを求めなさい。

図１　円満寺の算額



（和算の用語）　三角：正三角形，　六角：正六角形，　面：辺，
自：２乗する，　止余：その差，　開平方：正の平方根をとる

（解説）　円満寺の算額は奈良市の指定有形民俗文化財に指定されており，別の場所で管理されている。復元された算額（写真１）が奈良市下山町の八坂神社の軒先に掲げられている。

ここで取り上げる問題は，結果は暗算で直ちに求められる。しかし，術文に着目するとある定数（433, 2598, 実際は 0.433, 2.598 のことである）を掛けたり割ったりしながら答えを導いている。簡単に言えば，この問題は正三角形と正六角形の敷き詰めの問題である。ここでは，術文の内容に着目して，江戸時代の人々の考え方を教材化する。

さて，この問題は，図１から正六角形の一辺の長さは直ちに２寸であることがわかる。術文を現

代語訳すると，「正三角形の一辺の長さを２乗して，これに0.433を掛けて３で割ったもの（術といっている）を$6^2 \times 0.433$から引き，その差（止余）を2.598で割り，その商（止余）の平方根を求め(開平方)れば答が得られる」すなわち，$\{6^2 \times 0.433 - 6^2 \times 0.433 \div 3\} \div 2.598 = 4 \quad \sqrt{4} = 2$　（尺）

和算にも現代でいう公式である助術があり，一辺の長さがaの正三角形の面積は$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$であるが，助術では，一辺の長さを２乗して0.433を掛けることによって求めていた。この場合は，$0.433a^2$である。0.433を一辺の長さがaの正三角形の面積を求めるための「三角の法の数」という。2.598は，2.598÷0.433=6であることに気がつけば，2.598は六角の法の数のことであり，一辺の長さがaの正六角形の面積を求めるための係数である。もとの正三角形の一辺の長さをaとすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \qquad \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \div \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6\right) = \frac{a^2}{9} \qquad \sqrt{\frac{a^2}{9}} = \frac{a}{3}$$

これより，一辺の長さがaの正三角形に内接する正六角形の一辺の長さは，$\frac{a}{3}$である。

この算額を利用した探求的な学習として，次の(1)，(2)の探求活動が考えられる。

(1) 生徒とのコミュニケーションを図り，数学的活動を取り入れた探求活動

(2) 江戸時代の人たちの数学文化を感じる探求活動

４．１．１　円満寺の算額と探求的な学習における探求活動

(1) 生徒とのコミュニケーションを図り，数学的活動を取り入れた探求活動（中学３年次を想定）

授業の中で術文に注目した活動を，次のように教師Ｔと生徒Ｓとの対話形式にまとめた。

Ｔ：どういう過程をたどりながら，正六角形の一辺の長さを求めているのかを考えましょう。
まず，正三角形の一辺の長さ６尺を２乗していますが，長さを２乗すると一般に何を表すと思いますか。他の図形をもとにして考えましょう。

Ｓ：正方形の場合，一辺の長さの２乗は面積を表します。だから，この場合も正三角形について面積の関係を表すのではないかと思います。

Ｔ：そうですね。では，一辺がaの正三角形の面積を答えて下さい。

Ｓ：$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ です。

Ｔ：では術文の0.433は何になるのでしょうか。$\sqrt{3} = 1.732$として考えると分かりやすいでしょう。

Ｓ：$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1.732}{4} = 0.433$のことだから，$6^2 \times 0.433$ は正三角形の面積を表すと思います。

Ｔ：その通りです。和算ではこの433を，三角の法の数といいます。法の数とは係数のことで，定数です。では，正三角形の面積から $6^2 \times 0.433 \div 3$ を引いたもの，$6^2 \times 0.433 - 6^2 \times 0.433 \div 3$ は何の面積を表すと考えられますか。

Ｓ：正三角形の面積から正三角形の面積の $\frac{1}{3}$ を引いた部分の面積ですね。

Ｔ：そうです。では，ヒントを出しましょう。正六角形は同じ辺の長さの正三角形何個分で敷き詰めることができるのか，に着目して考えてください。

Ｓ：正六角形は同じ辺の長さの正三角形６個分で敷き詰めることができます。よって，この小さい

正三角形９個分で，もとの大きな正三角形を敷き詰めることができます。

よって，$6^2 \times 0.433 - 6^2 \times 0.433 \div 3$ は求める正六角形の面積を表します。

T：その通りです。では，$(6^2 \times 0.433 - 6^2 \times 0.433 \div 3) \div 2.598$ の2598は何を表しますか。

S：正六角形は正三角形が６個分で充填できるから，$2598 \div 433 = 6$ だから，2598は「六角の法の数」になるのではないかと思います。だから，$(6^2 \times 0.433 - 6^2 \times 0.433 \div 3) \div 2.598$ は 正六角形の一辺の長さの２乗が出てくると思います。よって，$(6^2 \times 0.433 - 6^2 \times 0.433 \div 3) \div 2.598 = 4$ の結果 4 の正の平方根 $\sqrt{4} = 2$ は，正六角形の一辺の長さになります。

T：その通りです。よくできました。この問題について気がついたことをいって下さい。

S：一般に，長さよりも面積を求めることは難しいと思いますが，江戸時代の人は，長さを求めるために面積を持ち出して考えていたことが分かりました。

T：いま，S さんがいってくれたように，この算額の術文から江戸時代の人たちは面積から正六角形の辺の長さを求めています。江戸時代の人たちが，このような解き方をしていたことが分かりました。他にもそういう求め方をする算法が，和算にはあります。次の時間に紹介します。 □

⑵ 江戸時代の人たちの数学文化を感じる探求活動

この算額の問題は面積から辺の長さを求めるものである。すなわち，次元を上げて問題を取り扱いやすくした問題である。関孝和は，写真２の『求積』の中で，楕円（和算では側円という）の面積を円柱の体積から求めている[10]。『求積』では切り口が楕円になることを前提に話を進めている。

ここでは，生徒が江戸時代の人たちの数学文化を感じとれように，楕円の面積を求める活動を提案する。また，探求的な活動としては，切り口が楕円になることを証明することが考えられる。なお，生徒への発問例として次が考えられる。

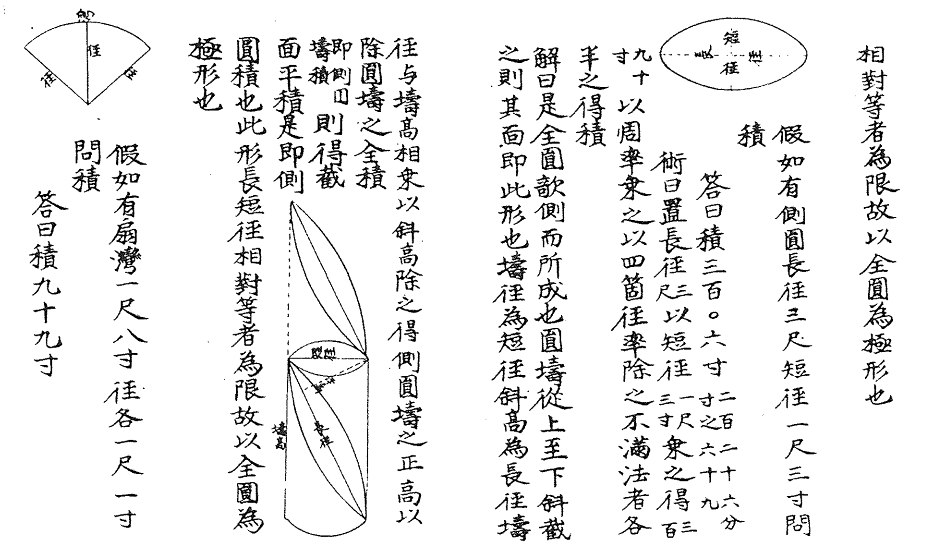
＜生徒への発問例＞

⑴ 円柱を図５[11]のように斜めに切ったとき，切り口はどういう形になりますか。

⑵ 楕円の長径，短径をそれぞれ a，b とするとき楕円の面積を求めなさい。

⑶ 切り口が楕円になることを証明しなさい。

写真２　『求積』（1811年，写本，東北大学附属図書館の和算ポータルより）



４．２　千葉県夷隅郡岬町の飯縄寺の算額[12]

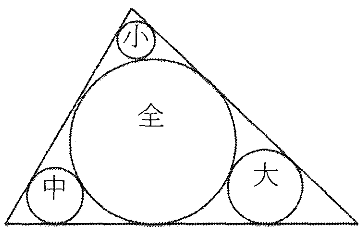
（原文）

今有如図三斜内容四円
只云　大円径九寸　又云　中円径四寸
別云　小円径一寸　問全円径幾何
答曰　全円径一十一寸
術曰　置大円径乗中円径，平方開之，名角，
倍之，加大円径及中円径，乗小円径
開平方，加角，得全円径，合問

（現代語訳）

問題　図２のように，三角形の内部に４円が入っている。大円の直径が九寸，中円の直径が四寸，小円の直径が一寸であるとき，三角形の内接円の直径を求めよ。

図２　飯縄寺の算額



（和算の用語）
三斜：一般の三角形
全円：三角形の内接円
倍之：これを２倍する
商　：平方根

（解説）　この算額は，大円，中円，小円の直径がそれぞれ９寸，４寸，１寸のとき，全円（三角形の内接円）の直径を求める問題である。この算額の術文を現代語訳すると次のようになる。

大円の直径と中円の直径を掛け合わせ，その結果の平方根を角と名付ける(A)。角を２倍してその結果に大円の直径と中円の直径を加える(B)。その結果に小円の直径を掛ける(C)。その結果の平方根をとり，角を加える(D)。その結果が全円の直径である。この結果は問に合っている。

現代語訳した(A)～(D)の内容を数式風に表してみると

(A) $\text{角}=\sqrt{\text{大}\times\text{中}}$　　(B) $2\text{角}+(\text{大}+\text{中})$

(C) $\{2\text{角}+(\text{大}+\text{中})\}\times\text{小}$　　(D) $\sqrt{\{2\text{角}+(\text{大}+\text{中})\}\times\text{小}}+\text{角}$

となり，(D) の結果は，三角形の内接円の直径と一致する。簡単にすると，次のようになる。

$$\sqrt{\text{全}}=\sqrt{\text{中}}\sqrt{\text{大}}+\sqrt{\text{小}}\sqrt{\text{大}}+\sqrt{\text{小}}\sqrt{\text{中}}$$

すなわち，三角形の内接円の直径を D，大円，中円，小円の直径をそれぞれ D_1, D_2, D_3 とすると

$$D=\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}+\sqrt{D_2}\sqrt{D_3}+\sqrt{D_3}\sqrt{D_1} \qquad ①$$

が成り立つ。

筆者自身はこの問題と初めて出会ったとき，結果がとても美しいという印象をもった。中学３年生の幾何の授業で取り上げたところ，生徒たちも内接円と３円の関係式がとても美しいと感じた。

この問題は，和算の公式集である『算法助術』[13]（山本賀前著，1841 年）に，第 63 番目の助術として紹介されている。内接円（全円）の直径が大円，中円，小円の直径を用いて表せることが傍書法[14]で記されている。

４．２．１　飯縄寺の算額と探求的な学習における探求活動

この算額における探求的な学習として，三角形の内接円をかいた後の大円，中円，小円の作図，術文を読みその結果を簡単にすることが考えられる。さらに，この結果を証明する取り組みも考えられる。また，ここで紹介した助術について探求することも考えられる。

ここでは，考えられる探求的な学習における考えられる探求活動について，生徒への発問の形にして下記に示した。なお，（　）内は考えられる対象学年と対象科目である。

＜探求活動＞　次の問いに答えなさい。

(1) 三角形の内接円を作図しなさい。（数学 A）

(2) (1) で作図した図に，問題の大円，中円，小円を作図しなさい。（数学 A）

(3) 大円，中円，小円の直径をそれぞれ大，中，小として，術文の内容を数式風に直しなさい。（中学３年）

(4) 自分の助術をつくってみよう。
例えば，図 3 のような三角形に内接し，かつ，互いに外接する円 O_1，O_2，O_3 がある。円 O_1，O_2，O_3 の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とする。r_1，r_2，r_3 の間に成り立つ式を求めなさい。（中学３年）

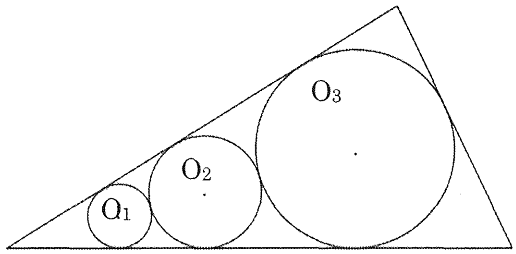


図３　円の半径の関係

(5) 三角形の内接円の直径を D，大円，中円，小円の直径をそれぞれ D_1，D_2，D_3 とすると

$$D=\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}+\sqrt{D_2}\sqrt{D_3}+\sqrt{D_3}\sqrt{D_1}$$

を証明しなさい。（中学３年，数学 I，数学 A）

(6) 傍書法について調べてみよう。（調べ学習）

４．３　岐阜県郡上市八幡町の八幡神社の算額[15]

（原文）

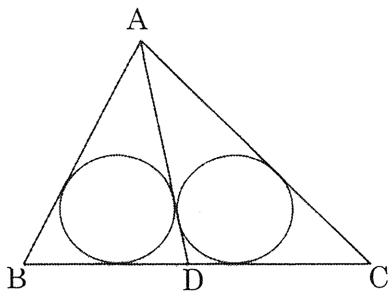
今有如図三斜之内隔界斜容二円各径等
只云中斜二百五十七寸小斜六十八寸
界斜四十零寸問大斜幾何
答曰大斜三百一十五寸
術曰置中斜加小斜自乗之而得数之
内減界斜巾四段平方開之得大斜合問

（現代語訳）

問題　図 4 のように，三角形 ABC において，BC 上に点 D をとる。△ABD，△ACD に同じ直径の内接円を入れる。AB＝a，AC＝b，AD＝c とするとき，BC を a，b，c で表しなさい。

（答）$\mathrm{BC}=\sqrt{(a+b)^2-4c^2}$

図４　八幡神社の算額



（和算の用語）　中斜：辺 AC，　小斜：辺 AB，　界斜：線分 AD，
大斜：辺 BC，　四段：４倍

（解説）　術文には，「中斜加小斜自乗之而得数之内減界斜巾四段平方開之得大斜」とあるが，これを数学記号で表すと，$\sqrt{(\text{中斜}+\text{小斜})^2-4\times\text{界斜}^2}$ となる。授業では初等幾何の問題として取り上げた。ここでは，探求的な学習として，次のような取り扱いを提案する。

４．３．１　八幡神社の算額と探求的な学習における探求活動

問題のように，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AD}=c$として，$\mathrm{BC}=\sqrt{(a+b)^2-4c^2}$ を導くことが探求活動の中心になる。また，関連として，次の内容を取り扱うことが考えられる。

＜探求活動＞　次の問いに答えなさい。

(1) 三角形の３辺の長さと内接円の半径の関係について，三角形の面積を考えることによって，関係式を表してみよう。（中学３年，数学Ａ）

(2) 辺BCを$m:n$に内分する点をＤとして，a，b，cの間に成り立つ式を求めてみよう。（中学３年，数学Ａ）

(3) スチュワートの定理(16)を式で表してみよう。また，術文を証明してみよう。（数学Ⅰ，数学Ａ）

(4) 術文の結果を，余弦定理を用いて証明してみよう。（数学Ⅰ）

５　結論と今後の課題

本研究における総合学習の題材として，円満寺，飯縄寺，八幡神社の算額を取り上げた。第４章で述べた観点で，それぞれの算額の特徴を捉えて，探求活動教材を作成し提案をした。どの算額も，術文の内容を数学を用いて証明することは，数学教育上有効であること分かった。また，円満寺の算額のように，江戸時代の人たちの数学的な思考方法や問題解決の方法など，文化としての面白さが感じ取れた。また，飯縄寺や八幡神社の算額は，数学の問題として，術文の結果を証明する問題にすることができる。これらの問題は，手応えのある問題で日頃の一斉授業で扱うことは困難である。総合学習の時間にそうした問題を少し時間をかけて教科の側面から生徒の興味・関心により扱うことは有効である。また，こういった算額の問題に触れることによって，生徒は江戸時代の人たちが数学の問題を作り，しかも正確に解いていたという事実を知り，我が国の数学文化を感じとることができた。円満寺の問題について，関孝和の『求積』の中から楕円の面積の求めるという教材を紹介したが，内容としては，中学３年生の相似を利用すれば求めることができる。その探求活動として，西洋数学史の円錐曲線の考察に繋げることも考えられる。円柱の切断面を円錐の場合に拡張してその切断面がどのような形になるのかを考察することは，数学史としても大変興味深い。飯縄寺の算額の問題に関連して，算法助術を紹介した。105 の助術があり，そうした内容を具体的に調査・研究させることも考えられる。また，自分で助術をつくることを提案した。例えば，「江戸時代の人たちは円の面積をどのように求めていたのだろうか」とか「円周率をいくつにしていたのだろうか」などの問いかけも考えられるだろう。そもそも，「和算では円周率という概念をもっていたのだろうか」などの探求活動も考えられる。また，和算の助術と現代の数学の公式とを対比する探求活動は，和算文化を理解することに繋がるだろう。このような総合学習による生徒の学びは，教科の授業においても数学に対する興味や関心，態度に変換され生かされることが期待される。

今後の課題として，まず，本論文で提案した教材と新設された高等学校の数学Ⅰと数学Ａの課題学習との連関を考察することである。筆者は，課題学習が「科目の内容またはそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにする」ことが要請されているため，課題学習から生まれた内容を探求的な学習に発展させることが可能であると考えるからである(17)。

次に，本稿で提案した教科数学科を中心とする教材によって，生徒たちの学びがどのように変わったのかということを評価する視点を教師や学校がもつことである(18)。今後は，総合学習の評価の

観点について研究していきたい。

（注）

(1) 原田信之（2008），『平成 20 年改訂 中学校教育課程講座 総合的な学習の時間』，ぎょうせい

(2) 牧下英世（1997），『中学校の数学科を中心とするクロスカリキュラムについての実証的研究 −高校の数学内容も視野に入れて−』，財団法人下中記念財団 1997 年報，p31〜p38：勤務校は明治初期に創立した官立学校の駒場農学校からある田圃を受け継ぎ管理している。ケルネルとは当時のお雇い外国人教師の名前である。

(3) 牧下英世（2010），『豊かな創造性を育む数学教材の開発と実証的な研究：金王八幡宮の算額の教材化』，筑波大学附属駒場論集第 49 集，p151〜p163

(4) 牧下英世（2001），『数学史を取り入れた授業実践−算額の教材化と総合的な学習−』，筑波大学附属駒場論集第 40 集，p145〜p171

(5) 牧下英世（2011），『数学の問題づくりと生徒の情意面に関する実証的研究』，早稲田大学大学院教育学研究科紀要別冊 19 号-1，p263〜p274

(6) 牧下英世（2003），『数学教育を通して取り組んだ総合的な学習とその実証的な研究−算額を用いた課題学習とそのフィールドワークの実践から−』，筑波大学附属駒場論集第 42 集，p193〜p221

(7) 牧下英世（2003），『数学教育を通して取り組んだ総合的な学習とその実証的な研究』，教科教育学研究 第 21 集，日本教育大学協会第二常置委員会，p231〜p248

(8) 筑波大学附属駒場高等学校数学科（2010），『2009 年度（58 期生）卒業論文集』，p1〜p152

(9) 岩橋義雄（1989），『大和の算額』，p36〜p41

(10) 近畿数学史学会編（1992），『近畿の算額』，大阪教育図書，p132〜p133

(11) 図 5 のように，円柱 ABCD を 2 点 B，D を通る平面で同じ大きさの 2 つの立体に分けると，切り口は楕円になる。点 A から，その楕円に垂線を下ろし，その足を H とする。また，この円柱を上方に延長し，A を通って，楕円 BD に平行な平面で切ったときの面を楕円 EA とする。$AB = a$，$BD = b$，$AD = h$ とし，楕円の面積を S とすると，

円柱 ABCD の体積$= \pi \times \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \times AD = \dfrac{\pi a^2 h}{4}$

また，$AH = h_1$ とすると，楕円柱 AEBD の体積$= Sh_1$　ここで，

楕円柱 AEBD の体積＝円柱 ABCD の体積だから，$Sh_1 = \dfrac{\pi a^2 h}{4}$

一方，△ABD と△HAD は互いに相似であるから，AB：BD＝HA：AD

$HA = \dfrac{AB \times AD}{BD}$　より　$h_1 = \dfrac{ah}{b}$　　よって　$S = \dfrac{\pi ab}{4}$

すなわち，楕円の面積は $\dfrac{\pi}{4} \times$（長径）×(短径)で求められる。□

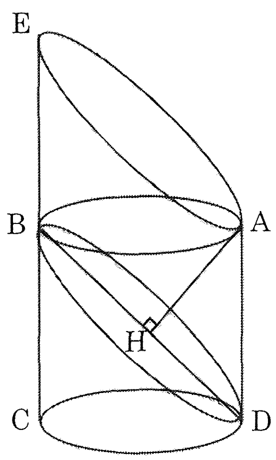


図５

(12) 平山諦監修・大野政治・三橋愛子編集（1970），『千葉県の算額』，成田山資料館，p93〜p97

(13) 中村信弥（2008），電子書籍『和算の図形公式』，p67

(14) 傍書法は関孝和が考案した方程式の表現方法である。傍書法で書かれた式を現代的に表すと，

$\sqrt{\text{中}}\ \sqrt{\text{天}}\ + \sqrt{\text{小}}\ \sqrt{\text{天}}\ + \sqrt{\text{小}}\ \sqrt{\text{中}}\ - \sqrt{\text{全}}$　となる。

(15) 牧下英世（2002），『算額道場』，研成社，p120〜p126：本文の図4の△ABCについて，辺BCを$m:n$に内分する点をDとする。また，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AD}=c$とする。△ABDと△ACDの面積比は，高さが共通であるから，面積比底辺の長さの比に等しい。また，２つの内接円の半径が等しいから，面積比はその周の長さの比に等しい。よって，次が成り立つ

$$\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ACD}=(\mathrm{AB}+\mathrm{AD}+\mathrm{BD}):(\mathrm{AC}+\mathrm{AD}+\mathrm{CD})$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{BD}:\mathrm{CD}=(a+c+\mathrm{BD}):(b+c+\mathrm{CD})=(a+c):(b+c)$$

ここで，スチュアートの定理で，$\mathrm{BD}=\dfrac{m}{m+n}\mathrm{BC}$，$\mathrm{CD}=\dfrac{n}{m+n}\mathrm{BC}$に注意すると，

$$n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2=(m+n)\mathrm{AD}^2+n\left(\frac{m}{m+n}\mathrm{BC}\right)^2+m\left(\frac{n}{m+n}\mathrm{BC}\right)^2$$

$$=(m+n)\mathrm{AD}^2+\frac{m^2n+mn^2}{(m+n)^2}\mathrm{BC}^2=(m+n)\mathrm{AD}^2+\frac{mn(m+n)}{(m+n)^2}\mathrm{BC}^2$$

$$=(m+n)\mathrm{AD}^2+\frac{mn}{m+n}\mathrm{BC}^2$$

よって，

$$\mathrm{BC}^2=\frac{m+n}{m}\mathrm{AB}^2+\frac{m+n}{n}\mathrm{AC}^2-\frac{(m+n)^2}{mn}\mathrm{AD}^2=\frac{m+n}{m}a^2+\frac{m+n}{n}b^2-\frac{(m+n)^2}{mn}c^2$$

$$=\frac{a+b+2c}{a+c}a^2+\frac{a+b+2c}{b+c}b^2-\frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)(b+c)}c^2$$

$$=(a+b+2c)(a+b-2c)=(a+b)^2-4c^2$$

故に，

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(a+b)^2-4c^2}$$

□

(16) 中線定理（パップスの定理）は，△ABCの辺BCの中点Mについて，次が成り立つ。

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

スチュワートの定理は，辺BCを$m:n$に内分する点Dについて，次が成り立つ。

$$n\,\mathrm{AB}^2+m\,\mathrm{AC}^2=(m+n)\,\mathrm{AD}^2+n\,\mathrm{BD}^2+m\,\mathrm{CD}^2$$

$m=n=1$のとき，スチュワートの定理は中線定理となる。中線定理は中等教育のみならず，高等数学を学ぶときにも利用頻度の高い定理である。その一般形であるスチュワートの定理はとても汎用性が高い。筆者は幾何教材として中学校，高等学校のカリキュラムに取り入れたいと考えている。

(17) 牧下英世（2010），『数学Ⅰ，数学Ａの課題学習とその教材開発　-数学史の観点から考察する-』，第43回数学教育論文発表会論文集，p759〜p764

(18) 学習指導要領の改訂により総合的な学習の時間の評価が，生徒の学習状況に関する評価，教師の学習指導に関する評価，各学校の指導計画に関する評価の３つに評価について，適切な評価をするように要請されている。