

氏名(本籍)	竹内 耕太 (京都府)			
学位の種類	博士(数学)			
学位記番号	博甲第6000号			
学位授与年月日	平成24年3月23日			
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当			
審査研究科	数理物質科学研究科			
学位論文題目	<b>A study of types and definable sets in first order structures</b> (一階の構造におけるタイプと定義可能集合についての研究)			
主査	筑波大学教授	理学博士	坪井 明人	
副査	筑波大学教授	理学博士	田島 慎一	
副査	筑波大学准教授	博士(数学)	塩谷 真弘	
副査	神戸大学教授	理学博士	桔 梗 宏 孝	

### 論文の内容の要旨

モデル理論において、定義可能集合 (definable set) および定義可能集合の族として定義されるタイプの振る舞いを研究することは非常に重要になる。構造  $M$  が与えられた時、論理式  $\phi(x)$  の解の集合  $\phi(M)$  を  $\phi$  によって定義される定義可能集合とよぶ。また、論理式の集合  $p(x)$  が有限充足的な時に  $p(x)$  をタイプとよぶ。本論文ではタイプと定義可能集合について、以下の三つの研究を行っている。

- (1) タイプ排除定理と Lopez-Escobar の定理に関する研究
- (2) 局所順序極小 (locally o-minimal) 構造の研究
- (3) 一様樹形図 (indiscernible tree) に関する研究。

本論文の最初に、共通して用いられる概念等の説明がなされ、その後上の研究に関する議論が行われている。それぞれの研究は独立の章で行われていて、各章のはじめでは準備として、必要な定義および概念についての説明が簡潔に行われている。上記 (1) - (3) の研究について以下で説明する。

(1) について。ここでは可算言語の場合に議論を行っている。通常タイプ排除定理は、孤立的でない可算個のタイプが与えられた時、それらの解を全く有しないモデルの存在を主張する。一方で S. Shelah は、完全タイプに限れば、連続濃度未満のタイプたちを同時に排除するモデルが存在することを示している。本論文では、これらの結果を同時に拡張する定理が証明されている。また Lopez-Escobar 定理の拡張も証明されている。

(2) について。全順序構造  $R = (R, <, \dots)$  において、一次元の定義可能集合が非常に単純なものしかないとき、順序極小とよばれている。実閉体はそのもっとも有名な例であり、実閉体に関する多くの議論が、順序極小という条件だけで行われることがわかり、その重要性が注目されている。しかし、実数体に  $\sin$  関数を付加したものは、順序極小にはならない。本論文では、 $\sin$  関数を扱えるように一般化した局所順序極小の概念を研究している。局所順序極小の特徴づけ定理を証明して、さらにその応用として、局所順序極小構造を作る一般的な方法 (本文中では simple product と呼ばれている) を与え、多くの局所順序極小構造がこの方法によって構築されることを示している。

(3) について。一様樹形図はモデル理論において技術的に非常に重要な概念である。理論  $T$  の分類は、各種のランクの有限性（または無限性）を用いて定義される場合が多い。その際に論理式のパラメータのなす樹形図の一様性は議論の単純化につながる。本論文では、パラメータ集合  $X$  の満たすべき条件を論理式の集合  $\Gamma$  で与えた時、 $\Gamma$  の解  $X$  として一様樹形図をとれるための ( $\Gamma$  の) 条件を与えている。また、その結果を用いて、非安定理論の分類に対して応用を行っている。

## 審査の結果の要旨

扱っている3つの問題は、何れもモデル理論において重要な問題であり、多くの研究者が興味を持つ問題である。竹内氏の行った研究は、これらの分野の発展に少なからず影響を与えられ、数学的にも評価できる結果である。特にモデル理論で現在までに行われてきた議論を見通しよく厳密に展開するための道具立てを与えた点で大いに評価できる。竹内氏のタイプ排除定理の証明方法は、アイデアは単純ではあるが、それゆえに非常に見通しよく議論することができる。局所順序極小は Toffalori と Vozoris によって導入された概念であるが、本論文ではその概念を順序極小性を用いて直観的に把握しやすい形で特徴づけることに成功している。また simple product の概念の導入により、新しい局所順序構造を統一的に構成する方法を与えている。一様樹形図の存在定理は、非安定理論を統一的に研究する場合に大いに役立つと考えられる。

平成 24 年 2 月 17 日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（数学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。