筑波大学大学院博士前期課程

数理物質科学研究科修士論文

Proper Forcing Axiom の無矛盾性

山本啓太

(数学専攻)

2012 年 2 月

筑波大学大学院博士前期課程

数理物質科学研究科修士論文

Proper Forcing Axiom の無矛盾性

山本啓太

(数学専攻)

指導教員　塩谷真弘　印

論文要旨

本論文は Proper Forcing Axiom の無矛盾性に関する結果をまとめた総合報告である.

1963 年, Cohen は強制法 (forcing) と呼ばれる手法を開発し, Cantor の連続体仮設 ($2^\omega = \omega_1$) の独立性を示した ([6], [7]). 強制法とは半順序を用いて集合論のモデルを拡大する手法である. これは, ZFC(選択公理を含む集合論の公理系の一つ) のモデル V と半順序 $P \in V$ が与えられたときに, P の V-generic フィルター G を含むように V を拡大して新しいモデル $V[G]$ を得る手法である. ここで, V-generic フィルターとは V 上のすべての P の稠密な部分集合と交わるフィルターのことである. 例えば, P として 0, 1 の有限列からなる半順序をとれば, いわゆる Cohen 実数を (1 つ) 付加したモデルが得られる. Cohen は, Cohen 実数を ω_2 個付加したモデルを構成することにより, 連続体仮設の独立性を証明した.

1965 年, Solovay と Tennenbaum は, 可算鎖条件 (countable chain condition, c.c.c.) をみたす半順序による反復強制法 (iterated forcing) を開発して, 実数直線の特徴付けに関する Suslin の問題の無矛盾性を証明した ([19]). 彼らの証明の要となった事実は, c.c.c. をみたす半順序のクラスが有限台反復強制法によって閉じていることである. Solovay と Tennenbaum の結果は, この事実に気づいた人々によって直ちに, いわゆる Martin の公理 (Martin's Axiom, MA) の無矛盾性に一般化された ([15]). Martin の公理は, 一連の強制法公理 (forcing axiom) の最初の例となった:

定義. 半順序のある性質 φ に対して, 強制法公理 FA(φ) を以下の主張とする:
φ を満たす任意の半順序 P と P の任意の稠密部分集合 D_α ($\alpha < \omega_1$) に対して, すべての D_α と交わる P のフィルターが存在する.

Martin の公理 MA (より正確には MA_{ω_1}) とは FA(c.c.c.) のことである. MA は Suslin の問題を解決し, 連続体仮設の否定を導く他にも幅広い応用があることが知られている. 一方で, Martin の公理に解決できない問題も多数存在する. 最も代表的な問題の例は, 巨大基数が関わることが知られている問題である. ここで, 巨大基数とは, ZFC の無矛盾性を導くような超越性を備えた無限基数の一般的総称である. MA の無矛盾性は ZFC の無矛盾性から従うので, MA 自体が ZFC の無矛盾性を導くような命題を導くことは (ZFC 自体が矛盾しない限り) できない.

1980 年頃, Shelah は proper 強制法と呼ばれる, 非常に広い半順序のクラスを導入し, このクラスが可算台反復強制法で閉じていることを証明した ([17], [18]). Baumgartner は FA(proper) を導入し, これを Proper Forcing Axiom (PFA) と名付けた. さらに Shelah の結果も用いることで, 超コンパクト基数 (巨大基数の一種) の無矛盾性から PFA の無矛盾性も証明した ([2], [3]):

定理. (Baumgartner-Shelah) ZFC+"超コンパクト基数の存在" が無矛盾ならば, ZFC+PFA も無矛盾である.

Proper な半順序は c.c.c. や countably closed な半順序を含み, 特に PFA は MA を導く. さらに PFA は連続体濃度を決定する ($2^\omega = \omega_2$) ことも Todorčević と Veličković によって示された ([4], [20]). また PFA は関数解析にも応用がある. 可換 Banach 代数は Banach 空間に他の演算と両立する積演算を加えたものであり, 閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数全体 $C([0, 1])$ は可換 Banach 代数をなす. Todorčević は, PFA を仮定すると, $C([0, 1])$ から可換 Banach 代数への準同型写像は常に連続写像となることを示した ([4], [9]). Todorčević はさらに, PFA から Square 原理の否定を導き, PFA の無矛盾性には巨大基数の無矛盾性が本質的に関わっていることを示した ([4]). PFA の無矛盾性から Woodin 基数 (巨大基数の一種で無矛盾の強さとしては超コンパクト基数より遥かに弱い) の無矛盾性が導かれることは Schimmerling により示されている ([16]) が, PFA の無矛盾性は超コンパクト基数の無矛盾性をも導くであろうと予想されており, この予想はいわゆる内部モデルの理論の重要な動機となっている.

第 1 章は集合論の基礎事項についてのまとめで, 本論文に必要な知識を簡潔に解説する.
第 2 章では半順序の定義及び半順序上のフィルターについて解説する. 特に $\mathcal{P}_\kappa(A)$ 上の正規なフィルターとその重要な例である club フィルターについて重点をおいて解説する.
第 3 章では巨大基数の一つである超コンパクト基数について解説する. 超コンパクト基数の存在が集合論のモデル間のある初等的埋め込みの存在で記述できることを示し, 重要な道具の一つである Laver 関数の存在を証明する.
第 4 章では集合論のモデルの重要な構成法である強制法について解説する. 強制法の一般論について初歩の部分から反復強制法まで幅広く解説する.
第 5 章では Shelah によって導入された proper な強制法について解説する. 半順序が proper であることの定義が generic condition と呼ばれる半順序の要素を用いて同値に言い換え出来ることを示し, proper という性質が可算台を持つ反復強制法で閉じているという重要な定理を証明する.
最終章である第 6 章では Proper Forcing Axiom を定義し, その無矛盾性が超コンパクト基数の無矛盾性から導かれることを証明する. この定理が本論文における主定理であり, 第 1 章から第 5 章までの知識を用いて証明される.

目次

1　基本事項

ZFC は集合論の公理系の一つで選択公理を含むものであり, 本論文の定理などはこの公理系を採用している.

定義 1.1. 集合全体のクラス $\{x : x = x\}$ を V と書く.

定義 1.2. α, β を順序数とする.

1. 写像 $f : \alpha \to \beta$ について, 次が成り立つとき f は共終的であるという:

$$\forall\gamma < \beta,\ \exists\delta < \alpha,\ \gamma \leq f(\delta).$$

2. β の共終数 $\mathrm{cf}(\beta)$ を次で定める:

$$\mathrm{cf}(\beta) = \min\{\alpha \leq \beta : \alpha\text{から}\beta\text{への共終的な写像が存在}\}.$$

定義 1.3. α を極限順序数とする.
$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ が成り立つとき, α は正則であるという. そうでないとき α は特異であるという.

定義 1.4. 各順序数 α に対して, V_α を次のように再帰的に定義する:

- $V_0 = \emptyset$.
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$　(α が極限順序数のとき).

定義 1.5. 次が成り立つとき, クラス C は推移的であるという: 任意の a, b に対して,

$$a \in b \in C \text{ ならば } a \in C.$$

定義 1.6.

1. 集合 x について, x を部分集合として含む最小の推移的な集合を x の推移的閉包といい, $\mathrm{TC}(x)$ と書く.
2. 基数 κ に対して, $H_\kappa := \{x : |\mathrm{TC}(x)| < \kappa\}$ と定める.

定義 1.7. N, M を 2 つの L-構造とする. 次が成り立つとき, 写像 $j : N \to M$ は初等的埋め込みであるという: 任意の L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ と任意の $a_1, ..., a_n \in N$ に対して,

$$N \models \varphi(a_1, ..., a_n) \ \Leftrightarrow\ M \models \varphi(j(a_1), ..., j(a_n)).$$

特に, 初等的埋め込み j が恒等写像のときは N を M の初等的部分構造といい, $N \prec M$ とかく.

命題 1.8. (Tarski-Vaught の判定法) M, N は 2 つの L-構造で, M は N の部分構造であるとする. このとき, 次の 2 つは同値である:

1. $M \prec N$
2. 任意の L-論理式 $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ と任意の $a_1, \ldots, a_n \in M$ に対して,

$$N \models \exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \text{ ならば, ある } b \in M \text{ が存在して } N \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n).$$

命題 1.9. L を可算言語, M を L-構造とする. このとき, 任意の可算部分集合 $A \subset M$ に対して, A を含む可算濃度の初等的部分構造 $N \prec M$ が存在する.

定義 1.10. クラス C 上の 2 項関係 R について,

1. (C, R) は整礎的 :⇔ C の空でない任意の部分集合 X に対して, $\exists y \in X,\ \forall z \in X,\ (z, y) \notin R$.
2. (C, R) は集合的 :⇔ 任意の $x \in C$ に対して $\{y \in C : (y, x) \in R\}$ は集合である.
3. (C, R) は外延的 :⇔ $\forall x, y \in C,\ (\forall z \in C\ ((z, x) \in R \Leftrightarrow (z, y) \in R) \Rightarrow x = y)$.

定理 1.11. クラス C 上の 2 項関係 R について, (C, R) は整礎的で集合的かつ外延的であるとする. クラス関数 $\pi : C \to V$ を次のように再帰的に定める:

$$\pi(x) = \{\pi(y) : y \in C,\ (y, x) \in R\}.$$

$M := \mathrm{ran}(\pi)$ とおく. このとき π は (C, R) から $(M, \in)$ への同型写像となり, M は推移的となる. この M を (C, R) の推移的崩壊という.

定義 1.12. クラス M と $\{\in\}$-論理式 φ に対して, 論理式 φ^M を再帰的に次のように定める:

- $(x \in y)^M \equiv x \in y$.
- $(x = y)^M \equiv x = y$.
- $(\neg\varphi)^M \equiv \neg(\varphi^M)$.
- $(\varphi \wedge \psi)^M \equiv \varphi^M \wedge \psi^M$.
- $(\varphi \vee \psi)^M \equiv \varphi^M \vee \psi^M$.
- $(\varphi \to \psi)^M \equiv \varphi^M \to \psi^M$.
- $(\forall x \varphi)^M \equiv \forall x \in M\ \varphi^M$.
- $(\exists x \varphi)^M \equiv \exists x \in M\ \varphi^M$.

このように定めた φ^M を φ の M による相対化という (φ^M を $M \models \varphi$ と書くこともある). また, クラス $C = \{x : \varphi(x)\}$ に対して $C^M := \{x \in M : \varphi^M(x)\}$ を C の M による相対化という.

定義 1.13. $\varphi(x_1, ..., x_n)$ を $\{\in\}$-論理式, $M \subset N$ を 2 つのクラスとする. 次が成り立つとき, φ は M, N

の間で絶対的という:

$$\forall a_1, ..., a_n \in M\ (\varphi^M(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \varphi^N(a_1, ..., a_n)).$$

また, M, V の間で絶対的なときは単に M で絶対的という.

定義 1.14. M を推移的なクラス, T を $\{\in\}$-閉論理式からなる集合とする.
任意の $\varphi \in T$ に対して φ^M が証明できるとき, M は T のモデルであるという.

定義 1.15. $N \subset M$ を 2 つの推移的なクラスとする. 任意の $\{\in\}$-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ に対して次が成り立つとき, クラス関数 $j : N \to M$ は初等的埋め込みであるという:

$$\forall a_1, ..., a_n \in N\ (\varphi^N(a_1, ..., a_n)\ \leftrightarrow\ \varphi^M(j(a_1), ..., j(a_n)).$$

2 半順序とフィルター

定義 2.1. 集合 P と P 上の 2 項関係 $\leq$ との対 $(P, \leq)$ が次を満たすとき半順序という:

- $\forall p \in P,\ (p \leq p)$.
- $\forall p, q, r \in P,\ (p \leq q \leq r \Rightarrow p \leq r)$.

定義 2.2. $(P, \leq)$ を半順序とし, $p, q \in P$ とする.

- $p \parallel q$ (両立可能) $:\Leftrightarrow \exists r \in P\ (r \leq p\ \wedge\ r \leq q)$.
- $p \perp q$ (両立不可能) $:\Leftrightarrow \neg(p \parallel q)$.

定義 2.3. P を半順序とし, $F \subset P$ とする. 次が成り立つとき, F は P 上のフィルターという:

- $F \neq \emptyset$.
- $\forall p, q \in F,\ \exists r \in F\ (r \leq p,\ r \leq q)$.
- $\forall p \in F,\ \forall q \in P\ (p \leq q \Rightarrow q \in F)$.

定義 2.4. S を集合, $F \subset \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ とする. F が半順序 $(\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}, \subset)$ 上のフィルターとなるとき, F を S 上のフィルターとよぶ.

定義 2.5. 集合 S 上のフィルター F に対して, $F^+ := \{X \subset S : \forall C \in F,\ X \cap C \neq \emptyset\}$ と定める.

定義 2.6. F を S 上のフィルター, κ を基数とする.

1. 任意の $X \subset S$ に対して X か $S \setminus X$ のどちらかが F の要素となるとき, F を S 上の超フィルターとよぶ.

2. 濃度が κ 未満の任意の部分集合 $\mathcal{A} \subset F$ に対して共通部分 $\bigcap \mathcal{A}$ が F の要素となるとき, F は κ-完備であるという.

定義 2.7. 集合 A と $|A|$ 以下の基数 κ に対して, $\mathcal{P}_\kappa(A) := \{X \subset A : |X| < \kappa\}$ と定める. $\mathcal{P}_\kappa(A)$ は $[A]^{<\kappa}$ と書くこともある.

定義 2.8. 各 $a \in A$ ごとに $X_a \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ が与えられているとする. このとき, 対角共通部分 $\triangle_{a\in A} X_a$ を次で定義する ;

$$\triangle_{a\in A} X_a := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(A) : a \in \bigcap_{a\in x} X_a\}.$$

定義 2.9. F を $\mathcal{P}_\kappa(A)$ 上のフィルターとする. 次が成り立つとき, F は正規であるという:

- F は κ-完備.
- 任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ に対して $\{y \in \mathcal{P}_\kappa(A) : x \subset y\} \in F$.
- 任意の $\{C_a : a \in A\} \subset F$ に対して $\triangle_{a\in A} C_a \in F$.

補題 2.10. F を $\mathcal{P}_\kappa(A)$ 上の正規なフィルター, $S \in F^+$, $f : S \to A$ を任意の $x \in S$ について $f(x) \in x$ となる写像とする. このとき, $\{x \in S : f(x) = a\} \in F^+$ となる $a \in A$ が存在する.

証明. 背理法で示す. 任意の $a \in A$ について $\{x \in S : f(x) = a\} \notin F^+$ と仮定する. 各 $a \in A$ に対し, $C_a \in F$ を $C_a \cap \{x \in S : f(x) = a\} = \emptyset$ になるように取る. このとき, $S \cap C_a \ni x$ ならば $f(x) \neq a$ となっている. $\triangle_{a\in A} C_a \in F$, $S \in F^+$ だから $S \cap \triangle_{a\in A} C_a \ni x$ なる x がある. この x は $\bigcap_{a\in x}(C_a \cap S)$ の要素になっている. よって C_a の選び方により $f(x) \neq a$ が任意の $a \in x$ について成り立つ. これは $f(x) \notin x$ を意味しており, f の性質と矛盾する. □

正規なフィルターの例として, 以下で定められる $\mathcal{P}_\kappa(A)$ 上の club フィルターがある.

定義 2.11. κ を非可算正則基数, A を濃度 κ 以上の集合とする.

1. $X \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ について, 任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ に対して $x \subset y$ なる $y \in X$ が存在するとき, X は非有界であるという.
2. $X \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ について, X の要素からなる長さ α $(\alpha < \kappa)$ の任意の拡大列 $\langle x_\xi : \xi < \alpha\rangle$ に対して $\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in X$ となるとき, X は閉であるという.
3. $C \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ が閉かつ非有界であるとき, C は club であるという.
4. $S \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ について, 任意の $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club C に対して $C \cap S \neq \emptyset$ が成り立つとき, S は定常集合であるという.

例 2.12. 可算言語 L と非可算濃度の L-構造 M に対して, M の可算濃度の初等的部分構造全体は

$\mathcal{P}_{\omega_1}(M)$ の club となる.

命題 2.13. κ を非可算正則基数, A を濃度 κ 以上の集合とする. このとき, 次が成り立つ:

1. 任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ に対して $\{y \in \mathcal{P}_\kappa(A) : x \subset y\}$ は $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club になる.
2. $\gamma < \kappa$ としたとき, 各 $\alpha < \gamma$ に対して C_α が $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club であるならば, $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ も $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club になる.
3. 各 $a \in A$ に対して C_a が $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club であるならば, $\triangle_{a\in A} C_a$ も $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club になる.

特に, $\{X \subset \mathcal{P}_\kappa(A) : \mathcal{P}_\kappa(A)$ のある club C があって $X \supset C\}$ は $\mathcal{P}_\kappa(A)$ 上の正規フィルターとなる. このフィルターを $\mathcal{P}_\kappa(A)$ 上の club フィルターと呼ぶ.

証明. (1 について) : 容易に確かめられる.
(2 について) : $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ が閉であることは明らか. $\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ が非有界であることを示そう. $x \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ を一つとって固定する. $x_n \in \mathcal{P}_\kappa(A)$, $a_{n,\alpha} \in C_\alpha$ $(n < \omega,\ \alpha < \gamma)$ を次を満たすように再帰的に選ぶ（C_α が club であることと, κ が正則であることを使う）;

1. $x_0 = x$,
2. $x_n \subset a_{n,\alpha}$ $(\forall n < \omega,\ \forall \alpha < \gamma)$,
3. $x_{n+1} = \bigcup_{\alpha<\gamma} a_{n,\alpha}$ $(\forall n < \omega)$.

$y = \bigcup_{n<\omega} x_n$ とおく. $y \in \bigcap_\alpha C_\alpha$ を示せばよい. $\alpha < \gamma$ を固定する. $x_0 \subset a_{0,\alpha} \subset x_1 \subset a_{1,\alpha} \subset \ldots \subset x_n \subset a_{n,\alpha} \subset x_{n+1} \subset \ldots$. よって $y = \bigcup_{n<\omega} x_n = \bigcup_{n<\omega} a_{n,\alpha} \in C_\alpha$.
(3 について) : $C = \triangle_{a\in A} C_a$ とおく.
(C が閉であること) : $\langle x_\xi :\ \xi < \alpha\rangle$ を C の上昇列とする $(\alpha < \kappa)$. $\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in C$ を示せばよい. これは $\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in \bigcap_{a\in\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi} C_a$ と同値であり, すなわち任意の $\xi < \alpha,\ a \in x_\xi$ について $\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in C_a$ を示せばよい. $\xi < \alpha$ と $a \in x_\xi$ を固定する. 任意の ξ 以上の $\eta < \alpha$ について $a \in x_\eta$ であるので $x_\eta \in C_a$. よって $\bigcup_{\eta<\alpha} x_\eta = \bigcup_{\xi\le\eta<\alpha} x_\eta \in C_a$ となる.
(C が非有界となること) : $x \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ を固定する. $x \subset y$ なる $y \in C$ の存在を示せばよい, つまり, $x \subset y \in \bigcap_{a\in y} C_a$ なる $y \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ を見つければよい. $\bigcap_{a\in x_n} C_a$ が club になることに注意して $x_n \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ $(n < \omega)$ を次を満たすように取る;

1. $x = x_0 \subset x_1 \subset x_2 \subset \ldots$,
2. $x_{n+1} \in \bigcap_{a\in x_n} C_a$ $(\forall n < \omega)$.

$y = \bigcup_{n<\omega} x_n$ とおく. 任意に $n < \omega,\ a \in x_n$ をとる. $y \in C_a$ を示せば $y \in \bigcap_{a\in y} C_a$ が示されたことに

なり証明が終わる. x_n についての一つ目の条件により, 任意の $m \geq n$ に対して $a \in x_m$ である. これは二つ目の条件により $x_{m+1} \in C_a$ となる. よって $y = \bigcup_{n \leq m < \omega} x_{m+1} \in C_a$ がわかる. □

定義 2.14. $D \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ とする. 任意の $x, y \in D$ に対して $x \cup y \subset z$ なる $z \in D$ が存在するとき, D を有向集合という.

補題 2.15. $C \subset \mathcal{P}_\kappa(A)$ を閉な部分集合, $D \subset C$ を濃度 κ 未満の有向集合とする. このとき, $\bigcup D \in C$.

証明. μ を D の濃度とする. $D = \{x_\alpha : \alpha < \mu\}$ と並べておく.
($|D| \leq \omega$ のとき) : $y_n \in D$ $(n < \mu)$ を次を満たすように取る.

1. $y_0 = x_0$,
2. $y_{n+1} \supset x_{n+1} \cup y_n$.

このとき,

- $y_n \subset y_{n'}$,
- $x_n \subset y_n$,

が全ての $n < n' < \mu$ について成り立っている. よって二つ目の性質より $\bigcup D = \bigcup_{n<\mu} y_n$ が導かれる. 一方, C が閉であることと一つ目の性質より $\bigcup_{n<\mu} y_n \in C$ となる.
($|D| > \omega$ のとき) : D の濃度に関する帰納法で示す. まず, 関数 $f : D^2 \to D$ で, $x \cup y \subset f(x, y)$ を満たすものを一つとって固定する. 各 $\alpha < \mu$ に対して D_α を次のように再帰的に定義する ;

D_α は $\{x_\alpha\} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta$ を含み, 関数 f で閉じている最小の集合.

このとき, $D_\alpha \subset D$ は有向集合になり次の三つの性質を持つ.

1. $D_\alpha \subset D_{\alpha'}$ $(\alpha < \alpha' < \mu)$,
2. $x_\alpha \in D_\alpha$ $(\alpha < \mu)$,
3. $|D_\alpha| \leq \max\{|\alpha|,\ \omega\}$.

各 α に対して $y_\alpha = \bigcup D_\alpha$ とおく. 帰納法の仮定により, $y_\alpha \in C$ が全ての $\alpha < \mu$ について成り立つ. D_α についての二つ目の性質により $\bigcup D = \bigcup_{\alpha<\mu} y_\alpha$ となる. また, 一つ目の性質と, $y_\alpha \subset y_{\alpha'}$ $(\alpha < \alpha' < \mu)$ に注意すると $\bigcup_{\alpha<\mu} y_\alpha \in C$ がわかる. □

定義 2.16. 写像 $f : [A]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa(A)$ と $x \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ を考える. 任意の $e \in [x]^{<\omega}$ について $f(e) \subset x$ が成り立つとき, x を f の closure point という. また,f の closure point 全体の集合を C_f と書く. このとき, C_f は $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club になっている.

補題 2.17. 任意の $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club C に対してある写像 $f : [A]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa(A)$ が存在して $C_f \subset C$ を満たす.

証明. $e \in [A]^{<\omega}$ とする. $f(e) \in C$ を $f(e) \supset e \cup \bigcup_{e' \subsetneq e} f(e')$ なるように, 濃度の小さい e から再帰的に選ぶ. このとき,

1. $e \subset f(e)$,
2. $e_1 \subset e_2 \Rightarrow f(e_1) \subset f(e_2)$

となる. $C_f \subset C$ を示したいので, $x \in C_f$ を一つ取り固定する. 集合 $\bigcup\{f(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$ を考える. $x \in C_f$ なので, x がこの集合を含んでいることがわかる. 一方, $e \subset f(e)$ なので, $x = \bigcup\{f(e) : e \in [x]^{<\omega}\}$ がわかる. また, $e_1 \subset e_2 \Rightarrow f(e_1) \subset f(e_2)$ なので $\{f(e) : e \in [x]^{<\omega}\} \subset C$ は有向集合である. よって補題 2.15 より $x \in C$. □

定義 2.18. $A \subset B$, $|A| \geq \kappa$ とする. $X \in \mathcal{P}_\kappa(B)$ に対して X の A への射影 $X|A$ を, $X|A := \{x \cap A : x \in X\}$ で定義する. また, $Y \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ に対して Y の B への持ち上げ Y^B を, $Y^B := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(B) : x \cap A \in Y\}$ で定義する.

定理 2.19. $A \subset B$ とする.

1. S を $\mathcal{P}_\kappa(B)$ の定常集合とする. このとき, $S|A$ は $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の定常集合になる.
2. S を $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の定常集合とする. このとき, S^B は $\mathcal{P}_\kappa(B)$ の定常集合になる.

証明. (1): C を $\mathcal{P}_\kappa(A)$ の club とする. もし $S \cap C^B \neq \emptyset$ ならば, $S \cap C^B = \{x \in S : x \cap A \in C\}$ だから $S|A \cap C \neq \emptyset$ となる. よって次を示せば十分である.

主張 2.20. C^B は $\mathcal{P}_\kappa(B)$ の club になる.

まず C^B が閉であることを示す. $\gamma < \kappa$ とし, x_α $(\alpha < \gamma)$ を C^B の上昇列とする. C^B の定義から, $x_\alpha \cap A \in C$ となる. よって $x_\alpha \cap A$ $(\alpha < \gamma)$ は C の上昇列となる. C は club だったから $\bigcup_{\alpha<\gamma}(x_\alpha \cap A) = (\bigcup_\alpha x_\alpha) \cap A \in C$. よって $\bigcup_\alpha x_\alpha \in C^B$ となり, C^B が閉であることがわかった.
次に C^B が非有界であることを示す. $x \in \mathcal{P}_\kappa(B)$ を固定して考える. $x \subset y$ なる $y \in C^B$ を見つければよい. $y' \in C$ を $x \cap A \subset y'$ となるようにとる. $y = y' \cup x$ とする. $x \subset y$ は明らか. $y \cap A = y' \in C$ だから $y \in C^B$.
(2): C を $\mathcal{P}_\kappa(B)$ の club とする. $C|A \cap S \neq \emptyset$ ならば $x \cap A \in S$ となる $x \in C$ があるから $x \in C \cap S^B \neq \emptyset$ となる. よって次を示せば十分.

主張 2.21. $C|A$ はある club を含む.

補題 2.17 により, $C_f \subset C$ となる $f : [B]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa(B)$ がとれる. また, $C_f|A \subset C|A$ に注意する. 各

$e \in [A]^{<\omega}$ に対して $x_e = \bigcap\{x \in C_f : e \subset x\}$ とおく．すると，x_e は e を含む最小の f の closure point になる．写像 $g : [A]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa(A)$ を $g(e) = x_e \cap A$ で定める．$C_f|A = C_g$ であることを示せば，$C|A \supset C_f|A$ なので $C|A$ が club C_g を含むことがわかる．

$C_f|A \subset C_g$ であることを確かめよう．$x \in C_f$ をとる．$x \cap A \in C_g$ を導けばよい．$e \in [x \cap A]^{<\omega}$ とすると $g(e) = x_e \cap A$．また $e \subset x$ と $x \in C_f$ に注意すると $x_e \subset x$ となるから，$x_e \cap A \subset x \cap A$．よって $x \cap A \in C_g$ がわかった．

次に $C_f|A \supset C_g$ を確かめる．$y \in C_g$ とする．$y = \bigcup_{e \in [y]^{<\omega}}(x_e \cap A) = (\bigcup_{e \in [y]^{<\omega}} x_e) \cap A$ とかけることに注意する．なぜならば任意の $e \in [y]^{<\omega}$ に対して，$x_e \cap A = g(e) \subset y$ と $e \subset x_e \cap A$ が成り立っているからである．さて，$\bigcup_{e \in [y]^{<\omega}} x_e \in C_f$ を確かめれば証明が終わる．x_e の最小性により $e_1 \subset e_2$ ならば $x_{e_1} \subset x_{e_2}$ である．だから $\{x_e : e \in [y]^{<\omega}\}$ は濃度 κ 未満の C_f の有向集合になっている．よって補題 2.15 より $\bigcup_{e \in [y]^{<\omega}} x_e \in C_f$ が導かれる． □

定理 2.22. 任意の $\mathcal{P}_{\omega_1}(A)$ の club C に対して $C \supset C_F := \{x \in \mathcal{P}_{\omega_1}(A) : \forall e \in [x]^{<\omega}, F(e) \in x\}$ となるような写像 $F : [A]^{<\omega} \to A$ が存在する．（C_F は $\mathcal{P}_{\omega_1}(A)$ の club になる．）

証明. A はある基数 λ だと仮定してよい．$[\lambda]^{<\omega}$ の club C を固定して考える．補題 2.17 の証明と同じように，$f : [\lambda]^{<\omega} \to C$ を $e \subset f(e)$, $e \subset e' \Rightarrow f(e) \subset f(e')$ となるように選ぶ．このとき $C_f \subset C$ となっている．各 $e \in [\lambda]^{<\omega}$ について，$|f(e)| \leq \omega$ なので，$f(e) = \{f_k(e) : k < \omega\}$ と並べておく（$f_k(e)$ は $f(e)$ の k 番目の要素のことである）．また，$\omega \times \omega$ の要素を次のように並べる;

$$\omega \times \omega = \{(k_n, m_n) : n < \omega\},\ \text{and}\ \forall n < \omega,\ m_n \leq n.$$

写像 $[\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ を

- $F(\{\alpha\}) = \alpha + 1$,
- $F(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}) = f_{k_n}(\{\alpha_1, ..., \alpha_{m_n}\})$ $(\alpha_1 < ... < \alpha_n < \lambda,\ 2 \leq n < \omega)$

で定義する．

主張 2.23. $C_F \subset C_f$ $(\subset C)$.

$x \in C_F$ をとる．F の定義により，$\alpha \in x \Rightarrow \alpha + 1 \in x$．また，$F(\emptyset) \in x$ なので $x \neq \emptyset$．任意の $e \in [x]^{<\omega}$ について $f(e) \subset x$ をとなれば $x \in C_f$ となって主張が示される．f のとり方より任意の $e \subset x$ について $2 \leq |e| < \omega$ ならば $f(e) \subset x$ を示せば十分である．$e = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ $(\alpha_1 < ... < \alpha_m,\ m < \omega)$ を固定する．$f(e)$ の並べ方を思い出すと，$f_k(e) \in x$ を全ての $k < \omega$ について確かめればよい．$n < \omega$ を $m = m_n$ かつ $k = k_n$ となるようにとる．また，$\alpha \in x \Rightarrow \alpha + 1 \in x$ より，$\alpha_{m+1}, ..., \alpha_n \in x$ を $\alpha_m < \alpha_{m+1} < ... < \alpha_n$ となるように選べる．このとき $f_k(e) = f_{k_n}(\{\alpha_1, ...\alpha_{m_n}\}) = F(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\})$ となるが，x は C_F の要素なので，$F(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}) \in x$ である． □

3　正規な超フィルターと超コンパクト基数

本節で定義される超コンパクト基数は巨大基数のうちの一つである．巨大基数という言葉の定義はないが, 一般には, 到達不可能基数であって, ある程度強い性質をもつ基数を指す.

定義 3.1. κ が非可算な正則基数でかつ任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対して $2^\lambda < \kappa$ が成り立つとき, κ を到達不可能基数とよぶ.

命題 3.2. κ が到達不可能基数であるならば V_κ は ZFC のモデルとなる.

定義 3.3. κ を非可算正則基数, $\lambda \geq \kappa$ を基数とする.
$\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターが存在するとき, κ を λ-超コンパクト基数という.

命題 3.4. $\lambda' \geq \lambda \geq \kappa$ とする.
κ が λ'-超コンパクト基数ならば κ は λ-超コンパクト基数となる.

定義 3.5. κ を非可算正則基数とする.
任意の基数 $\lambda \geq \kappa$ に対して κ が λ-超コンパクト基数となるとき, κ を超コンパクト基数と呼ぶ.

命題 3.6. κ が κ-超コンパクト基数ならば κ は到達不可能基数である．特に, 超コンパクト基数は到達不可能基数である.

証明. κ を κ-超コンパクト基数とする．この κ が任意の基数 $\lambda < \kappa$ に対して $2^\lambda < \kappa$ を満たすことを示せばよい．背理法で示す．ある基数 $\lambda < \kappa$ に対して $2^\lambda \geq \kappa$ が成り立つと仮定する．仮定より, κ から ${}^\lambda 2$ (λ から 2 への関数全体) への単射 F が存在する．κ は κ-超コンパクト基数なので, $\mathcal{P}_\kappa(\kappa)$ 上の正規な超フィルター U も存在する．そこで, $f : \lambda \to 2$ と $X_\alpha \in U$ $(\alpha < \lambda)$ を次のように定める:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \big(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) : F(\sup(x))(\alpha) = 1\} \in U\big) \\ 0 & \big(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) : F(\sup(x))(\alpha) = 0\} \in U\big) \end{cases}$$

$$X_\alpha = \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) : F(\sup(x))(\alpha) = f(\alpha)\}.$$

U は κ-完備なので, $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha \in U$．一方で,

$$\begin{aligned}\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha &= \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) : \forall\alpha \in \lambda,\ F(\sup(x))(\alpha) = f(\alpha)\} \\ &= \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) : F(\sup(x)) = f\}\end{aligned}$$

も成り立つ．ゆえに, もし $F(\beta) = f$ となる $\beta < \kappa$ が存在しなければ $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$ は空集合となり, そのような $\beta < \kappa$ が存在するとしても, F の単射性により,

$$\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha = \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\kappa) : \sup(x) = \beta\}$$

となる．したがって, どちらの場合にしても $\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha$ は U の要素でないので矛盾． $\square$

定義 3.7. U を $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターとする．このとき V の U による超べき $\mathrm{Ult}_U(V)$ を次のように構成する:

- $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ から V への関数全体を $f \sim g \iff \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f(x) = g(x)\} \in U$ で定めた同値関係 $\sim$ で割った商クラスを $M = \{[f] : f : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to V\}$ とおく．
- M 上の二項関係 $\in_U$ を $[f] \in_U [g] \iff \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f(x) \in g(x)\} \in U$ と定める．
- $(M, \in_U)$ は整礎的で集合的かつ外延的となるのでその推移的崩壊を $\mathrm{Ult}_U(V)$ と書く（表記を簡潔にするため, $\mathrm{Ult}_U(V)$ の各要素 $\pi([f])$ を改めて $[f]$ と書くことにする).

定理 3.8. (Łoś) U を $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の超フィルターとする．任意の $\{\in\}$-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ と任意の $[f_1], \dots, [f_n] \in \mathrm{Ult}_U(V)$ に対して,

$$\mathrm{Ult}_U(V) \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \varphi(f_1(x), ..., f_n(x))\} \in U.$$

定義 3.9. U を $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターとする．
クラス関数 $j_U : V \to \mathrm{Ult}_U(V)$ を $j_U(x) = [c_x]$ で定める（ただし c_x は $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ のすべての要素を x へ写す定数関数) とŁoś の定理よりこれは初等的埋め込みとなる．この j_U を U から定められる自然な初等的埋め込みという．

定義 3.10. M を推移的なクラス, $j : V \to M$ を恒等写像でない初等的埋め込みとする．このとき, $\alpha < j(\alpha)$ となる最小の順序数 α を j の臨界点といい, $\mathrm{crit}(j)$ と書く．

補題 3.11. λ を κ 以上の基数, U を $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターとし, U から定められる自然な初等的埋め込みを $j_U : V \to \mathrm{Ult}_U(V)$, $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の恒等写像を d とおく．このとき, d で表される $\mathrm{Ult}_U(V)$ の要素 $[d]$ は $j_U``\lambda$ に等しい．ゆえに, $U = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : j_V``\lambda \in j_U(X)\}$.

証明. ($[d] \supset j_U``\lambda$): $\gamma < \lambda$ を固定する．$\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \gamma \in x\} \in U$ となるから, Łoś の定理により $j_U(\gamma) \in [d]$.
($[d] \subset j_U``\lambda$): $[f] \in [d]$ をとる．$\{x : f(x) \in x\} \in U$ だから $\{x : f(x) = \gamma\}$ となる $\gamma < \lambda$ が存在する．よって $[f] = j_U(\gamma) \in j_U``\lambda$. $\square$

補題 3.12. U を $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルター, $\alpha \leq \lambda$ とする．

1. 任意の $[f] \in \mathrm{Ult}_U(V)$ に対して $[f] = (j_U f)(j_U``\lambda)$.
2. $f_\alpha(x) = \mathrm{otp}(x \cap \alpha)$ ($x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$, $\mathrm{otp}(a)$ は a の順序型を表す) と定めた関数 f_α に対して $\alpha = [f_\alpha]$ となる．

証明. (1): $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : (x, f(x)) \in f\} = \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \in U$ に注意するとŁośの定理により $([d],[f]) \in j_U f$ となる．よって $(j_U f)(j_U``\lambda) = (j_U f)([d]) = [f]$.
(2): $\alpha \le \lambda$ を固定する．

$$\begin{aligned}[f_\alpha] &= (j_U f_\alpha)(j_U``\lambda)\\ &= \mathrm{otp}[(j_U``\lambda) \cap j_U(\alpha)] \quad (j_U\text{が初等埋め込みであることから})\\ &= \mathrm{otp}\{j_U(\beta) : \beta < \alpha\}\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

□

補題 3.13. $\lambda \ge \kappa$ とする．次の二つの条件は同値である．

1. κ が λ-超コンパクト基数である．
2. ある初等的埋め込み $j : V \to M$ が存在して次を満たす．
   (a) 任意の $\gamma < \kappa$ に対して $j(\gamma) = \gamma$,
   (b) $j(\kappa) > \lambda$,
   (c) ${}^\lambda M \subset M$.

証明. $(1 \to 2)$: U を $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターとする．$\mathrm{Ult}_U(V)$ を M, 自然な初等的埋め込み $j_U : V \to \mathrm{Ult}_U(V)$ を j とおく．U は κ-完備だったから, (a) はあきらか．また, 任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ について $\mathrm{otp}(x \cap \lambda) < \kappa$ だから, 補題 3.12 の 2. とŁośの定理によって $\lambda = [f_\lambda] < j(\kappa)$ となり, (b) が示される．最後に, (c) を確かめる．$a_\alpha \in M$ $(\alpha < \lambda)$ ならば $\{a_\alpha : \alpha < \lambda\} \in M$ を示せば十分である．なぜなら, $S = \langle b_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ $(b_\alpha \in M, \alpha < \lambda)$ とすると $\langle \alpha, b_\alpha\rangle \in M$ $(\alpha < \lambda)$ となり, $S = \{\langle \alpha, b_\alpha\rangle : \alpha < \lambda\} \in M$ がわかるからである．$a_\alpha = [f_\alpha]$ となる f_α を各 $\alpha < \lambda$ ごとにとる．$\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の関数 f を $f(x) = \{f_\alpha(x) : \alpha \in x\}$ で定義する．

主張 3.14. $[f] = \{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$.
まず, $[f] \supset \{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$ を示す．$\alpha < \lambda$ とすると, $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \alpha \in x\} \in U$ なので $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \alpha \in x\} \subset \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f_\alpha(x) \in f(x)\} \in U$．だから $a_\alpha = [f_\alpha] \in [f]$．次に逆の包含関係を確かめる．$[g] \in [f]$ とすると $\{x : g(x) \in f(x)\} \in U$ であるが, 左辺の集合は $\{x : \exists\alpha \in x, g(x) = f_\alpha(x)\}$ に等しい．この集合を X とおき, 各 $x \in X$ に対して $g(x) = f_{\alpha(x)}(x)$ となる $\alpha(x) \in x$ をとってくると, U が正規な超フィルターであることから, ある γ を見つけて $\{x \in X : \alpha(x) = \gamma\} \in U$ とできる．$\{x \in X : \alpha(x) = \gamma\} \subset \{x : g(x) = f_\alpha(x)\} \in U$ より, $[g] = [f_\gamma] = a_\gamma$.(主張の証明終わり)
$(2 \to 1)$：$U = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : j``\lambda \in j(X)\}$ とする．

主張 3.15. U は $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターである．

U が超フィルターであることは簡単に確かめられる.

U が κ-完備であることを示す. $\mu<\kappa$, $X_\alpha \in U$ $(\alpha<\mu)$ とする. このとき $j``\lambda \in j(X_\alpha)$ となっている. $\mathcal{X} := \langle X_\alpha : \alpha<\mu \rangle$ とおくと,(a) と初等的埋め込みの性質から $j(\mathcal{X}) = \langle f(X_\alpha) : \alpha<\mu \rangle$ となる. よって, $j(\bigcap_{\alpha<\mu} X_\alpha) = j(\bigcap \mathrm{ran}\mathcal{X}) = \bigcap \mathrm{ran} j(\mathcal{X}) = \bigcap_{\alpha<\mu} j(X_\alpha) \ni j``\lambda$ となる. 以上から $\bigcap_{\alpha<\mu} X_\alpha \in U$.

次に U が fine measure になっていることを示す. U が κ-完備であることから, 任意の $\alpha<\lambda$ について $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \alpha \in x\} \in U$ となることを示せばよい. $X := \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \alpha \in x\}$ とおく. $V \models \forall x \subset \lambda\ (|x|<\kappa \wedge \alpha \in x \rightarrow x \in X)$ だから $M \models \forall x \subset j(\lambda)\ (|x|<j(\kappa) \wedge j(\alpha) \in x \rightarrow x \in j(X))$. また, $M \models j``\lambda \subset j(\lambda) \wedge |j``\lambda| < j(\kappa) \wedge j(\alpha) \in j``\lambda$. 二つをあわせて $j``\lambda \in j(X)$ を得る. よって $X \in U$.

最後に U が正規な超フィルターであることを示そう. $\{\mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f(x) \in x\} \in U$ とする. $j``\lambda \in j(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f(x) \in x\})$ なので $(jf)(j``\lambda) \in j``\lambda$ となる. よって, ある $\gamma<\lambda$ が存在して $(jf)(j``\lambda) = j(\gamma)$ とできる. これは $j``\lambda \in j(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f(x)=\gamma\})$ を意味する. よって $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : f(x)=\gamma\} \in U$. □

補題 3.16. $j : V \rightarrow M$ を補題 3.13 の条件を満たす初等的埋め込み, $U = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : j``\lambda \in j(X)\}$ とする（$U$ は $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルターになる）. $k : \mathrm{Ult}_U(V) \rightarrow M$ を $k([f]) = (jf)(j``\lambda)$ で定義する. このとき,

1. k は well-defined,
2. k は初等的埋め込み,
3. $j = k \circ j_U$,
4. 任意の $\alpha \le \lambda$ に対して $k(\alpha) = \alpha$,

となる.

証明. (1): $[f]=[g]$ とすると, $\{x : f(x)=g(x)\} \in U$ なので $j``\lambda \in j(\{x : f(x)=g(x)\})$ となる. よって, $(jf)(j``\lambda) = (jg)(j``\lambda)$.

(2): $\mathrm{Ult}_U(V) \models \varphi([f_1],...,[f_n])$ とする. Łoś の定理より $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \varphi(f_1(x),...,f_n(x))\} \in U$. よって $j``\lambda \in j(\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \varphi(f_1(x),...,f_n(x))\})$. 以上より $M \models \varphi((jf_1)(j``\lambda),...,(jf_n)(j``\lambda))$ がえられる.

(3): C_a を $C_a(x) = a$ $(x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda))$ となる関数とすると, $k \circ j_U(a) = [C_a] = (jC_a)(j``\lambda)$ となる. $j$ は初等的埋め込みだったから, $(jC_a)(j``\lambda) = j(a)$.

(4): $\alpha \le \lambda$ を固定する. $f_\alpha(x) = \mathrm{otp}(x \cap \alpha)$ とすると, $\alpha = [f_\alpha]$ であった. よって, $k(\alpha) = k([f_\alpha]) = (jf_\alpha)(j``\lambda) = \mathrm{otp}(j``\lambda \cap j(\alpha)) = \mathrm{otp}\{j(\beta) : \beta<\alpha\} = \alpha$. □

定理 3.17 (Laver)**.** κ を超コンパクト基数とする. このとき, 次の性質を満たす関数 $f : \kappa \rightarrow V_\kappa$ が存在する:

任意の $\lambda \geq \kappa$ と, 任意の $x \in H_{\lambda^+}$ に対して, $j_U(f)(\kappa) = x$ となるような $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の正規な超フィルター U が存在する.

この関数を Laver 関数という.

証明. $\varphi(\alpha, \lambda, f, x)$ を, "ある $\mathcal{P}_\alpha(\lambda)$ 上の正規な超フィルター U が存在して $j_U(f)(\alpha) = x$ を満たす" ということを表現している論理式とする. 再帰的に構成することによって, $f : \kappa \to V_\kappa$ として次を満たすようなものを一つ選ぶ ; 任意の $\alpha < \kappa$ に対して

- $\neg\varphi(\alpha, \lambda, f|\alpha, x)$ となるような α 以上 κ 未満の基数 λ と, $x \in H_{\lambda^+}$ が存在するときは, $f(\alpha) \in H_{\lambda_0^+}$ かつ $\neg\varphi(\alpha, \lambda_0, f|\alpha, f(\alpha))$ が成り立つ. ただし, $\lambda_0 = \min\{\lambda : \alpha \leq \lambda < \kappa \text{ and } \exists x \in H_{\lambda^+}\ \neg\varphi(\alpha, \lambda, f|\alpha, x)\}$ とする.
- それ以外の場合は $f(\alpha) = 0$ となる.

任意の $\lambda \geq \kappa$ と $x \in H_{\lambda^+}$ に対して $\varphi(\kappa, \lambda, f, x)$ が成り立つことを, 背理法で示す. 反例が存在すると仮定する. $\lambda_0 = \min\{\lambda : \lambda \geq \kappa \text{ and } \exists x \in H_{\lambda^+}\ \neg\varphi(\kappa, \lambda, f, x)\}$, ρ を λ_0 に対して十分大きな基数とする. 任意の $\alpha < \kappa$ に対して $j(\alpha) = \alpha$, $j(\kappa) > \rho$, ${}^\rho M \subset M$ となるような初等的埋め込み $j : V \to M$ をとる.

主張 3.18. 1. 任意の $\lambda \leq \lambda_0$ に対して $(H_{\lambda^+})^M = H_{\lambda^+}$.

2. 任意の κ 以上 λ_0 以下の基数 λ と, $x \in H_{\lambda^+}$ に対して, $\varphi^M(\alpha, \lambda, f, x) \Leftrightarrow \varphi(\alpha, \lambda, f, x)$.

(1): $(H_{\lambda^+})^M$ は次のように変形できる.

$$
\begin{aligned}
(H_{\lambda^+})^M &= \{x \in M : (|\mathrm{TC}(x)| \leq \lambda)^M\} \\
&= \{x \in M : |\mathrm{TC}(x)| \leq \lambda\} \quad ({}^\rho M \subset M \text{ より}) \\
&= H_{\lambda^+} \cap M.
\end{aligned}
$$

よって, $H_{\lambda^+} \subset M$ を示せば十分. $y \in H_{\lambda^+}$ とする. $y \subset M$ と $|y| \leq |\mathrm{TC}(y)| \leq \lambda \leq \lambda_0 < \rho$ から $y \in M$ となる.

(2) :λ と x を固定する. ${}^\rho M \subset M$ と $\lambda^{<\kappa} \leq \rho$ より,

$$\{U : U \text{ は } \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \text{ 上の 正規な超フィルター }\}^M = \{U : U \text{ は } \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \text{ 上の 正規な超フィルター }\}.$$

$\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上の任意の正規な超フィルター U に対して $j_U(f) = {j_U}^M(f)$ を示せばよい. ここで, $j_U(f) = [C_f]$, ${j_U}^M(f) = [C_f]^M$, $C_f(x) = f$ $(x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda))$ に注意すると, 任意の $g : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to M$ に対して $[g] = [g]^M$ を示せばよいことがわかる. これを $\in^*$ に関する帰納法で証明しよう. ただし $g \in^* g' \Leftrightarrow \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : g(x) \in g'(x)\} \in U$ である. $g : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to M$ を一つ固定する. まず $[g] \supset [g]^M$ を示す. $h : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to M$, $[h]^M \in [g]^M$ とすると, $M \models [h] \in [g]$ である. よって, $M \models \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : h(x) \in g(x)\} \in U$ となるが, これは $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : h(x) \in g(x)\} \in U$ を意味する. したがって $h \in^* g$. 帰納法の

仮定を使って $[h]^M = [h] \in [g]$ を得る．逆の包含関係を示そう．$h : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to V$, $[h] \in [g]$ とする．このとき $\{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : h(x) \in g(x)\} \in U$. 関数 $h' : \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \to M$ を,

$$h'(x) = \begin{cases} h(x) & (h(x) \in g(x)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義する．すると, $[h'] = [h] \in [g]$ だから, $[h']^M \in [g]^M$ が導かれる．ところが, 帰納法の仮定により $[h']^M = [h'] = [h]$ だから, $[h] \in [g]^M$. (主張の証明終わり)

主張 3.19. $(jf)(\kappa) \in H_{\lambda_0^+}$ かつ $\neg\varphi(\kappa, \lambda_0, f, (jf)(\kappa))$.
f の定義と j が初等的埋め込みであることから, M で次が成り立つ.

> “もし $\neg\varphi(\kappa, \lambda, (jf)|\kappa, x)$ を満たす, $\kappa \leq \lambda < j(\kappa)$ なる λ と $x \in H_{\lambda^+}$ が存在するならば, $\lambda_1 = \min\{\lambda : \kappa \leq \lambda < j(\kappa) \text{ and } \exists x \in H_{\lambda^+}\ \neg\varphi(\kappa, \lambda, (jf)|\kappa, x)\}$ とおいたとき, $(jf)(\kappa) \in H_{\lambda_1^+}$ かつ $\neg\varphi(\kappa, \lambda_1, (jf)|\kappa, (jf)(\kappa))$ が成り立つ. ”

(次のことに注意せよ : $f(\alpha) \in V_\kappa$ だから $j(f(\alpha)) = f(\alpha)$ となる．一方 $j(f(\alpha)) = (jf)(j(\alpha)) = (jf)(\alpha)$. よって, 任意の $\alpha < \kappa$ に対して $(jf)(\alpha) = f(\alpha)$. つまり, $(jf)|\kappa = f$.)
一方, 一つ目の主張と背理法の仮定より, M で次が成り立つ.

> “$\neg\varphi(\kappa, \lambda, f, x)$ を満たす $\kappa \leq \lambda < j(\kappa)$ なる λ と $x \in H_{\lambda^+}$ が存在し, かつ $\lambda_0 = \min\{\lambda : \kappa \leq \lambda < j(\kappa) \text{ and } \exists x \in H_{\lambda^+}\ \neg\varphi(\kappa, \lambda, f, x)\}$ となる.”

よって, $M \models (jf)(\kappa) \in H_{\lambda_0^+} \wedge \neg\varphi(\kappa, \lambda_0, f, (jf)(\kappa))$. 一つ目の主張より V で同じ論理式が成り立つ. (主張の証明終わり)
$U = \{X \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda_0) : j``\lambda_0 \in j(X)\}$ とおく ($U$ は $\mathcal{P}_\kappa(\lambda_0)$ 上の正規な超フィルターになる)．初等的埋め込み $k : \mathrm{Ult}_U(V) \to M$ を $[f] \mapsto (jf)(j``\lambda_0)$ で定義する．このとき補題 3.16 より, $k \circ j_U = j$ と $k(\alpha) = \alpha$ $(\alpha \leq \lambda_0)$ が成り立つ. $(jf)(\kappa) \in H_{\lambda_0^+} \subset \mathrm{Ult}_U(V)$ かつ $\kappa \leq \lambda_0$ だから, $k((jf)(\kappa)) = (jf)(\kappa)$ と $k(\kappa) = \kappa$ が成り立つ．よって, $k(j_U(f)(\kappa)) = [(k \circ j_U)(f)](k(\kappa)) = (jf)(\kappa) = k((jf)(\kappa))$. k は単射だったから, $j_U(f)(\kappa) = (jf)(\kappa)$. これは二つ目の主張に矛盾する. □

4 半順序と強制法

ここでは記述の簡便性のために, 最大元 1 を持つ半順序のみを扱うことにし, 半順序であることの条件に最大元が存在することを追加することにする.

定義 4.1. P を半順序とする.

- $A \subset P$ が反鎖 $:\Leftrightarrow \forall p, q \in A\ (p \neq q \Rightarrow p \perp q)$.
- $D \subset P$ が稠密 $:\Leftrightarrow \forall p \in P,\ \exists q \in D\ (q \leq p)$.
- $D \subset P$ が p の下で稠密 $:\Leftrightarrow \forall q \leq p,\ \exists r \in D\ (r \leq q)$.
- $D \subset P$ が前稠密 $:\Leftrightarrow \forall p \in P,\ \exists q \in D\ (q \parallel p)$.
- $D \subset P$ が p の下で前稠密 $:\Leftrightarrow \forall q \leq p,\ \exists r \in D\ (r \parallel q)$.

定義 4.2. P を半順序とする. 各順序数 α に対して V_α^P を次のように再帰的に定める:

- $V_0^P = \emptyset$.
- $V_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}(V_\alpha^P \times P)$.
- $V_\alpha^P = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^P$ (α が極限順序数のとき).

$V^P := \bigcup_{\alpha:\text{順序数}} V_\alpha^P$ と定める. このとき, クラス V^P の要素を P-名称 (または単に, 名称) とよび, P-名称はドットを付けて $\dot{x}$ などと表す.

定義 4.3. P を半順序, $p \in P$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を論理式, $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in V^P$ とする. このとき, 強制関係 $p \Vdash_P \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ を次のように再帰的に定める:
まず,

$$(\dot{a}_1, \dot{a}_2) R (\dot{b}_1, \dot{b}_2) \ \Leftrightarrow\ \dot{a}_1 \in \mathrm{dom}(\dot{b}_1) \text{ かつ } \dot{a}_2 \in \mathrm{dom}(\dot{b}_2)$$

で定めた $V^P \times V^P$ 上の二項関係 R は整礎的かつ集合的であることから, $p \Vdash_P \dot{a}_1 = \dot{a}_2$ を R に関する再帰法で次のように定める:

- $\dot{a}_1 \subset_p \dot{a}_2 \ \Leftrightarrow$ 任意の $(\dot{b}_1, s_1) \in \dot{a}_1$ に対して, $\{q \in P : q \leq s_1 \ \Rightarrow\ \exists (\dot{b}_2, s_2) \in \dot{a}_2,\ (q \leq s_2,\ q \Vdash_P \dot{b}_1 = \dot{b}_2)\}$ が p の下で稠密.
- $p \Vdash_P \dot{a}_1 = \dot{a}_2 \ \Leftrightarrow\ \dot{a}_1 \subset_p \dot{a}_2$ かつ $\dot{a}_2 \subset_p \dot{a}_1$.

残りの場合は次のように定める:

- $p \Vdash_P \dot{a}_1 \in \dot{a}_2 \ \Leftrightarrow\ \{q \in P : \exists (\dot{b}_2, s_2) \in \dot{a}_2,\ (q \leq s_2,\ q \Vdash_P \dot{a}_1 = \dot{b}_2)\}$ が p の下で稠密.
- $p \Vdash_P (\varphi \wedge \psi)(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n) \ \Leftrightarrow\ p \Vdash_P \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ かつ $p \Vdash_P \psi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$.
- $p \Vdash_P \neg\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n) \ \Leftrightarrow$ 任意の $q \leq p$ に対して, $q \nVdash_P \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$.
- $p \Vdash_P \exists x \varphi(x, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n) \ \Leftrightarrow\ \{q \in P : \exists \dot{b} \in V^P,\ q \Vdash \varphi(\dot{b}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)\}$ が p の下で稠密.

$1 \Vdash_P \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ のときは単に $\Vdash_P \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ と書いたり, V^P をモデルのようにみて, $V^P \models \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ と書くこともある.

定理 4.4. P を半順序とする. このとき, 任意の $\varphi \in \mathrm{ZFC}$ に対して, $\Vdash_P \varphi$.

V はクラス $\{x : x = x\}$ のことと定めていたが, 以下では強制法での慣習に従い, V は (ある固定した)ZFC の可算な推移的モデルを表すことにする.

定義 4.5. G を半順序 P 上のフィルターとする. V 上の P の任意の稠密部分集合 $D \in V$ に対して $G \cap D \neq \emptyset$ が成り立つとき, G は V 上 P-generic であるという.

命題 4.6. 半順序 P と $p \in P$ に対して, p を含む V 上 P-generic なフィルターが存在する.

定義 4.7. $P \in V$ を半順序, G を V 上 P-generic なフィルターとする.

- 各 $\dot{x} \in V^P$ に対して, $\dot{x}^G$ を再帰的に $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G : \exists p \in G,\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$ と定める.
- $V[G] := \{\dot{x}^G : \dot{x} \in V$ は P-名称 $\}$ は P による強制拡大という (この $V[G]$ は推移的).

定義 4.8. 半順序 P に対して, チェック作用素と呼ばれる写像 $\check{}: V \to V^P$ を次のように再帰的に定める:

$$\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}.$$

チャック作用素の記号 $\check{}$ は混乱が生じない限りにおいて省略される場合がある.

命題 4.9. $P \in V$ を半順序, G を V 上 P-generic なフィルターとする. このとき, $x \in V$ ならば $\check{x}^G = x$. 特に, $V \subset V[G]$.

定義 4.10. 半順序 P に対して, P-名称 $\dot{G} := \{(\check{p}, p) : p \in P\}$ を P-generic なフィルターの標準名称とよぶ.

命題 4.11. $P \in V$ を半順序, G を V 上 P-generic なフィルターとする. このとき, $\dot{G}^G = G$. 特に, $G \in V[G]$.

定理 4.12. $P \in V$ を半順序, G を P 上 V-generic なフィルターとする. 任意の論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と任意の $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in V^P$ に対して, 次の 2 つは同値である:

1. ある $p \in G$ が存在して, $V \models$ "$p \Vdash_P \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$".
2. $V[G] \models \varphi(\dot{a}_1^G, \ldots, \dot{a}_n^G)$.

特に, $V[G]$ は ZFC の推移的なモデルとなる.

定義 4.13. κ を基数, P を半順序とする.

- 任意の基数 $\lambda \geq \kappa$ に対して $\Vdash_P$"λ は基数" が成り立つとき, P は κ 以上の基数を保存するという.
- 任意の基数 $\lambda \leq \kappa$ に対して $\Vdash_P$"λ は基数" が成り立つとき, P は κ 以下の基数を保存するという.

定義 4.14. κ を基数, P を半順序とする．P のすべての反鎖の濃度が κ 未満となるとき, P は κ-c.c. を満たすという．特に, ω_1-c.c. を満たすときは c.c.c. を満たすという．

定義 4.15. κ を基数, P を半順序とする．P の要素からなる長さ κ 未満の任意の下降列が下界を持つとき, P は κ-closed であるという．特に, ω_1-closed であるときは countably closed であるという．

命題 4.16. κ を基数, P を半順序とする．

- κ が正則基数でかつ P が κ-c.c. を満たすならば, P は κ 以上の基数を保存する．
- P が κ-closed であるならば, P は κ 以下の基数を保存する．

定義 4.17. P を半順序, $\dot{Q}$ を V^P のある半順序の名称とする．半順序 $P * \dot{Q}$ を次のように定める:

1. $P * \dot{Q} := \{(p, \dot{q}) : p \in P \text{ and } \Vdash_P \dot{q} \in \dot{Q}\}$
2. $(p_1, \dot{q}_1) \leq (p_2, \dot{q}_2) :\Leftrightarrow p_1 \leq p_2$ and $p_1 \Vdash \dot{q}_1 \leq \dot{q}_2$.

定理 4.18.

1. G を V 上 P-generic なフィルター，$Q = \dot{Q}^G$，H を $V[G]$ 上 Q-generic なフィルターとする．このとき, $G * H := \{(p, \dot{q}) \in P * \dot{Q} : p \in G \text{ and } \dot{q}^G \in H\}$ は V 上 $P * \dot{Q}$-generic なフィルターで $V[G * H] = V[G][H]$ となる．
2. K を V 上の $P * \dot{Q}$-generic なフィルターとする．このとき, $G := \{p \in P : \exists \dot{q}\ (p, \dot{q}) \in K\}$ は V 上 P-generic, $H := \{\dot{q}^G : \exists p\ (p, \dot{q}) \in K\}$ は $V[G]$ 上 $\dot{Q}^G$-generic，$K = G * H$ となる．

証明. (1): $D \in V$ を稠密な $P * Q$ の部分集合とする．$D \cap (G * H) \neq \emptyset$ を示せばよい．

主張 4.19. $V[G]$ において $D_1 := \{\dot{q}^G : \exists p \in G\ (p, q) \in D\}$ が Q で稠密.

V の中で考える．仮定より任意の $\dot{q}_0$ について $\{p \in P : \exists \dot{q}_1\ p \Vdash \dot{q}_1 \leq \dot{q}_0 \text{ and } (p, \dot{q}_1) \in D\}$ は P で稠密になる．（主張の証明終わり）

主張より $D_1 \cap H \neq \emptyset$．よって $D \cap (G * H) \neq \emptyset$.

(2): $D \in V$ を P の稠密部分集合とする．このとき, $D_1 := \{(p, \dot{q}) : p \in D\}$ は $P * \dot{Q}$ で稠密になる．よって $D_1 \cap K \neq \emptyset$，すなわち $G \cap D \neq \emptyset$ となり, G は V 上 P-generic である．

次に $D \in V[G]$ を $\dot{Q}^G$ の稠密部分集合とする．すると，ある $\dot{D} \in V^P$ があって，$D = \dot{D}^G$ かつ $\Vdash$ "$\dot{D}$ は $\dot{Q}$ で稠密" が成り立つ．D_2 を $\{(p, \dot{q}) \in P * \dot{Q} : p \Vdash \dot{q} \in \dot{D}\}$ とおくと, D_2 は $P * \dot{Q}$ で稠密になる．よって $D_2 \cap K \neq \emptyset$ なので, その一つの要素を取って $(p, \dot{q})$ とする．このとき $p \in G$, $\dot{q}^G \in H$, $p \Vdash \dot{q} \in \dot{D}$ である．これらより $\dot{q}^G \in \dot{D}^G = D$ となる．以上より, $D \cap H \neq \emptyset$ が導かれる．よって, H は $V[G]$ 上 $\dot{Q}^G$-generic である． □

定義 4.20. P_β $(\beta \le \alpha)$ を半順序, $\dot{Q}_\beta \in V^{P_\beta}$, $\Vdash_{P_\beta}$ "$\dot{Q}$ は半順序" $(\beta < \alpha)$ とする. $\langle\langle P_\beta : \beta \le \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle$ が次の条件を満たすとき, 反復強制法という ;

1. 任意の $\beta \le \alpha$ に対して, P_β は長さ β の列の集合であり, $P_\beta = \{p|\beta : p \in P_\alpha\}$.
2. 各 $\beta \le \alpha$ について,
   (a) ($\beta = 1$ のとき)
      - $p \in P_1 \Leftrightarrow p(0) \in Q_0$,
      - $p \le_{P_1} q \Leftrightarrow p(0) \le_{Q_0} q(0)$,

   (b) ($\beta = \gamma + 1$ のとき)
      - $p \in P_\beta \Leftrightarrow p|\gamma \in P_\gamma$ かつ $\Vdash_{P_\gamma}$ "$p(\gamma) \in \dot{Q}_\gamma$",
      - $p \le_{P_\beta} q \Leftrightarrow p|\gamma \le_{P_\gamma} q|\gamma$ かつ $p|\gamma \Vdash_{P_\gamma}$ "$p(\gamma) \le_{Q_\gamma} q(\gamma)$",

   (c) (β が極限順序数のとき)
      - 長さ β の列 $\langle \dot{1}, \dot{1}, ...\rangle$ が P_β に属しており,
      - $\gamma < \beta$, $p \in P_\beta$, $q \in P_\gamma$, $q \le_{P_\gamma} p|\gamma$ ならば $q \cup p|[\gamma, \beta) \in P_\beta$,
      - $p \le_{P_\beta} q \Leftrightarrow$ 任意の $\gamma < \beta$ について $p|\gamma \le_{P_\gamma} q|\gamma$.

定義 4.21. 定義 4.20 と同じ前提を仮定する.

1. 各 $p \in P_\alpha$ について p の台を $\mathrm{supt}(p) := \{\beta < \alpha :\ \neg \Vdash_\beta$ "$p(\beta) = \dot{1}_\beta$"$\}$ で定義する.
2. I を, α の全ての有限集合を含むような, α 上のイデアルとする. 反復強制法 $\langle\langle P_\beta : \beta \le \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle$ が, 任意の極限順序数 $\beta \le \alpha$ と長さ β の任意の列 p について, 次の条件を満たすとき, I-台の反復強制法という; $p \in P_\beta \Leftrightarrow$ 任意の $\gamma < \beta$ に対して $p|\gamma \in P_\beta$ かつ $\mathrm{supt}(p) \in I$.
3. とくに, $I := \{x \subset \alpha : x$ は有限集合 $\}$ のとき, 有限台の反復強制法という.
4. また, $I := \{x \subset \alpha : x$ は可算集合 $\}$ のとき, 可算台の反復強制法という.

定義 4.22. $\langle\langle P_\beta : \beta \le \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle$ を反復強制法, $\beta \le \alpha$ を極限順序数とする.

1. 任意の長さ β の列 p に対して次の条件を満たすとき, P_β を順極限という; $p \in P_\beta \Leftrightarrow$ ある $\gamma < \beta$ が存在して $p|\gamma \in P_\gamma$, かつ,$\gamma \le \forall \xi < \beta\ [p(\xi) = 1]$.
2. 任意の長さ β の列 p に対して次の条件を満たすとき, P_β を逆極限という; $p \in P_\beta \Leftrightarrow$ 任意の $\gamma < \beta$ に対して, $p|\gamma \in P_\gamma$.

例 4.23. $\langle\langle P_\beta : \beta \le \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle$ を可算台を持つ反復強制法, $\beta \le \alpha$ を極限順序数とする. このとき, $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$ ならば P_β は順極限, $\mathrm{cf}(\beta) = \omega$ ならば P_β は逆極限になる.

定理 4.24. κ を非可算正則基数, $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, $\langle\langle P_\beta : \beta \le \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle$ を反復強制法とする.

さらに, 任意の $\beta < \alpha$ について P_β は κ-c.c. を満たし, P_α は順極限だとする. $\mathrm{cf}(\alpha) \neq \kappa$ であるか, $\{\beta < \alpha :\ P_\beta$ は順極限 $\}$ が定常集合であるかのどちらかが成り立つとき, P_α は κ-c.c. を満たす.

証明. 濃度 κ の $W \subset P_\alpha$ を任意に取る. W が P_α の反鎖でないことを示せばよい. $W = \{p_\xi :\ \xi < \kappa\}$ とおく.

($\mathrm{cf}(\alpha) \neq \kappa$ のとき): P_α が順極限であることに注意する. まず, $Z := \{p \in W : \mathrm{supt}(p) \subset \beta\}$ の濃度が κ になるような $\beta < \alpha$ が取れることを示そう. そのような $\beta < \alpha$ が存在しないとする. $\mathrm{cf}(\alpha) > \kappa$ を仮定する. 各 $\xi < \kappa$ について $\mathrm{supt}(p_\xi) \subset \beta_\xi$ になるような $\beta_\xi < \alpha$ をとる. $\beta := \sup_{\xi<\kappa} \beta_\xi$ とおく. このとき任意の $\xi < \kappa$ について $\mathrm{supt}(p_\xi) \subset \beta$ となるので矛盾. $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa$ を仮定する. $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ を共終的な写像とする. λ_ξ ($\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$) を $\{p \in W : \mathrm{supt}(p) \subset f(\xi)\}$ の濃度とする. このとき, $\kappa = |W| = |\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} \{p \in W : \mathrm{supt}(p) \subset f(\xi)\}| \leq \mathrm{cf}(\alpha) \cdot \sup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} \lambda_\xi$. 一方 $\mathrm{cf}(\alpha), \sup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} \lambda_\xi < \kappa$ だから, 矛盾. 以上で β の存在が示された. $\{p|\beta : p \in Z\} \subset P_\beta$ かつ P_β が κ-c.c. を満たすので, $p, q \in Z$ を $p \neq q$, $p|\beta \parallel_{P_\beta} q|\beta$ となるように取れる. このとき, $\mathrm{supt}(p), \mathrm{supt}(q) \subset \beta$ に注意すると, $p \parallel_{P_\alpha} q$ となる. よって, W は P_α の反鎖ではない.

($\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$ のとき): $\langle \alpha_\xi : \xi < \kappa \rangle$ を順序数の連続的な上昇列で, $\sup_{\xi<\kappa} \alpha_\xi = \alpha$ となるようなものとする. $C := \{\eta < \kappa :\ \forall \xi < \eta,\ \mathrm{supt}(p_\xi) \subset \alpha_\eta\}$, $S := \{\eta < \kappa :\ P_{\alpha_\eta}$ は順極限, η は極限順序数 $\}$ とおく. このとき, P_α が順極限であることと, α_ξ のとり方より, C は κ の club になる. また, $\{\beta < \alpha : P_\beta$ は順極限 $\}$ が α の定常集合であることと, C' が κ の club ならば $\{\alpha_\eta : \eta \in C'\}$ は α の club になることから, S は κ の定常集合になる. よって $S \cap C$ も定常集合である. さらに, 任意の $\xi \in C \cap S$ に対して, $\mathrm{supt}(p_\xi) \cap \alpha_\xi \subset \alpha_{\gamma(\xi)}$ となるような $\gamma(\xi) < \xi$ が存在する. Fodor の定理により, 定常集合 $S' \subset C \cap S$ と $\gamma < \kappa$ が存在して, 任意の $\xi \in S'$ について $\gamma < \xi$ と $\mathrm{supt}(p_\xi) < \alpha_\xi$ と $\alpha_\xi \subset \alpha_\gamma$ を満たす. $\{p_\xi|\alpha_\gamma :\ \xi \in S'\} \subset P_{\alpha_\gamma}$ と P_{α_γ} が κ-c.c. であることより, $\xi < \eta$ となる $\xi, \eta \in S'$ が存在して $p_\xi|\alpha_\xi \parallel_{P_{\alpha_\gamma}} p_\eta|\alpha_\gamma$ を満たす. $q \in P_\alpha$ を, $p_\xi|\alpha_\xi$ と $p_\eta|\alpha_\gamma$ の下界としよう. 今, ξ, η のとり方によって, 次が成り立っている.

- $\alpha_\gamma < \alpha_\xi < \alpha_\eta$,
- $q \leq p_\xi|\alpha_\gamma$, $q \leq p_\eta|\alpha_\gamma$,
- $\mathrm{supt}(p_\xi) \cap \alpha_\xi \subset \alpha_\gamma$, $\mathrm{supt}(p_\eta) \cap \alpha_\eta \subset \alpha_\gamma$,
- $\mathrm{supt}(p_\xi) \subset \alpha_\eta$.

このことより $r = q \cup (p_\xi|[\alpha_\gamma, \alpha_\eta)) \cup (p_\eta|[\alpha_\eta, \alpha))$ とおけば, $r \in P_\alpha$ と $r \leq p_\xi$, p_η が成り立つ. よって $p_\xi \parallel_{P_\alpha} p_\eta$ である. 以上より, W は反鎖ではないことがわかる. □

系 4.25. κ を ω_1 より大きい正則基数, $\langle \langle P_\beta : \beta \leq \alpha \rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha \rangle \rangle$ を可算台を持つ反復強制法, 各 $\alpha < \kappa$ について P_α は κ-c.c. を満たすとする. このとき, P_κ は κ-c.c. を満たす.

証明. $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ より, P_κ は順極限である. $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1\}$ が定常集合であることと, 任意の $\alpha < \kappa$ について, $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1$ ならば P_α が順極限になることから, $\{\alpha < \kappa :\ P_\alpha$ は順極限 $\}$ は定常集合になる. よって, 定理 4.24 より P_κ は κ-c.c. を満たす. □

5 Proper な強制法

定義 5.1. P を半順序とする. 任意の非可算基数 λ と, $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の任意の定常集合 S に対して $\Vdash_P$ "S は $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の定常集合." が成り立つとき, P は proper であるという.

補題 5.2. P を proper な半順序, G を V 上 P-generic なフィルターとする.
$X \in V[G]$, (X は順序数からなる可算集合$)^{V[G]}$ ならば, ある $Y \in V$ が存在して (Y は可算集合$)^V$ かつ $(X \subset Y)^{V[G]}$ となる.

証明. $(X \subset \lambda)^{V[G]}$ となるような V で非可算な λ をとる. $((\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda))^V$ が $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の定常集合 $)^{V[G]}$ と, $(\{Y \in \mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda) : X \subset Y\}$ は club.$)^{V[G]}$ が成り立つ. よってある $Y \in (\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda))^V$ が存在して, $(X \subset Y)^{V[G]}$ となる.

□

系 5.3. proper な半順序は ω_1 を保つ (つまり, $\Vdash \check{\omega}_1 = \omega_1$).

証明. 補題 5.2 よりわかる. □

命題 5.4. c.c.c. を満たす半順序は proper である.

証明. c.c.c. を満たす P と λ を固定する. $p \Vdash_P$ "$\dot{C}$ は $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の club. " を仮定する. $p \Vdash$ "$D \subset \dot{C}$ " となるような $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の club D を見つければ十分である. 定理 2.22 より, $p \Vdash$ "$[\dot{F} : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda] \wedge C_{\dot{F}} \subset \dot{C}$ " となるような $\dot{F} \in V^P$ をとる. $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ を $f(e) = \{\alpha \in \lambda : \exists q \leq p\ q \Vdash \dot{F}(e) = \alpha\}$ で定義する. この右辺は, P が c.c.c. を満たすことより可算集合となる. $D = C_f$ としよう.

主張 5.5. $p \Vdash$ "$D \subset C_{\dot{F}}$ $(\subset \dot{C})$".
任意に $x \in D$ と $e \in [x]^{<\omega}$ をとる. このとき, $p \Vdash$ "$\dot{F}(e) \in f(e) \subset x$" なので, $p \Vdash$ "$\dot{F}(e) \in x$". よって $p \Vdash$ "$\forall x \in D\ \forall e \in [x]^{<\omega}\ (\dot{F}(e) \in x)$" となる. (主張の証明終わり) □

命題 5.6. countably closed な半順序 P は proper.

証明. λ を非可算基数, S を $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の定常集合とする. $p \Vdash$ "$\dot{F} : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$" を仮定する. 適当な $q \leq p$ と $x \in S$ を見つけて, 任意の $e \in [x]^{<\omega}$ に対して $q \Vdash$ "$\dot{F}(e) \in x$" となることを示せば十分である（なぜなら, これから $\Vdash_P$ "$\forall F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda,\ S \cap C_F \neq \emptyset$" が導かれるから）. 正則基数 $\kappa \geq \lambda$ を, 十分大きくとって固定する. club C を次の集合とする ;

$$\{M \in \mathcal{P}_{\omega_1}(H_\kappa) : M \prec (H_\kappa, \in, ...)\}.$$

定理 2.19 より, S^{H_κ} は $\mathcal{P}_{\omega_1}(H_\kappa)$ の定常集合になる．よって, $M\cap\lambda\in S$ となるような $M\in C$ が存在する．$x:=M\cap\lambda$ とする．$[x]^{<\omega}=\{e_n : n<\omega\}$ とおく．ここで $e_n\in M$ に注意する．$p_n\in P\cap M$ と $\alpha_n\in x$ $(n<\omega)$ を次を満たすように再帰的にとる；

1. $p\geq p_0\geq p_1\geq ...$,
2. $p_n\Vdash$ "$\dot{F}(e_n)=\alpha_n$".

q を $\{p_n\}$ の下界とする．このような q は, P が countably closed なので, 必ず存在する．このとき, 任意の $n<\omega$ について, $q\Vdash$ "$\dot{F}(e_n)=\alpha_n\in x$"となる．よって, 任意の $e\in[x]^{<\omega}$ に対して, $q\Vdash$ "$\dot{F}(e)\in x$" が成り立つ. □

定義 5.7. P を半順序, $M\prec(H_\lambda,\in,...)$, $q\in P$ とする．任意の P の極大な反鎖 $A\in M$ に対して, $A\cap M$ が q の下で前稠密になるとき, q は (M,P)-generic であるという.

補題 5.8. P を半順序とする．次は同値;

1. P は proper である.
2. 任意の十分大きな λ に対して, $\{M\prec(H_\lambda,\in,...) : |M|\leq\omega,\ \forall p\in M\cap P\ \exists q\leq p\ \ (q$ は (M,P) -generic$)\}$ は $\mathcal{P}_{\omega_1}(H_\lambda)$ の club を含む.

証明. $(1\rightarrow 2)$: P は proper, λ は十分大きいとする．背理法で示す．$\{M\prec(H_\lambda,\in,...) : |M|\leq\omega,\ \exists p\in M\cap P\ \forall q\leq p\ \ (q$ は (M,P)-generic でない$)\}$ が定常集合だと仮定する．補題 2.10 によって, $\{M\prec(H_\lambda,\in,...) : |M|\leq\omega,\ \forall q\leq p\ \ (q$ は (M,P)-generic でない$)\}$ が定常集合になるような $q\in P$ をとれる．この定常集合を S とおく．P が proper だったから, $\Vdash$ "S は定常集合."．$\dot{f}$ を次を満たすようにとる;

- 任意の P の極大な反鎖 A に対して $\Vdash$ "$\dot{f}(A)\in A\cap\dot{G}$",
- $\Vdash$ "$\dot{f}:(H_\lambda)^V\rightarrow(H_\lambda)^V$".

このとき, $\Vdash$ "$C_{\dot{f}}\cap S\neq\emptyset$" となる．$q\leq p$ と $M\in S$ を, $q\Vdash$ "M は$\dot{f}$ で閉じている" となるようにとる.

主張 5.9. q は (M,P)-generic.

P の極大な反鎖 $A\in M$ と $r\leq q$ を固定する．$\dot{f}$ と q, M のとり方により, $q\Vdash$ "$\dot{f}(A)\in(A\cap\dot{G})\cap M$". これから $r\Vdash$ "$\dot{f}(A)\in(A\cap M)\cap\dot{G}$ かつ $r\in\dot{G}$" がわかる．よって $r\Vdash$ "$\exists s\in A\cap M\ (s\parallel r)$"．だから, $s\in A\cap M$ で $s\parallel r$ となるものが取れる．これは $A\cap M$ が q の下で前稠密であることを意味する．（主張の証明終わり）

この主張は $M\in S$ であることと矛盾する.

$(2 \to 1)$: λ を非可算基数, S を $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の定常集合とする. $\Vdash$ "S は $\mathcal{P}_{\omega_1}(\lambda)$ の定常集合" を示したい. $p \Vdash$ "$\dot{F} : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$" となるような $p \in P$ をとる. $q \Vdash$ "x は $\dot{F}$ で閉じている" を満たす $q \leq p$ と $x \in S$ を見つければ十分である. $\mu \geq \lambda$ を十分大きな基数とする. 仮定より, $C \subset \{M \prec (H_\lambda, \in, ...) : |M| \leq \omega,\ \forall p' \in M \cap P\ \exists q \leq p' \ \ (q \text{ は } (M, P) \text{ -generic})\}$ となるような club C が存在する. ここで任意の $M \in C$ に対して $p, \dot{F} \in M$ としてよい. $C|\lambda$ が club をふくむことより, $M \cap \lambda \in S$ となるような $M \in C$ がとれる. その M に対して, (M, P)-generic な $q \leq p$ をとる.

主張 5.10. $q \Vdash$ "$M \cap \lambda$ は $\dot{F}$ で閉じている."

$e \in [M \cap \lambda]^{<\omega}$ を固定する. $q \Vdash$ "$\dot{F}(e) \in M$" を示したい. $r \leq q$ と $\alpha < \lambda$ に対して, $r \Vdash$ "$\dot{F}(e) = \alpha$" を仮定する. $\alpha \in M$ となることを示せば十分である. $A \in M$ を次の条件を満たすようにとる;

- A は p の下で極大な反鎖,
- 任意の $s \in A$ に対して $\beta < \lambda$ が存在して $s \Vdash$ "$\dot{F}(e) = \beta$".

このとき $A \cap M$ は q の下で前稠密になる. $r \leq q$ より, r と両立する $s \in A \cap M$ が存在する. $s \in A$ だから, $s \Vdash$ "$\dot{F}(e) = \beta$" を満たす $\beta < \lambda$ が存在する. ゆえに, r と s の両立性より $s \Vdash$ "$\dot{F}(e) = \alpha$" かつ, $s, \dot{F}, e \in M$ となる. よって $\alpha \in M$. (主張の証明終わり) □

系 5.11. P を半順序とする. 次は同値になる ;

1. P は proper.
2. 任意の, 十分大きな λ, 可算な $M \prec (H_\lambda, \in, \lhd, ...)$ ($\lhd$ は H_λ の整列順序) と, $p \in P \cap M$ に対して, (M, P)-generic な $q \leq p$ が存在する.

証明. $(2 \to 1)$: 補題 5.8 より明らか.

$(1 \to 2)$: μ を十分大きな基数とし, λ を μ に対して十分大きな基数とする. 補題 5.8 によって, C_F が $\{N \prec H_\mu : |N| \leq \omega,\ \forall p \in N \cap P\ \exists q \leq p \ \ (q \text{ は } (N, P) \text{ -generic})\}$ に含まれるような $F : [H_\mu]^{<\omega} \to H_\mu$ で, $\lhd$ について最小な $F \in H_\lambda$ をとれる. $M \prec H_\lambda$ とすると, $M \cap H_\mu \in C_F$. よって, 任意の $p \in P \cap M \cap H_\mu$ $(= P \cap M)$ に対して $(M \cap H_\mu, P)$-generic な $q \leq p$ が存在する. この q は (M, P)-generic である. □

補題 5.12. P を半順序, θ を十分大きな正則基数, $\dot{x} \in V^P$ とする.

1. $\dot{x} \in H_\theta$ ならば $\Vdash_P$ "$\dot{x} \in H_\theta$".
2. $p \in P$, $p \Vdash$ "$\dot{x} \in H_\theta$" とする. このとき $\dot{y} \in H_\theta$ かつ $p \Vdash$ "$\dot{x} = \dot{y}$" となるような $\dot{y} \in V^P$ が存在する.

証明. (1): $\dot{x}$ のランクについての帰納法で示す. $\dot{x} \in H_\theta$ とする. $|P| < \theta$ より, P は θ-c.c. を満たす. よって $\Vdash$ "θ は正則基数" が成り立つ. ゆえに, $\Vdash$ "$\dot{x} \subset H_\theta$ かつ $|\dot{x}| < \theta$" を示せば十分である. $(\dot{y}, r) \in \dot{x}$ としよう. $\dot{x} \in H_\theta$ なので, $\dot{y} \in H_\theta$. 帰納法の仮定によって $\Vdash$ "$\dot{y} \in H_\theta$". よって $\Vdash$ "$\dot{x} \subset H_\theta$" がわかった. つぎに, $\mu < \theta$, $\dot{x} = \{(\dot{a}_i, r_i) : i < \mu\}$, $\dot{f} = \{(o.p.(\check{i}, \dot{a}_i), r_i) : i < \mu\}$ とおく. ただし, $o.p.(\dot{x}, \dot{y})$ は V^P 上での $\dot{x}, \dot{y}$ の順序対を表す名称である. すると, $\Vdash$ "$\dot{f}$ は関数であり, $\mathrm{dom}\dot{f} \subset \mu$ かつ $\mathrm{ran}\dot{f} = \dot{x}$" となる. よって $\Vdash$ "$|\dot{x}| = |\mathrm{ran}\dot{f}| \leq |\mathrm{dom}\dot{f}| \leq \mu < \theta$" だから, $\Vdash$ "$|\dot{x}| < \theta$".
(2):$\dot{x} \in V^P$ のランクについての帰納法で示す. $p \in P$, $p \Vdash$ "$\dot{x} \in H_\theta$" を仮定する. θ の正則性と $|P| < \theta$ より, $p \Vdash$ "$|\dot{x}| \leq \mu$" となるような $\mu < \theta$ がとれる. そこで, $p \Vdash$ "$\dot{f} : \mu \to \dot{x}$ は全射" となるような $\dot{f}$ をとる. このとき, 任意の $\alpha < \mu$ について次の集合は p の下で稠密になる;

$$\{r : \exists \dot{a} \in \mathrm{dom}\ \dot{x}\ r \Vdash \text{“}\dot{a} \in \dot{x} \text{ and } f(\alpha) = \dot{a}\text{”}\}.$$

p の下で極大な反鎖 A_α $(\alpha < \mu)$ を次を満たすようにとる: 任意の $r \in A_\alpha$ についてある $\dot{a}_{\alpha,r} \in \mathrm{dom}\ \dot{x}$ が存在し, $r \Vdash$ "$\dot{a}_{\alpha,r} \in \dot{x}$ かつ $f(\alpha) = \dot{a}_{\alpha,r}$" を満たす. さて, $r \Vdash$ "$\dot{a}_{\alpha,r} \in \dot{x} \in H_\theta$" に注意すると, $r \Vdash$ "$\dot{a}_{\alpha,r} \in H_\theta$" がわかる. よって, 帰納法の仮定より, 各 $\alpha < \mu$ と $r \in A_\alpha$ に対して $\dot{b}_{\alpha,r} \in H_\theta$ かつ $r \Vdash$ "$\dot{b}_{\alpha,r} = \dot{a}_{\alpha,r}$" となるような $\dot{b}_{\alpha,r} \in V^P$ が存在する. $\dot{y} = \{(\dot{b}_{\alpha,r}, r) : \alpha < \mu \text{ and } r \in A_\alpha\}$ とおく.

主張 5.13. $\dot{y} \in H_\theta$ かつ $p \Vdash$ "$\dot{x} = \dot{y}$".
まず $\dot{y} \in H_\theta$ を示す. $\dot{b}_{\alpha,r} \in H_\theta$ と $A_\alpha \subset P \subset H_\theta$ に注意すると $\dot{y} \subset H_\theta$ がわかる. 一方 $\mu < \theta$ と $|A_\alpha| \leq |P| < \theta$ より $|\dot{y}| < \theta$. よって $\dot{y} \in H_\theta$ となる.
次に, $p \Vdash \dot{x} \supset \dot{y}$ を確かめる. $r \Vdash$ "$\dot{b}_{\alpha,r} = \dot{a}_{\alpha,r} \in \dot{x}$" に注意すると, 任意の $\alpha < \mu$ と $r \in A_\alpha$, $q \leq p, r$ について $q \Vdash$ "$\dot{b}_{\alpha,r} \in \dot{x}$" がわかる. つまり, 任意の $(\dot{a}, r) \in \dot{y}$ と $q \leq p, r$ に対して $q \Vdash$ "$\dot{a} \in \dot{x}$" である.
最後に $p \Vdash \dot{x} \subset \dot{y}$ を示そう. $p \Vdash$ "$\mathrm{ran}\dot{f} = \dot{x}$" なので, 任意の $\alpha < \mu$ について $p \Vdash$ "$\dot{f}(\alpha) \in \dot{y}$" を示せば十分である. $\alpha < \mu$, $r \in A_\alpha$ を固定する. このとき $r \Vdash$ "$\dot{f}(\alpha) = \dot{a}_{\alpha,r} = \dot{b}_{\alpha,r} \in \dot{y}$" となる. よって $r \Vdash \dot{f}(\alpha) \in \dot{y}$. A_α は p の下で極大な反鎖だったので, $p \Vdash$ "$\dot{f}(\alpha) \in \dot{y}$" が得られる. □

補題 5.14. P を半順序, θ を十分大きな基数, $M \prec H_\theta$ とする. このとき, G を V 上 P-generic とすると, $(M \subset) M[G] \prec H_\theta^{V[G]}$ である. ただし, $M[G] := \{\dot{x}^G : \dot{x}$ は P-名称 かつ $\dot{x} \in M\}$.

証明. 補題 5.12 より, $M[G] \subset H_\theta[G] = H_\theta^{V[G]}$. Tarski-Vaught の判定条件により, 次を示せば十分である.

主張 5.15. $\varphi(x, y_1, ...y_n)$ を論理式とする. $a_1, ..., a_n \in M[G]$, $H_\theta^{V[G]} \models \exists x \varphi(x, a_1, ..., a_n)$ ならば, ある $b \in M[G]$ が存在して $H_\theta^{V[G]} \models \varphi(b, a_1, ..., a_n)$.
表記を簡単にするため, $n = 1$ の場合を考え, $a_1 = a$, $y_1 = y$ と書く. 一般の場合も同様である. さて, $a \in M[G]$, $H_\theta^{V[G]} \models \exists x \varphi(x, a)$ と仮定する. ここで, $a = \dot{a}^G$, $\dot{a} \in M$ となっている. すると, $V[G] \models$ "$H_\theta \models \exists x \varphi(x, \dot{a}^G)$" が成り立つ. また, ある P-名称 $\dot{b}$ があって, $\Vdash_P$ "$\dot{b} \in H_\theta \wedge H_\theta \models$

$\exists x\varphi(x,\dot{a}) \to \varphi(\dot{b},\dot{a})$" を満たす．補題 5.12 の 2. により, $\dot{b} \in H_\theta$ かつ $\Vdash$ "$H_\theta \models \exists x\varphi(x,\dot{a}) \to \varphi(\dot{b},\dot{a})$" となる P-名称 $\dot{b}$ が存在する．上の強制関係の式は H_θ で定義できるので,

$$H_\theta \models [P\text{-名称}\dot{b} \text{ が存在して } \Vdash \text{“}H_\theta \models \exists x\varphi(x,\dot{a}) \to \varphi(\dot{b},\dot{a})\text{” を満たす}].$$

よって, $M \prec H_\theta$ だから, $\Vdash$ "$H_\theta \models \exists x\varphi(x,\dot{a}) \to \varphi(\dot{b},\dot{a})$" を満たすような P-名称 $\dot{b}$ を M からとれる．$V[G]$ で考えると, $V[G] \models$ "$H_\theta \models \exists x\varphi(x,\dot{a}^G) \to \varphi(\dot{b}^G,\dot{a}^G)$" がわかる．ところが仮定より $V[G] \models$ "$H_\theta \models \exists x\varphi(x,\dot{a}^G)$" だったから, $V[G] \models$ "$H_\theta \models \varphi(\dot{b}^G,\dot{a}^G)$"．よって $H_\theta^{V[G]} \models \varphi(\dot{b}^G,a)$ かつ $\dot{b}^G \in M[G]$ が成り立つ． $\square$

補題 5.16. P を半順序, θ を十分大きな基数, $M \prec H_\theta$ を可算な初等的部分構造, $p \in P$ とする．このとき, 次の三つの条件は同値である:

1. p は (M,P)-generic.
2. 任意の P で稠密な $D \in M$ に対して, $D \cap M$ は p の下で前稠密になる．
3. $p \Vdash_P$ "$M[\dot{G}] \cap V = M \cap V$".

注意 5.17. P を半順序, $p \in P$, $X \subset P$ とする．X が p の下で前稠密であることは, $p \Vdash_P$ "$X \cap \dot{G} \neq \emptyset$" の必要十分条件である．

証明. (十分性): $D := \{r : \exists s \in X(r \leq s)$ または $r \perp p\}$ とおく．D は P で稠密である．よって,

- $\Vdash$ "$D \cap \dot{G} \neq \emptyset$"
- $\Vdash$ "任意の $r \in D$ に対して, $\exists s \in X(r \leq s)$ または $r \perp p$"

となることがわかる．だから, ある $\dot{r}$ が存在して $p \Vdash$ "$\dot{r} \in D \wedge \dot{r}, p \in \dot{G}$" を満たす．これより, $p \Vdash$ "$\dot{r} \in D \wedge \dot{r} \parallel p$"．上の二番目の条件より, $p \Vdash$ "$\exists s \in X(\dot{r} \leq s)$"．$p \Vdash$ "$\dot{r} \in \dot{G}$" より $p \Vdash$ "$X \cap \dot{G} \neq \emptyset$".
(必要性): $r \leq q$ とする．すると, $r \Vdash$ "$X \cap \dot{G} \neq \emptyset$"．よって $r \Vdash$ "$\exists s \in X(s \in \dot{G} \wedge r \in \dot{G})$"．だから $r \Vdash$ "$\exists s \in X(s \parallel r)$" となる．絶対性より, ある $s \in X$ が存在して $s \parallel r$ を満たす． $\square$

証明. (補題 5.16 の証明)
$(1 \to 2)$: p は (M,P)-generic と仮定する．P で稠密な $D \in M$ を固定する．$A \subset D$ となるような P の極大反鎖 $A \in M$ をとる．すると, $A \cap M$ は p の下で前稠密になる．$A \subset D$ だから, $D \cap M$ も p の下で前稠密になる．
$(2 \to 3)$: $p \Vdash$ "$\forall x(x \in M[G] \cap V \to x \in M)$" を示したい．$q \Vdash$ "$\dot{x} \in M[G] \cap V$" を満たすような $\dot{x} \in V^P$, $q \leq p$ を任意にとる．$r \Vdash$ "$\dot{x} \in M$" を満たす $r \leq q$ が存在することを示せば十分である．まず, $\dot{y} \in M$ と $r \Vdash$ "$\dot{x} = \dot{y}$" を満たすような $\dot{y} \in V^P$ と $r \leq q$ をとる．$D := \{s \in P : \exists a(s \Vdash$ "$\dot{y} = \check{a}$") または $s \Vdash$ "$\dot{y} \notin V$"$\}$ とする．D は P で稠密である．$D \in M$ を示そう．$s \Vdash$ "$\dot{y} \notin V$" は $\forall t \leq s(t \nVdash$ "$\dot{y} \in V$") と同値である．これは, 任意の $t \leq s$ について $\{t' : \exists a\ (t' \Vdash \dot{y} = \check{a})\}$ が t の下で稠

密でないことと同値である．一方, $s \Vdash$ "$\dot{y} = \check{a}$" とする．$\dot{y} \in H_\theta$ より, $\Vdash$ "$\dot{y} \in H_\theta$" だから, $s \Vdash$ "$\check{a} \in H_\theta$" である．よって, $s \Vdash$ "$|\mathrm{TC}(\check{a})| < \theta$" がわかるから, $|\mathrm{TC}(a)| < \theta$ となる．だから, $a \in H_\theta$. 以上で $D \in M$ がわかった.

仮定より $D \cap M$ は r の下で前稠密である．$\{s : s \Vdash$ "$\dot{x} \in M$"$\}$ が r の下で稠密になることを示せば $r \Vdash \dot{x} \in M$ となって証明が終わる．$r' \leq r$ とする．$t \leq r', s$ となる $s \in D \cap M$ と $t \in P$ がとれる. $s \in D$, $r \Vdash$ "$\dot{y} \in V$", $s \parallel r$ より, $s \Vdash$ "$\dot{y} = \check{a}$" となる a が存在する．s と $\dot{y}$ は M の要素なので, そのような a は M の要素として取れる．よって $t \Vdash$ "$\dot{x} = \dot{y} \in M$", すなわち $t \Vdash$ "$\dot{x} \in M$" を得る．以上より $\{s \Vdash$ "$\dot{x} \in M$"$\}$ は r の下で稠密である.

$(3 \to 1)$: P の極大な反鎖 $A \in M$ を固定する．$\dot{q} = \bigcup_{r \in A}\{(\check{a}, r) : a \in r\}$ とする．このとき,

- $\dot{q} \in M$,
- 任意の $r \in A$ について $r \Vdash$ "$\dot{q} = r$",
- $\Vdash \dot{q} \in A \cap \dot{G}$.

(二つ目の条件は次のようにしてわかる: G を P-generic, $r \in G$ とすると $\dot{q}^G = \{(\check{a})^G : a \in r\} = r$.) はじめの二つの条件より, $\Vdash$ "$\dot{q} \in M[\dot{G}] \cap V$". 仮定より $p \Vdash$ "$\dot{q} \in M$". 三番目の条件より $p \Vdash$ "$\dot{q} \in A \cap M \cap \dot{G}$". よって $p \Vdash$ "$A \cap M \cap \dot{G} \neq \emptyset$". 以上より, $A \cap M$ は p の下で前稠密であることがわかった. □

補題 5.18. P を半順序, $\dot{Q}$ をある半順序の P-名称とする．さらに, θ を十分大きな基数, $M \prec H_\theta$ を可算の初等的部分構造, $(p, \dot{q}) \in P * \dot{Q}$ とする．もし, p が (M, P)-generic で, $p \Vdash_P$ "$\dot{q}$ は $(M[\dot{G}_P], \dot{Q}) -$ generic" が成り立っているならば, $(p, \dot{q})$ は $(M, P * \dot{Q})$-generic である.

証明. $(p, \dot{q}) \Vdash_R$ "$M[\dot{G}_R] \cap V = M \cap V$" を示せばよい．ただし, $R = P * \dot{Q}$ である．V 上 R-generic で, $(p, \dot{q}) \in K$ となる K を固定する．このとき, 定理 4.18 の 2. より, V 上 P-generic な $G \ni p$ と $V[G]$ 上 $\dot{Q}^G$-generic な $H \ni \dot{q}^G$ が存在し, $K = G * H$ とできる.

主張 5.19. $M[K] \subset M[G][H]$.

写像 $i : V^R \to V^P$ を,

$$i(\dot{x}) = \{(o.p.(i(\dot{y}), \dot{q}), p) : \ (\dot{y}, (p, \dot{q})) \in \dot{x}\}$$

となるように $\dot{x}$ のランクについての再帰的方法で定義する．絶対性により, $\dot{x} \in M$ ならば $i(\dot{x}) \in M$ である．次を示せば十分:

$\dot{x}$ を R-名称とする．このとき, $(i(\dot{x}))^G$ は $V[G]$ 上で $\dot{Q}^G$-名称であり, $\dot{x}^K = [(i(\dot{x}))^G]^H$.

(十分であることを説明する : $a \in M[K]$ とすると $a = \dot{x}^K$, $\dot{x} \in M$ と表せて, $i(\dot{x}) \in M$ がわかる．よって $(i(\dot{x}))^G \in M[G]$ は $\dot{Q}^G$-名称となり, $a = \dot{x}^K = [(i(\dot{x}))^G]^H \in M[G][H]$.) $\dot{x}$ のランクについての帰納

法で示そう. $(i(\dot{x}))^G = \{((i(\dot{y}))^G, \dot{q}^G) : \exists p \in G\ (\dot{y}, (p, \dot{q})) \in \dot{x}\}$ である. よって $(i(\dot{x}))^G$ は $\dot{Q}^G$-名称. 次の等式より, 主張が示される.

$$\begin{aligned}
[(i(\dot{x}))^G]^H &= \{[(i(\dot{y}))^G]^H :\ \exists p \in G, \exists \dot{q}\ (\dot{q}^G \in H \wedge (\dot{y}, (p, \dot{q})) \in \dot{x})\} \\
&= \{\dot{y}^K :\ \exists (p, \dot{q}) \in K\ (\dot{y}, (p, \dot{q})) \in \dot{x}\} \\
&= \dot{x}^K.
\end{aligned}$$

(主張の証明終わり)

さて, $M[K] \cap V \subset M$ を示せば補題の証明が終わる. p は (M, P)-generic なので, $p \Vdash$ "$M[G_P] \cap V = M \cap V$". $p \in G$ に注意すると $M[G] \cap V = M$ となる. また,

$$p \Vdash_P \text{“}\dot{q} \text{ は } (M[\dot{G}_P], \dot{Q})\text{-generic”}$$

より, ($\dot{q}^G$ は $(M[G], \dot{Q}^G)$-generic)$^{V[G]}$. だから,

$$(\dot{q}^G \Vdash_{\dot{Q}^G} \text{“}M[G][\dot{G}_{\dot{Q}^G}] \cap V = M[G] \cap V\text{”})^{V[G]}$$

となる. $\dot{q}^G \in H$ より, $M[G][H] \cap V[G] = M[G]$. よって,

$$\begin{aligned}
M[K] \cap V &\subset M[G][H] \cap V \\
&= M[G][H] \cap V[G] \cap V \\
&= M[G] \cap V \\
&= M.
\end{aligned}$$

$\square$

定理 5.20 (Shelah)**.** $\langle\langle P_\beta : \beta \leq \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle$ を可算台を持つ反復強制法とする. 任意の $\beta < \alpha$ について $\Vdash_\beta$ "$\dot{Q}_\beta$ は proper かつ分離的 " が成り立っているならば, P_α は proper である.

証明には次の補題を使う.

補題 5.21. θ を十分大きな基数, $M \prec (H_\theta, \in, \lhd, ...)$ を可算の初等的部分構造とする. また, $\langle\langle P_\beta : \beta \leq \alpha\rangle, \langle \dot{Q}_\beta : \beta < \alpha\rangle\rangle \in M$ を可算台を持つ反復強制法で, 任意の $\beta < \alpha$ について $\Vdash_\beta$ "$\dot{Q}_\beta$ は proper かつ分離的" とする. さらに, $\gamma \in \alpha \cap M$, q_0 を (M, P_γ)-generic, $\dot{p} \in V^{P_\gamma}$, $q_0 \Vdash_\gamma$ "$\dot{p} \in (P_\alpha \cap M) \wedge \dot{p}|\gamma \in \dot{G}_\gamma$" とする. このとき, ある (M, P_α)-generic な q が存在し, $q|\gamma = q_0$ かつ $q \Vdash_\alpha \dot{p} \in \dot{G}_\alpha$ を満たす.

証明. (定理 5.20 の証明) P_α が proper であるとは, 十分大きな任意の θ と任意の可算の $M \prec (H_\theta, \in, \lhd, ...)$, 任意の $p \in P_\alpha \cap M$ に対して, (M, P_α)-generic な $q \leq p$ が存在することと同値であった. ここで, P_α が分離的なので, 条件 $q \leq p$ を $q \Vdash_{P_\alpha}$ "$p \in \dot{G}$" に置き換えても同値である. よって, 補題 5.21 を $\gamma = 0, q_0 = 1_{P_0}$ $(P_0 = \{1_{P_0}\})$ について適用すればよい. $\square$

補題 5.21 の証明に先立ち, 次の補題を示しておく.

補題 5.22. P を proper, $\dot{Q} \in V^P$, $\Vdash_P$ "$\dot{Q}$ は proper な半順序" とする．θ を十分大きな基数とし, $M \prec H_\theta$ を可算の初等的部分構造, $R = P * \dot{Q} \in M$ とする．q_0 は (M, P)-generic とし, $\dot{p} \in V^P$, $q_0 \Vdash_P$ "$\dot{p} \in (M \cap R) \wedge \dot{p}(0) \in \dot{G}_P$" とする．ただし, $\dot{p}(0)$ は V^P 上での $\dot{p}$ の最初の成分である．このとき, 次の条件を満たす $\dot{q}_1 \in V^P$ が存在する:

- $(q_0, \dot{q}_1)$ は (M, R)-generic.
- $(q_0, \dot{q}_1) \Vdash_R$ "$\dot{p} \in \dot{G}_R$".

証明.

主張 5.23. $q_0 \Vdash_P$ "$q_1 \leq (\dot{p}(1))^{\dot{G}_P}$を満たす $(M[\dot{G}_P], \dot{Q})$-generic な q_1 が存在する．" ただし, $\dot{p}(1)$ は V^P 上での $\dot{p}$ の二つ目の成分である．

V 上 P-generic な $G \ni q_0$ を固定する．$V[G]$ の中で考える．$p = \dot{p}^G$, $Q = \dot{Q}^G$ とする．仮定より $p = (p_0, \dot{p}_1) \in M$, $p_0 \in G$ である．$\dot{p}_1 \in M$ より, $\dot{p}_1^G \in M[G] \cap Q$. Q は proper で, $M[G] \prec H_\theta^{V[G]}$ なので, $(M[G], Q)$-generic な $q_1 \leq \dot{p}_1^G$ が存在する．（主張の証明終わり）

主張の条件を満たす $\dot{q}_1 \in V^P$ を固定する．すると, q_0 と $\dot{q}_1$ の generic 性より, $(q_0, \dot{q}_1)$ が (M, R)-generic になることがわかる．また, $q_0 \Vdash_P$ "$\dot{p}(0) \in \dot{G}_P \wedge \dot{q}_1 \leq (\dot{p}(1))^{\dot{G}_P}$" より, $(q_0, \dot{q}_1) \Vdash$ "$\dot{p} \in \dot{G}_R$". (なぜならば, $K = G * H$ は V 上 R-generic, $(q_0, \dot{q}_1) \in K$ とすると, $\dot{p}^G = (p_0, \dot{p}_1), p_0 \in G, \dot{q}_1^G \leq \dot{p}_1^G$ だが, これより $\dot{p}_1^G \in H$, よって $\dot{p}^G = (p_0, \dot{p}_1) \in G * H = K$ がわかる．) □

証明. (補題 5.21 の証明) α についての帰納法で証明する．

(α が後続順序数のとき): 帰納法の仮定と補題 5.22 より示される．

(α が極限順序数のとき): $\langle \gamma_n : n < \omega \rangle$ を M 上の順序数からなる上昇列で $\alpha \cap M$ で共終的なものとする．ただし, $\gamma_0 = \gamma$ である．$\{D_n : n < \omega\} = \{D \in M : D \subset P_\alpha, D$ は稠密 $\}$ と並べておく．(M, P_{γ_n})-generic な q_n と $\dot{p}_n \in V^{P_{\gamma_n}}$ $(n < \omega)$ を次の条件を満たすようにとりたい:

- $\dot{p}_0 = \dot{p}$,
- 任意の $n < \omega$ について, $q_{n+1}|\gamma_n = q_n$,
- 任意の $n < \omega$ について,

$$q_n \Vdash_{\gamma_n} \text{“}\dot{p}_n \in P_\alpha \cap M,\ \dot{p}_n \leq \dot{p}_{n-1},\ \dot{p}_n \in D_{n-1},\ \dot{p}_n|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}\text{”}.$$

このような $q_n, \dot{p}_n$ を n についての帰納法で構成する．ある n について $q_n, \dot{p}_n$ がえられたとする．

主張 5.24. $q_n \Vdash_{\gamma_n}$ "$\forall p \in P_\alpha \cap M[p|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n} \Rightarrow \exists p' \in D_n \cap M(p' \leq p \wedge p'|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n})]$".

$r \Vdash_{\gamma_n}$ "$p|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}$" となる $p \in P_\alpha \cap M$ と $r \leq q_n$ を任意にとって固定する．$s \Vdash_{\gamma_n}$ "$p' \leq p \wedge p'|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}$" となるような $s \leq r$ と $p' \in D_n \cap M$ の存在を示せばよい．つまり, 適当な $s \leq r$ と $p' \in D_n \cap M$

が存在して $p' \le p$ かつ $s \le p'|\gamma_n$ とできることを示せば十分である．$D = \{p'|\gamma_n : p' \in D_n \text{ and } p' \le p\} \cup \{s \in P_{\gamma_n} : s \Vdash_{\gamma_n} \text{“}p|\gamma_n \notin \dot{G}_{\gamma_n}\text{”}\}$ とおく．ここで, D の定義に現れるオブジェクトが全て M の要素であることに注意すると $D \in M$ がわかる．また, D は P_{γ_n} で稠密になっている．これを確かめよう．P_{γ_n} から任意の要素 x をとる．このとき, $y \le x$ で, $y \Vdash_{\gamma_n}$ “$p|\gamma_n \notin \dot{G}_{\gamma_n}$” か $y \Vdash_{\gamma_n}$ “$p|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}$” のどちらかが成り立つような y がとれる．前者の場合, $y \in D$ である．後者の場合, P_{γ_n} が分離的であることに注意すると, $y \le p|\gamma_n$．よって $y^+ := y \cup p|[\gamma_n, \alpha)$ とおくと $y^+ \le p$ となる．このとき, ある $p' \in D$ があって, $p' \le y^+ (\le p)$ を満たす．$p'|\gamma_n \in D$, $p'|\gamma_n \le y^+|\gamma_n = y \le x$ だから, D の稠密性がわかる．q_n は (M, P_{γ_n})-generic だから, $D \cap M$ は q_n の下で前稠密である．$r \le q_n$ より, $s \le r, s'$ となる $s \in P_{\gamma_n}$ と $s' \in M \cap D$ がとれる．$s' \in D$, $r \Vdash_{\gamma_n}$ “$P|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}$” と r, s' の両立性から, $p' \le p$ かつ $s' = p'|\gamma_n$ を満たす $p' \in D_n$ が存在する．p, s', γ_n, D_n は全て M の要素であることから, そのような p' は M の中にも存在する．この $s \in P_{\gamma_n}$ と $p' \in M$ は示すべき条件を満たす．(主張の証明終わり)

$p = \dot{p}_n$ として主張を適用すると, ある $\dot{p}_{n+1} \in V^{P_{\gamma_n}}$ が存在して $q_n \Vdash_{\gamma_n}$ “$\dot{p}_{n+1} \in D_n \cap M$, $\dot{p}_{n+1} \le \dot{p}_n$, $\dot{p}_{n+1}|\gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}$” を満たす．帰納法の仮定から, $(M, P_{\gamma_{n+1}})$-generic な q_{n+1} で $q_{n+1}|\gamma_n = q_n$ かつ $q_{n+1} \Vdash_{\gamma_{n+1}}$ “$\dot{p}_{n+1}|\gamma_{n+1} \in \dot{G}_{\gamma_n}$” となるようなものがとれる．これで, 与えられた条件を満たす p_n, $\dot{q}_n$ $(n < \omega)$ の存在が示せた．

$q = \bigcup_{n<\omega} q_n$ としよう．このとき, $q \in P_\alpha$, $q|\gamma = q_0$ である．この q が (M, P_α)-generic かつ $q \Vdash_\alpha$ “$\dot{p} \in \dot{G}_\alpha$” となることを示せば証明が終わる．$n \in \omega$ を任意にとって固定する．$q \Vdash_\alpha \dot{p}_n \in \dot{G}_\alpha$ を示せば十分である．なぜならば, これから, 任意の $n < \omega$ に対し $q \Vdash_\alpha$ “$\dot{p}_{n+1} \in D_n \cap M \cap \dot{G}_\alpha$” が示され, P で稠密な任意の $D \in M$ に対して $q \Vdash_\alpha D \cap M \cap \dot{G}_\alpha \ne \emptyset$ となることがわかるから, q の (M, P_α)-generic 性が従う．さて, 任意の $m \ge n$ に対して $q_m \Vdash_{\gamma_m}$ “$\dot{p}_n|\gamma_m \in \dot{G}_{\gamma_m}$” が成り立つことに注意する．（なぜならば, $q_m \Vdash_\alpha \dot{p}_m|\gamma_m \in \dot{G}_{\gamma_m}$ かつ $q_m \Vdash_\alpha \dot{p}_m \le \dot{p}_n$ だから．）$r \Vdash_\alpha$ “$\dot{p}_n = s$” となるような $r \le q$ と $s \in P_\alpha$ を任意に固定する．先ほどの注意により, 任意の $m \ge n$ に対して, $r|\gamma_m \Vdash_{\gamma_m} s|\gamma_m \in \dot{G}_{\gamma_m}$ である．P_α は分離的だったから, $r|\gamma_m \le s|\gamma_m$．また, s のとり方から, $s \in M$．ゆえに $\mathrm{supt}(s) \in M$．$\mathrm{supt}(s)$ は可算だから $\mathrm{supt}(s) \subset M$ となる．よって, $\sup_{m \ge n} \gamma_m = \sup(\alpha \cap M)$ と $\mathrm{supt}(s) \subset \alpha \cap M$ が成り立つことに注意すると, $r \le s$ がわかる．以上より $r \Vdash_\alpha$ “$s \in \dot{G}_\alpha$” が示され, r, s の取り方から, 証明が終わった． □

6 Proper Forcing Axiom とその無矛盾性

定義 6.1. Proper Forcing Axiom (PFA) とは, 次の公理のことである:

(PFA): 任意の proper な半順序 P と, ω_1 個の P の稠密部分集合からなる任意の族 $\mathcal{D}$ に対して, P 上の $\mathcal{D}$-generic なフィルター G が存在する．

ただし、$\mathcal{D}$-generic なフィルターとは $\mathcal{D}$ の全ての要素と交わるフィルターのことである．

定理 6.2. (Baumgartner-Shelah) 超コンパクト基数が存在すれば, ある半順序 P が存在して $\Vdash_P$ "PFA" を満たす.

証明. κ を超コンパクト基数, $f:\kappa\to V_\kappa$ を Laver 関数とする. P を長さ κ の可算台を持つ反復強制法 $\langle\langle P_\alpha:\alpha\leq\kappa\rangle, \langle\dot{Q}_\alpha:\alpha<\kappa\rangle\rangle$ で次のように構成する: α 番目のステップにおいて, もし, ある $\dot{Q}\in V^{P_\alpha}$ で $f(\alpha)=\dot{Q}$ かつ $\Vdash_{P_\alpha}$ "$\dot{Q}$ は proper な半順序." が成り立つならば, $\dot{Q}_\alpha=\dot{Q}$, それ以外の場合は $\dot{Q}_\alpha$ は自明な半順序と定める. さて, $\Vdash_{P_\kappa}$ "PFA" を示そう. まず, 定理 5.20 より P_κ は proper なので, P_κ が ω_1 を保存する (つまり, $\Vdash$ "$\check{\omega}_1=\omega_1$") ことがわかる. また, 任意の $\alpha<\kappa$ に対して $f(\alpha)\in V_\kappa$ なので, $\dot{Q}_\alpha\in V_\kappa$ となり, $|P_\alpha|<\kappa$ がわかる. ゆえに, P_α $(\alpha<\kappa)$ は κ-c.c. を満たすので, 系 4.25 より P_κ も κ-c.c. を満たすことがわかる. 定理の証明を後で述べる補題 6.4 を仮定して完成させる. V^{P_κ} の中で考える. $\gamma<\kappa$ を順序数とする. $Q=\{f\subset\omega_1\times\gamma:|f|\leq\omega, f \text{ は関数 }\}$ (Q の順序は包含関係の逆), $D_\alpha=\{f\in Q:\alpha\in\mathrm{ran}(f)\}$, $\mathcal{D}=\{D_\alpha:\alpha<\gamma\}$ とおいて, 補題 6.4 を適用すると, Q 上の $\mathcal{D}$-generic なフィルター F が見つかる. $\bigcup F:\omega_1\to\gamma$ は全射である. よって $\omega_1\geq|\gamma|$. $\gamma<\kappa$ は任意だったから, $\kappa=\omega_2$. したがって補題 6.4 より PFA が V^{P_κ} で成立することが示された. □

注意 6.3. 定理 6.2 の証明中において, さらに $\Vdash_{P_\kappa}$ "$2^\omega=\omega_2=\kappa$" も示せる.

証明. V^{P_κ} の中で考える. PFA より, MA_{ω_1} が成立するので, $2^\omega>\omega_1$. よって $2^\omega\geq\omega_2=\kappa$. 一方, P_κ は κ-c.c. を満たし、かつ $|P_\kappa|\leq\kappa$ が V で成り立っているので, V の中で次の不等式が成り立っている:

$$\begin{aligned}|P_\kappa\text{の反鎖からなる長さ}\omega\text{の列全体の集合}| &\leq |^\omega([P_\kappa]^{<\kappa})|\\ &\leq(\kappa^{<\kappa})^\omega\\ &\leq\kappa.\end{aligned}$$

よって, V^{P_κ} の中で, $2^\omega\leq\kappa=\omega_2$ となる.

補題 6.4. (定理 6.2 の証明の状況において) 次の命題が V^{P_κ} 上で成り立つ: 任意の proper な半順序 Q と, Q の稠密部分集合からなる濃度 κ 未満の任意の族 $\mathcal{D}$ に対して, Q 上の $\mathcal{D}$-generic なフィルター F が存在する.

証明. V 上 P_κ-generic な G を固定する. まず $V[G]$ の中で考える. proper な半順序 $Q=\dot{Q}^G$ と $\gamma<\kappa$, Q の稠密な部分集合 D_α $(\alpha<\gamma)$ を任意に取って固定する. $\mathcal{D}=\{D_\alpha:\alpha<\gamma\}$ とおく. Q は proper だから, 適当な基数 θ をとって, 任意の可算な初等的部分構造 $N\prec H_\theta$ と, 任意の $p\in Q\cap N$ に対して, (N,Q)-generic な $q\leq p$ が存在するようにできる. 次に V の中で考える. λ を κ,θ に対して十分大きくとって固定する. このとき, $V[G]\models$ "$Q\subset\lambda$" と仮定してよい. $f:\kappa\to V_\kappa$ が Laver 関数だったから, 次の条件を満たす初等的埋め込み $j:V\to M$ が存在する:

- $\mathrm{crit}(j)=\kappa$,
- $j(\kappa)>\lambda$,

- ${}^{\lambda}M \subset M$ (よって $H_{\lambda^+} \subset M$),
- $(jf)(\kappa) = \dot{Q}$ ($\dot{Q} \in H_{\lambda^+}$ より).

主張 6.5. $M[G] \models$ ‘Q は proper”.

${}^{\lambda}M \subset M$ より, $V[G] \models$ “${}^{\lambda}(M[G]) \subset M[G]$”. ゆえに、$(H_{\lambda^+})^{V[G]} \subset M[G]$ と $(H_\theta)^{V[G]} = (H_\theta)^{M[G]}$ が成り立つ. よって θ のとりかたより, $M[G]$ で次の命題が成り立っている:

> 任意の可算な初等的部分構造 $N \prec H_\theta$ と任意の $p \in Q \cap N$ に対して, (N, Q)-generic な $q \leq p$ が存在する.

以上より $M[G] \models$ “Q は proper” が示された. （主張の証明終わり）

次に $j(P_\kappa)$ について考える. $\bar{P} = \langle P_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$, $\bar{Q} = \langle \dot{Q}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ とおく. $\langle \bar{P}, \bar{Q} \rangle$ は可算台を持つ長さ κ の反復強制法である. M の中で考えると, 次の 4 つの条件が成り立っている:

- $\langle j(\bar{P}), j(\bar{Q}) \rangle$ は可算台を持つ長さ $j(\kappa)$ の反復強制法,
- $j(\bar{P})_\kappa = P_\kappa$, ($\alpha < \kappa$ に対して $V \models \bar{Q}_\alpha = \dot{Q}_\alpha$ から $M \models j(\bar{Q})_\alpha = \dot{Q}_\alpha$ が導かれるから.)
- $j(\bar{P})_{j(\kappa)} = j(P_\kappa)$,
- $j(\bar{Q})_\kappa = \dot{Q}$. ($(jf)(\kappa) = \dot{Q}$ と先ほどの主張より.)

よって, ある $\dot{R} \in M^{P_\kappa * \dot{Q}}$ が存在して, $j(P_\kappa) \cong (P_\kappa * \dot{Q}) * \dot{R}$ と同一視できる.

さて, $V[G]$ 上 Q-generic な H と, $V[G * H]$ 上 $\dot{R}^{G*H}$-generic な K を固定して考える. $j^* : V[G] \to M[G * H * K]$ を $j^*(\dot{x}^G) = j(\dot{x})^{G*H*K}$ ($\dot{x} \in V^{P_\kappa}$) で定義する.

主張 6.6. j^* の定義は well-defined である. また, j^* は初等的埋め込みになり, $j^*|V = j$, $\mathrm{crit}(j^*) = \kappa$ が成り立つ.

まず, j“$G \subset G * H * K$ に注意する.

(well-defined なこと): $\dot{x}, \dot{y} \in V^{P_\kappa}$, $V[G] \models \dot{x}^G = \dot{y}^G$ とする. $p \Vdash$ “$\dot{x} = \dot{y}$” なる $p \in G$ をとる. j は初等的埋め込みだから, $M \models$ “$j(p) \Vdash j(\dot{x}) = j(\dot{y})$”. 先ほど述べた注意より, $j(p) \in G * H * K$ だから, $M[G * H * K] \models$ “$j(\dot{x})^{G*H*K} = j(\dot{y})^{G*H*K}$”.

(j^* が初等的埋め込みであること): $\dot{x} \in V^{P_\kappa}$, $V[G] \models \varphi(\dot{x}^G)$ を仮定する. ここで φ は任意の論理式である. $p \Vdash \varphi(\dot{x})$ となる $p \in G$ をとる. j が初等的埋め込みであることから, $M \models$ “$j(p) \Vdash \varphi(j(\dot{x}))$” となる. $j(p) \in G * H * K$ だから, $M[G * H * K] \models \varphi(j(\dot{x})^{G*H*K})$. $j(\dot{x})^{G*H*K} = j^*(\dot{x}^G)$ であった.

($j^*|V = j$ であること): $x \in V$ とする. $j^*(x) = j^*(\check{x}^G) = j(\check{x})^{G*H*K}$ である. $j(\check{x}) = (j(x))\check{}$ を使うと, $j(\check{x})^{G*H*K} = [(j(x))\check{}]^{G*H*K} = j(x)$ がわかる. （主張の証明終わり）

$j^*|\lambda = j|\lambda \in M$ かつ $H \subset Q \subset \lambda$ だから, $j^*``H \in M[G*H*K]$ がわかる. 次に,

$$M[G*H*K] \models ``\forall D \in j^*(\mathcal{D}),\ (j^*``H) \cap D \neq \emptyset"$$

を示そう. $V[G] \models ``\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \gamma\} \wedge \gamma < \kappa"$ だから, $M[G*H*K] \models ``j^*(\mathcal{D}) = \{j^*(D_\alpha) : \alpha < \gamma\}"$ である. $\alpha < \gamma$ を固定する. $H \cap D_\alpha$ は空集合ではないので, ある要素 p を持つ. このとき, $V[G] \models ``p \in D_\alpha"$ である. よって $M[G*H*K] \models ``j^*(p) \in j^*(D_\alpha)"$. また, $j^*(p) \in j^*``H$ だったから, $M[G*H*K] \models ``\forall\alpha < \gamma,\ (j^*``H) \cap j^*(D_\alpha) \neq \emptyset"$ となる.

最後に,

$$M[G*H*K] \models ``\forall p, q \in j^*``H,\ \exists r \in j^*``H,\ (r \leq p, q)"$$

も成立していることに注意する.

以上より,

$$M[G*H*K] \models ``j^*``H \text{ で生成されるフィルターは } j^*(\mathcal{D})\text{-generic."}$$

すなわち,

$$M[G*H*K] \models ``j^*(Q) \text{ 上の } j^*(\mathcal{D})\text{-generic なフィルターが存在する."}$$

が導かれる. j^* が初等的埋め込みであることから,

$$V[G] \models ``Q \text{ 上の } \mathcal{D}\text{-generic なフィルターが存在する."}$$

となり, 証明が終わった. □

参考文献

[1] U. Abraham, Proper Forcing, In “Handbook of Set Theory” (M. Foreman and A. Kanamori, eds.), Springer-Verg, 2010, 333-394.

[2] J. E. Baumgartner, Iterated forcing, In “Surveys in Set Theory” (A. R. D. Mathias, ed.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 87, Cambridge-New York, 1983, 1-59.

[3] J. E. Baumgartner, Applications of the Proper Forcing Axiom, In “Handbook of Set-Theoretic Topology” (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1984, 913-959.

[4] M. Bekkali, Topics in Set Theory, Lecture Notes in Mathemathics 1476, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[5] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model Theory, Stud. Logic Foundations Math. 73, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, third edition, 1990.

[6] P. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, I Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1143-1148.

[7] P. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, II Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51 (1964), 105-110.

[8] J. Cummings, Iterated Forcing and Elementary Embeddings, In “Handbook of Set Theory” (M. Foreman and A. Kanamori, eds.), Springer-Verg, 2010, 775-884.

[9] H. G. Dales and W. H. Woodin, An Introduction to Independence for Analysts, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 115, Cambridge University Press, 1987.

[10] T. J. Jech, Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals, Ann. Math. Logic 5 (1972/73), 165-198.

[11] T. J. Jech, Set theory, The third millennium edition, revised and expanded, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[12] A. Kanamori, The Higher Infinite, Large cardinals in set theory from their beginnings, Second edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. / 邦訳, 渕野昌, 巨大基数の集合論, シュプリンガーフェアラーク東京, 1998.

[13] K. Kunen, Set theory, An introduction to independence proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980. / 邦訳, 藤田博司, 集合論-独立性証明への案内, 日本評論社, 2008.

[14] R. Laver, Making the supercompactness of κ indestructible under κ-directed closed forcing,

Israel J. Math. 29 (1978), no. 4, 385-388.

[15] D. A. Martin and R. M. Solovay, Internal Cohen extensions, Ann. Math. Logic 2 (1970), no. 2, 143-178.

[16] E. Schimmerling, Combinatorial principles in the core model for one Woodin cardinal, Ann. Pure Appl. Logic 74 (1995), no. 2, 153-201.

[17] S. Shelah, Proper Forcing, Lecture Notes in Mathematicts 940, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[18] S. Shelah, Proper and Improper Forcing, Perspectives in Mathematical Logic 29, Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[19] R. M. Solovey and S. Tennenbaum, Iterated Cohen extensions and Souslin's problem, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 201-245.

[20] B. Veličković, Forcing axioms and stationary sets, Adv. Math. 94 (1992), no. 2, 256-284.

謝辞

本論文の作成に関し, 竹内耕太君には御協力をしてもらい感謝しています. そして, 塩谷真弘先生にはセミナーなどを通じ様々な面で御指導頂きました. 心より感謝申し上げます.

2012 年 2 月　山本啓太