

ネットワーク形成のモデルにおける 効率性と安定性(1)：プレイヤーが 4人の場合のコネクションモデル

内田 誠吾^{*}・飯村 允基[†]・穂刈 享[‡]

1 はじめに

複数のプレイヤーがいてどのプレイヤーとどのプレイヤーの間にリンクが結ばれ全体としてどのようなネットワークが形成されるかによって各プレイヤーの利得が変わってくる状況を扱う「ネットワーク形成のモデル」は、売り手と買い手のネットワークや自由貿易のネットワークなど様々な問題の分析に応用されており、ゲーム理論の数ある応用分野の中でも最も重要なものの1つとなっている¹。以下では、Jackson and Wolinsky [5] が分析している「コネクションモデル」をプレイヤーが4人の場合に限定して考察する。

^{*} 筑波大学人文社会科学研究所准研究員

[†] 筑波大学人文社会科学研究所博士課程在籍

[‡] 筑波大学人文社会科学研究所助教授

¹ この分野における研究を紹介した論文を集めたものとしては Demange and Wooders [1] および Dutta and Jackson [2] がある

2 コネクションモデル(プレイヤーが4人の場合)

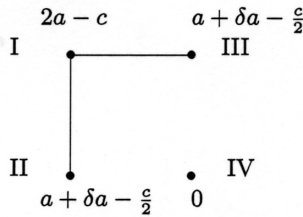
I, II, III, IVの4人のプレイヤーがいて、リンクが1本も結ばれていないときの利得は0とする。

$$\begin{array}{cc}
 \text{I} & \begin{array}{c} 0 \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \bullet \end{array} & \text{III} \\
 \\
 \text{II} & \begin{array}{c} \bullet \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ 0 \end{array} & \text{IV}
 \end{array}$$

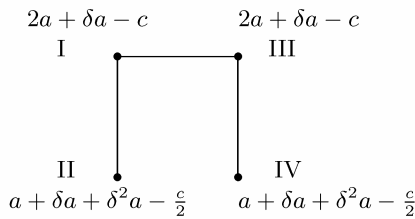
リンクを結ぶためのコストはどのリンクについても一定でこれを c とする。このコストをリンクの両端の2人のプレイヤーでどのように負担するかで各プレイヤーの利得は変わってくるのだが、本稿では2人で折半するケースを考える。IとIIがリンクを結んだ場合、IはIIと直接に結ばれたことによる利得 a を得て、 $\frac{c}{2}$ だけのコストを支払うことになる。IIの利得も同様となる。

$$\begin{array}{cc}
 \text{I} & \begin{array}{c} a - \frac{c}{2} \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ a - \frac{c}{2} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \bullet \end{array} & \text{III} \\
 \\
 \text{II} & & \begin{array}{c} \bullet \\ 0 \end{array} & \text{IV}
 \end{array}$$

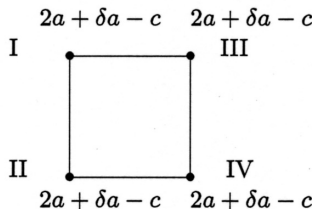
さらに続けてIがIIIとリンクを結んだ場合、IはIIIと直接に結ばれたことによる利得 a を得て、 $\frac{c}{2}$ だけのコストを支払うことになり、Iの利得は全部で $2a - c$ となる。IIIはIと直接に結ばれたことによる利得 a を得て、 $\frac{c}{2}$ だけのコストを支払うことになる。さらに、IとIIの間にリンクがあるので、IIIはIIとプレイヤーを1人隔てて間接的に結ばれることになり、割り引かれた利得 a を得る。ここで $0 < \alpha < 1$ とする。IIIの利得は全部で $a + \alpha(a - \frac{c}{2})$ となる。



続けて III が IV とリンクを結んだ場合、IV は $\frac{c}{2}$ だけのコストを支払い III と直接に結ばれたことによる利得 a を得て、I と 1 人隔てて間接的にリンクで結ばれたことによる利得 a を得て、さらに、II と 2 人隔ててリンクで結ばれることによる利得 $2a$ を得る。従って、IV の総利得は $a + a + 2a - \frac{c}{2}$ となる。



さらに続けて、IV が II とリンクを結んだ場合、IV は II と直接的に結ばれているし、さらに、2 人隔てて間接的にリンクで結ばれているが、こうした場合には最短の距離のつながりからの利得のみが反映されるものとする。この状況における各プレイヤーの利得は $2a + a - c$ となる。



以下同様に任意のネットワークにおける各プレイヤーの利得を計算すると、図 1 のようになる。

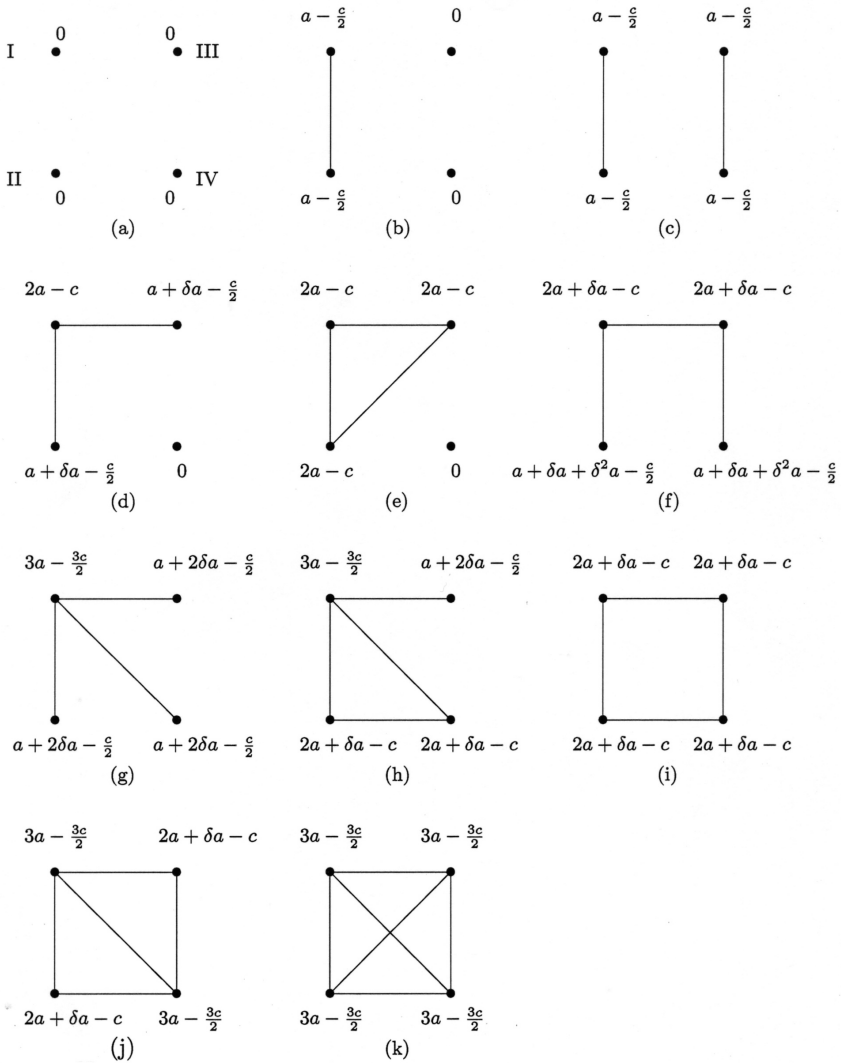


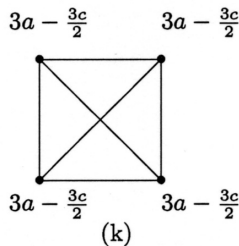
図1 各ネットワークにおける各プレイヤーの利得

2人のプレイヤーでリンクを新たに結ぶ場合には2人の同意が必要であり、既に結ばれているリンクを切断する場合には一方的に切断できるという状況を考える。この状況の下で、所与のネットワークにおいて、

どのプレイヤーにも既に存在するリンクを切断するインセンティブがなく
 どの2人のプレイヤーにも新たにリンクを結ぶインセンティブがない
 という場合、このネットワークは安定的(bilaterally stable)であるという。

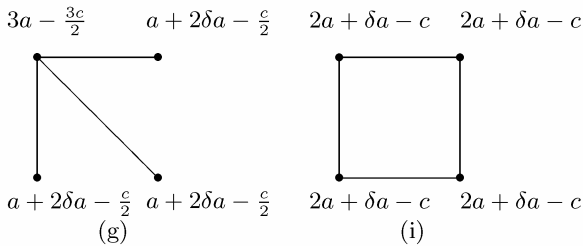
どのネットワークがパレート最適または安定的であるかは c と a と の値によって変わってくる。

ケース1 . $0 < c < 2a(1 - \frac{c}{2a})$ のとき、 $a < a - \frac{c}{2}$ となるので



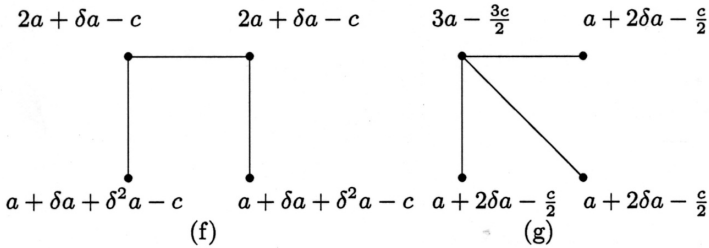
が唯一のパレート最適なネットワークであり、かつ唯一の安定的なネットワークである。

ケース2 . $2a(1 - \frac{c}{2a}) < c < 2a(1 - \frac{c}{2a})$ のとき、 $a < a - \frac{c}{2} < a$ となるので



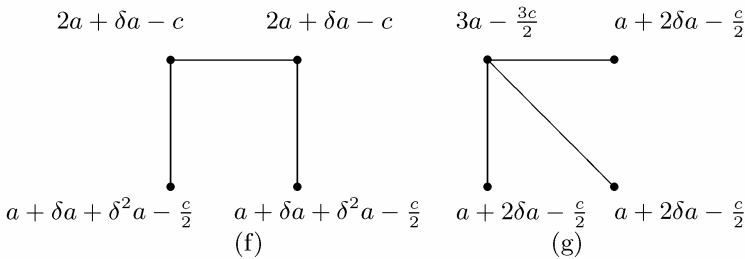
の2つがパレート最適かつ安定的なネットワークである。

ケース3 . $2a(1 - \delta^2) < c < 2a$ のとき , $0 < a - \frac{c}{2} < \delta^2 a$ となるので

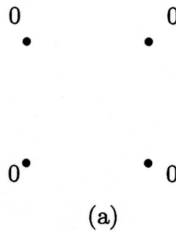


の2つがパレート最適かつ安定的なネットワークである。

ケース4 . $2a < c < 2a + a$ のとき , $-\frac{1}{2} a < a - \frac{c}{2} < 0$ となるので



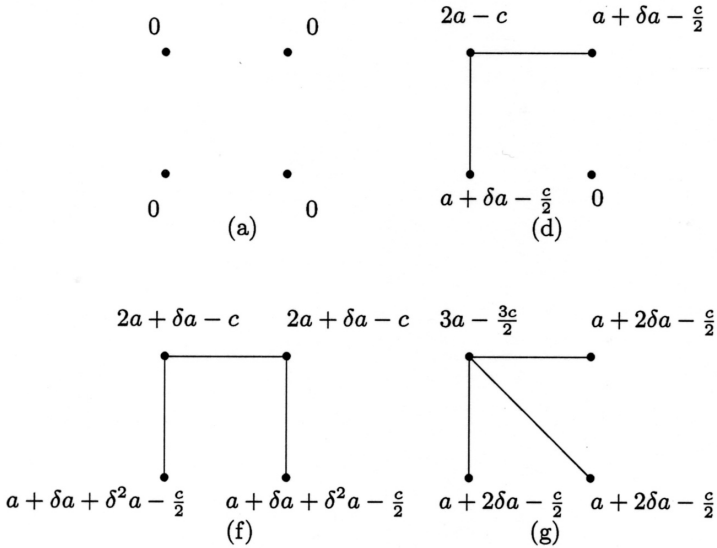
の2つがパレート最適であり ,



のみが安定的である。従ってこのケースにおいてはパレート最適かつ安定的なネットワークは存在しないということになる。他の様々なモデルにおいてもこのような状況が生じることが知られている²。

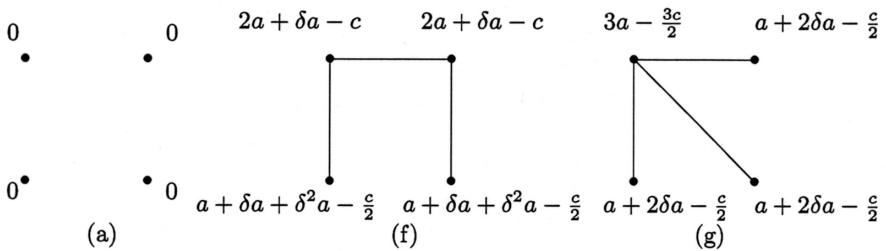
² この点について詳しくは Jackson and Wolinsky [5] を参照。

ケース5 . $2a + a < c < 2a + 2a$ のとき , $2a + a - c < 0 < 2a + 2a - c$ となるので



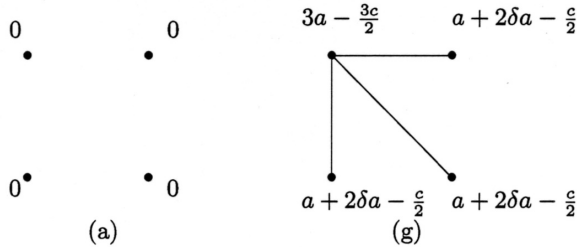
の4つがパレート最適であり , (a)が唯一の安定的なネットワークである。

ケース6 . $2a + 2a < c < 2a + 2a + 2^2 a$ のとき , $2a + 2a - c < 0 < 2a + 2a + 2^2 a - c$ となるので



の3つがパレート最適であり , (a)が唯一の安定的なネットワークである。

ケース7 . $2a+2 < a+2 < 2a < c < 2a+4$ a のとき , $-2 < a - \frac{c}{2} < -a - 2a$ となるので



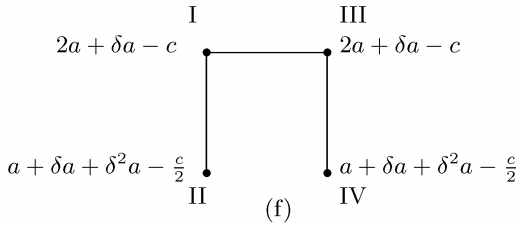
の2つがパレート最適であり , (a)が唯一の安定的なネットワークである。

ケース8 . $2a+4 < a < c$ のとき , $a - \frac{c}{2} + 2 < a < 0$ となるので , リンクが全く無い (a)が唯一のパレート最適なネットワークであり ,かつ唯一の安定的なネットワークである。

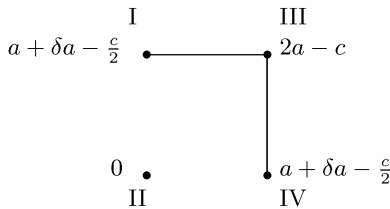
3 コネクションモデルにおけるダイナミック・プロセス

本節では , 全くリンクが結ばれていない状態または全てのリンクが結ばれている状態からスタートして , 各期において2人のプレイヤーがランダムに選ばれて , その2人の中のリンクが結ばれていない場合はリンクを結ぶかどうかを決定し , 既に2人の中にリンクが結ばれている場合にはそのリンクを切断するかどうかを決定していくというプロセスを考える。その際 , 各プレイヤーは近視眼的(myopic)に行動すると仮定する。すなわち , リンクを結ぶかどうかまたは切断するかどうかを決断する場合には , 次期における利得が大きくなるかどうかだけを考えるものとする。このようなダイナミック・プロセスを考えることにより安定的なネットワークが複数ある場合には , どのネットワークが実現しやすいかといった事を分析することができる。

例えば , $a > a - \frac{c}{2} > 2a > 0$ を仮定し , 所与のネットワークが

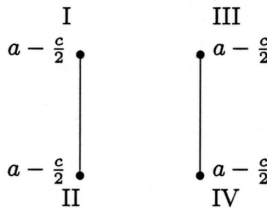


のとき、プレイヤーIとIIが選ばれた場合を考える。IとIIの間には既にリンクが存在しているので、比較の対象は



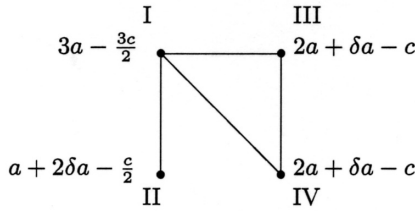
となる。 $a > a - \frac{c}{2} > 2a > 0$ の下では、 $2a + a - c > a + a - \frac{c}{2}$ かつ $a + a + 2a - \frac{c}{2} > 0$ となるのでIとIIは両方ともリンクを結んだ状態を選ぶ。よって次期のはじめのネットワークは(f)のままとなる。

IとIIIが選ばれた場合にはIとIIIの間には既にリンクが存在しているので、比較の対象は



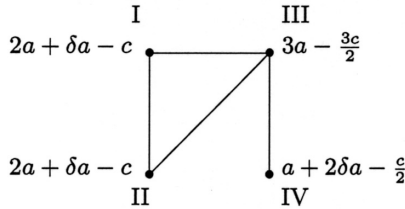
となる。 $a > a - \frac{c}{2} > 2a > 0$ の下では、 $2a + a - c > a - \frac{c}{2}$ となるのでIとIIIは両方ともリンクを結んだ状態を選ぶ。よって次期のはじめのネットワークは(f)のままとなる。

次に、IとIVが選ばれた場合を考える。IとIVの間でリンクを結ぶと、



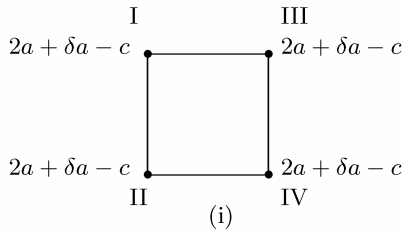
となり, $a > a - \frac{c}{2} > 2a > 0$ の下では, $2a + a - c > 3a - \frac{3c}{2}$ なので I にとっては新たにリンクを結ばない方が望ましいが, $a + 2a - c > a + a + 2a - \frac{c}{2}$ となるので IV にとってはリンクを結ぶほうがよい。こうした場合には両者の合意が成立しないのでリンクは結ばれないことになる。よって次期のはじめのネットワークは(f)のままとなる。

続いて II と III が選ばれた場合を考える。II と III の間でリンクが結ばれると,



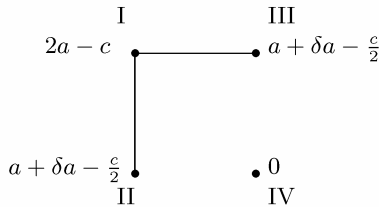
となるのでこれは I と IV が選ばれたケースと本質的に同じであり, 両者の合意が成立しないのでリンクは結ばれないことになる。

II と IV が選ばれた場合には, II と IV の間でリンクを結ぶと,



となる。 $a > a - \frac{c}{2} > \frac{1}{2}a > 0$ の下では、 $2a + a - c > a + a + \frac{1}{2}a - \frac{c}{2}$ となるので、II と IV は両方ともリンクを結んだ状態を選ぶ。よって次期のはじめのネットワークは(i)になる。

III と IV が選ばれた場合には III と IV の間には既にリンクが存在しているので、比較の対象は

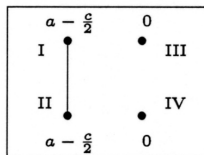


となり、これは I と II が選ばれたケースと同様に III と IV はリンクを結んだままの状態を選ぶ。よって次期の初めのネットワークは(f)のままとなる。

次に、 $a > a - \frac{c}{2} > \frac{1}{2}a > 0$ という仮定の下で、どのプレイヤーも全くリンクを結んでいない状態からスタートした場合に、3 期までのネットワークの変化がどのようなものになるかをやや詳しく説明することにする。

ランダムに 2 人のプレイヤーが選ばれるが、 $a - \frac{c}{2} > 0$ の下では全てのプレイヤーがリンクを結ぼうとするので、1 期から 2 期への推移は図 2 のようになる。

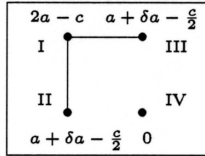
次に、例えば 2 期の初めの状態が



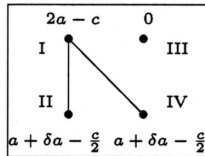
であったとすると、 $a > a - \frac{c}{2} > \frac{1}{2}a > 0$ の下ではネットワークの推移は次のようになる。I と II が確率 $\frac{1}{6}$ で選ばれるが、 $a - \frac{c}{2} > 0$ なので I と II はともにリンクを切断するインセンティブをもたない。従って、3 期の初めのネットワーク

はそのままになる。

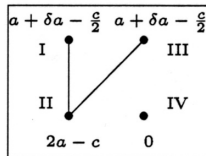
I と III が確率 $\frac{1}{6}$ で選ばれるが、 $a - \frac{c}{2} > 0$ の下では $2a - c > a - \frac{c}{2}$ かつ $a + \frac{c}{2} > 0$ となるので I と III はともにリンクを結ぼうとする。従って、3期の初めのネットワークは



となる。同様に、他の場合における3期の初めのネットワークはIとIVが確率 $\frac{1}{6}$ で選ばれると



となり、IIとIIIが確率 $\frac{1}{6}$ で選ばれると



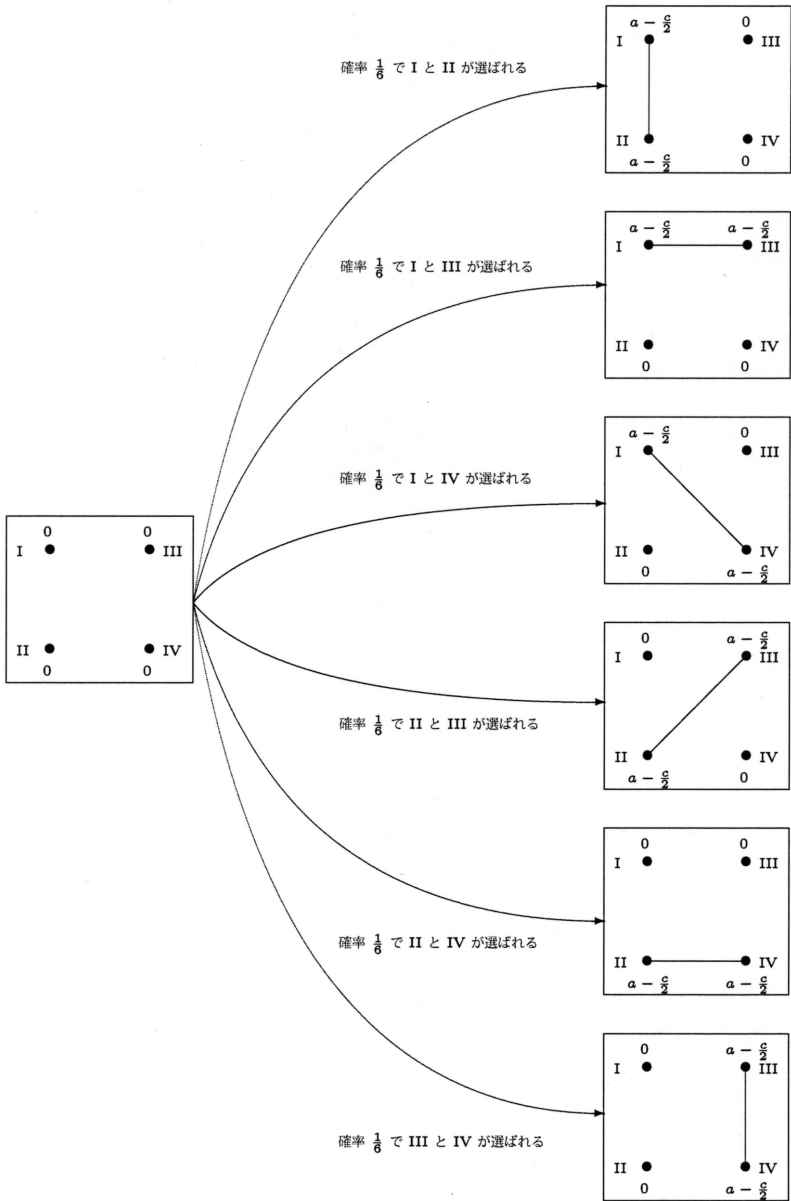
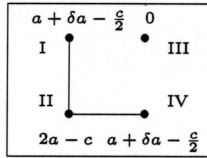
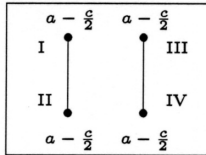


図2 1期から2期

となり、II と IV が確率 $\frac{1}{6}$ で選ばれると

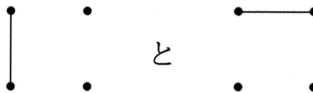


となる。また III と IV が確率 $\frac{1}{6}$ で選ばれるが、 $a - \frac{c}{2} > 0$ なので 3 期の初めには

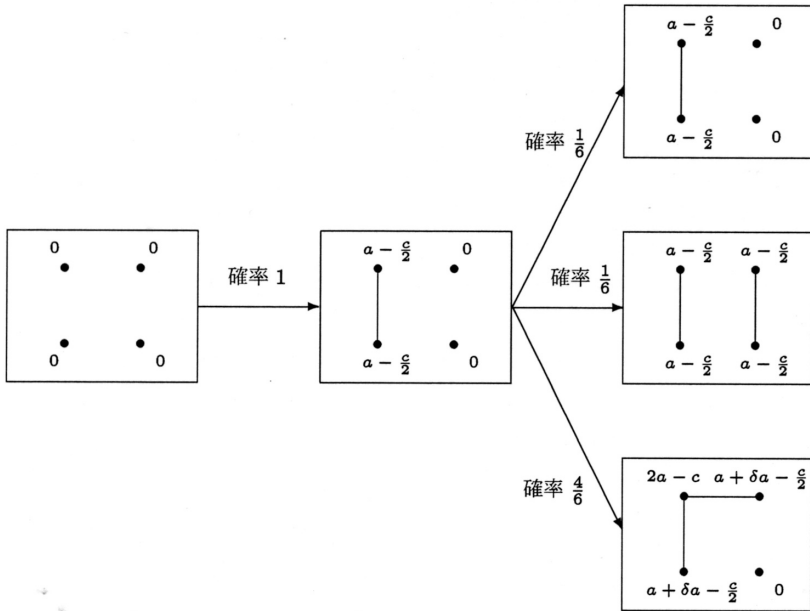


となる。1 期から 3 期までの全てのプロセスを表すと図 3 のようになる。

ここで、プレイヤーの名前を無視して、例えば



を同じ「状態」とみなすことにすると上のプロセスはかなり単純化され



となる。以下ではこのような「単純化されたプロセス」を考えることにする。

各ネットワークからの確率的な推移を第2節の8つのケースについて調べて図示すると図4から図11のようになる。

ケース4とケース5では、パレート最適なネットワークは異なるが、安定的なネットワークおよびダイナミクスは同じになっている。ケース6とケース7とケース8の3つのケースにおいても、パレート最適なネットワークが異なるだけで、安定的なネットワークとダイナミクスは同じになっている。

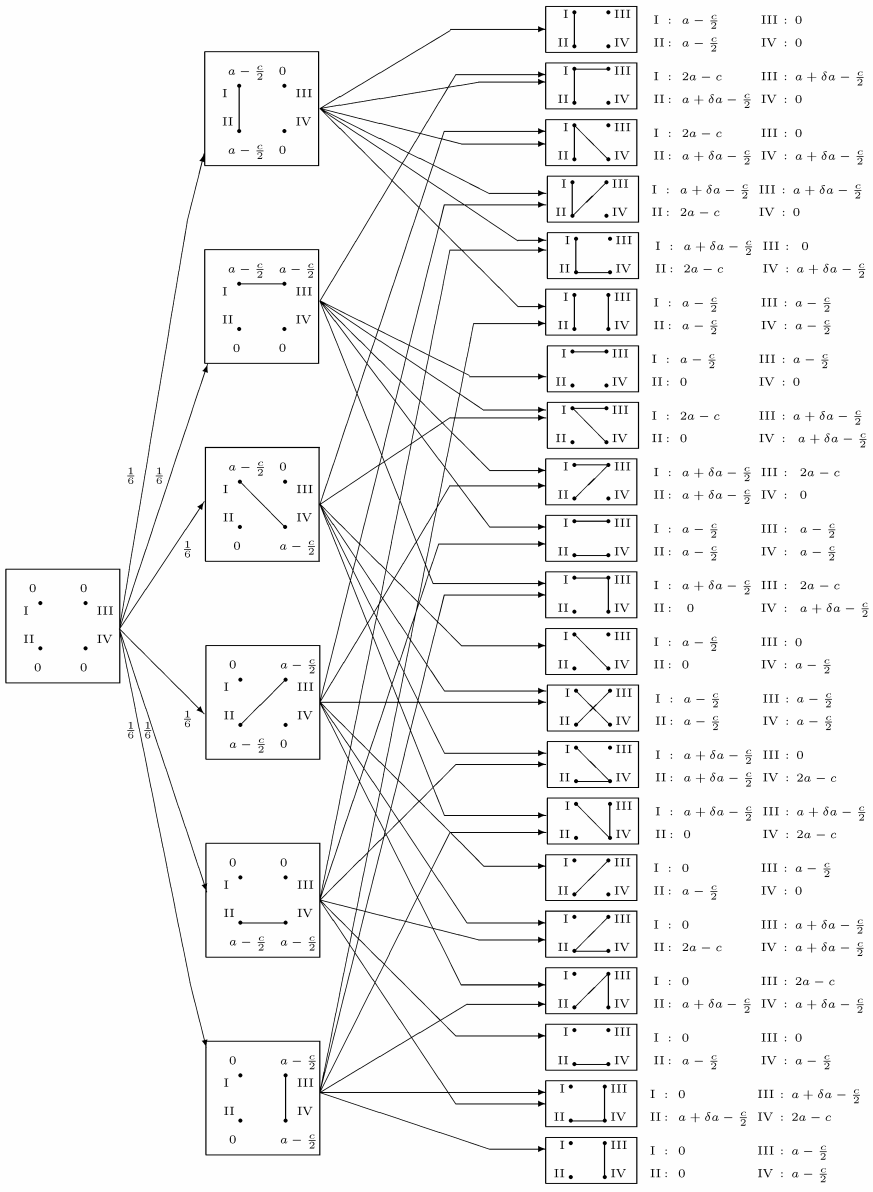


図3 1期から3期

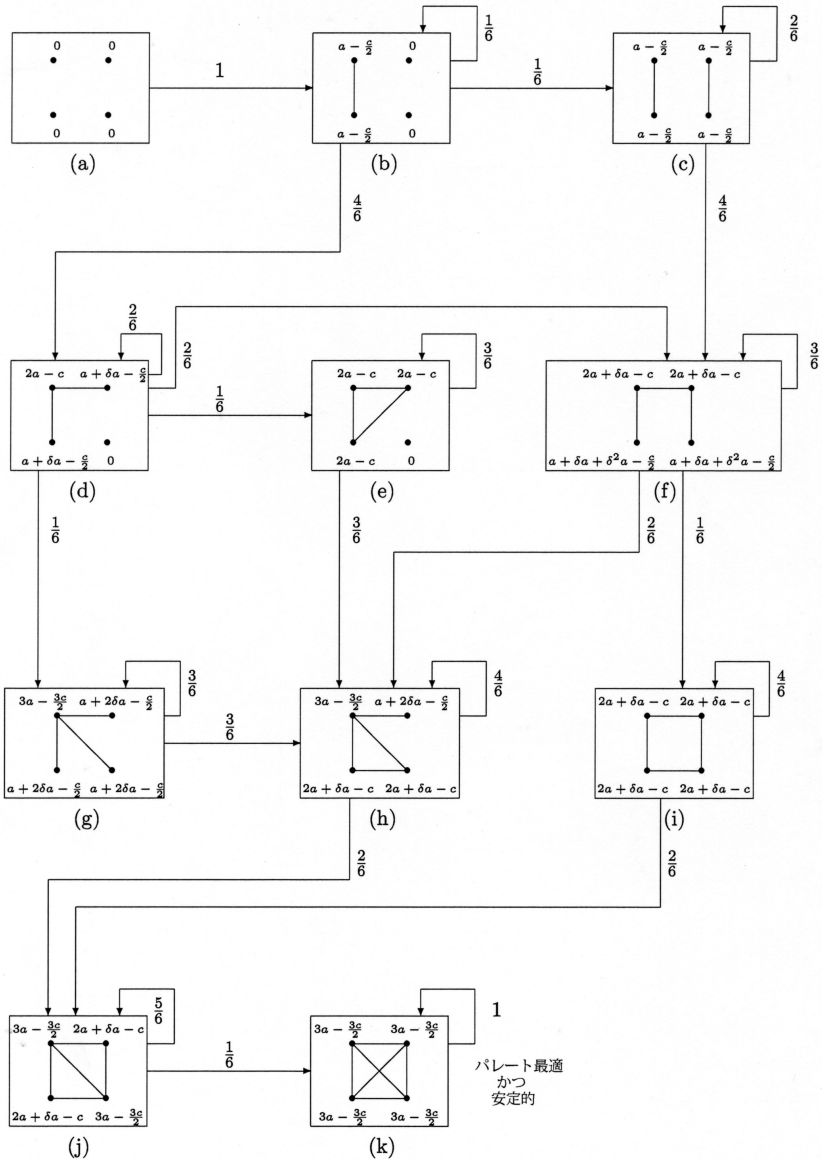


図4 $a - \frac{c}{2} > a > 0$ の場合(第2節のケース1)

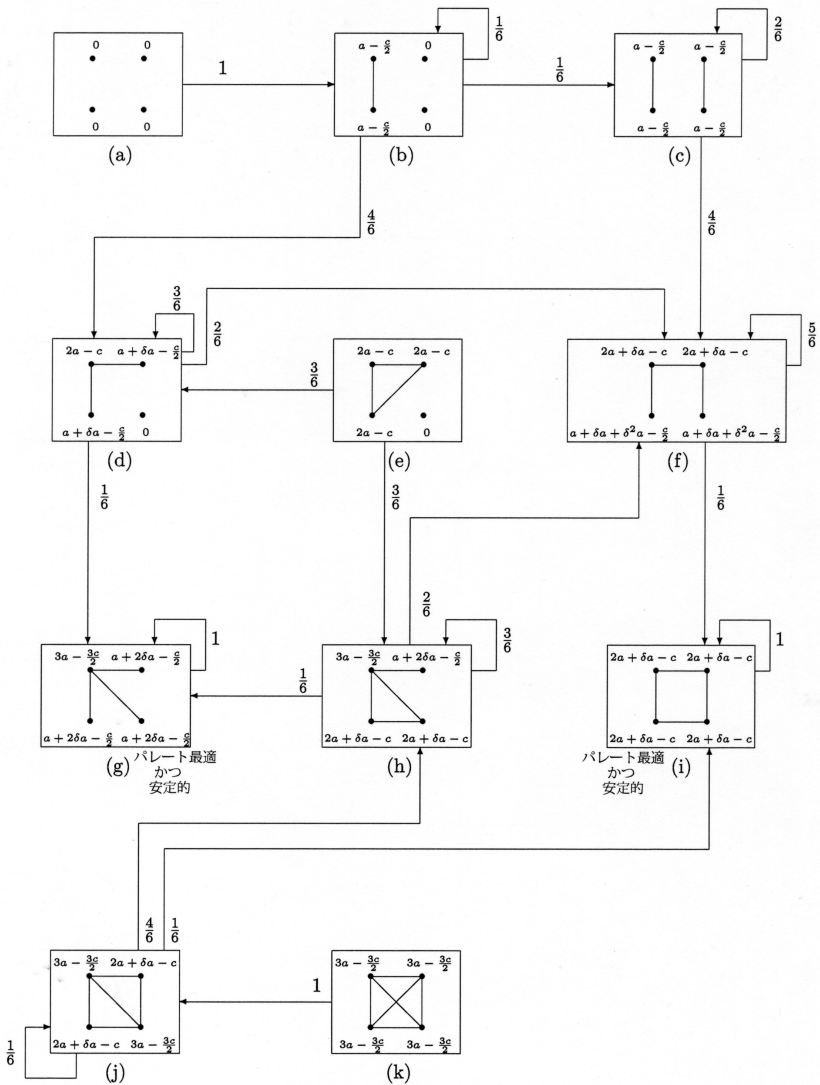


図5 $a > a - \frac{c}{2} > \frac{2}{3}a > 0$ の場合(第2節のケース2)

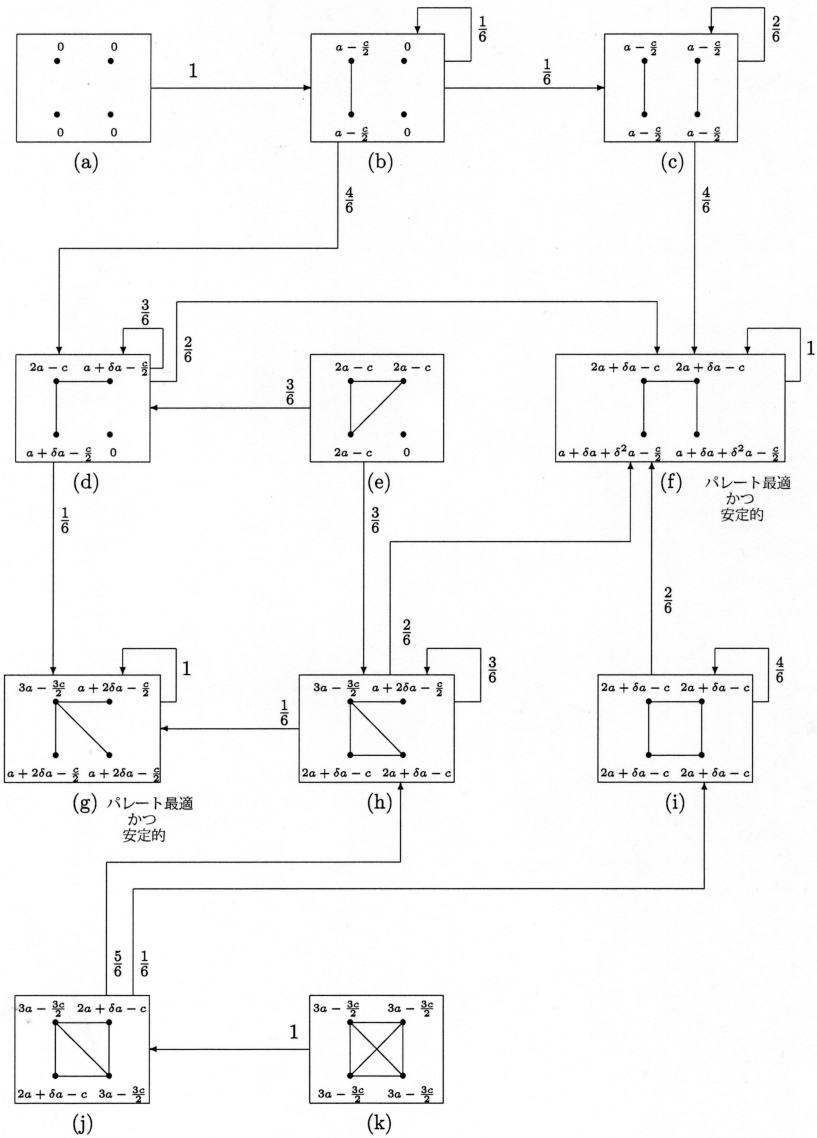


図6 $2a > a - \frac{c}{2} > 0$ の場合(第2節のケース3)

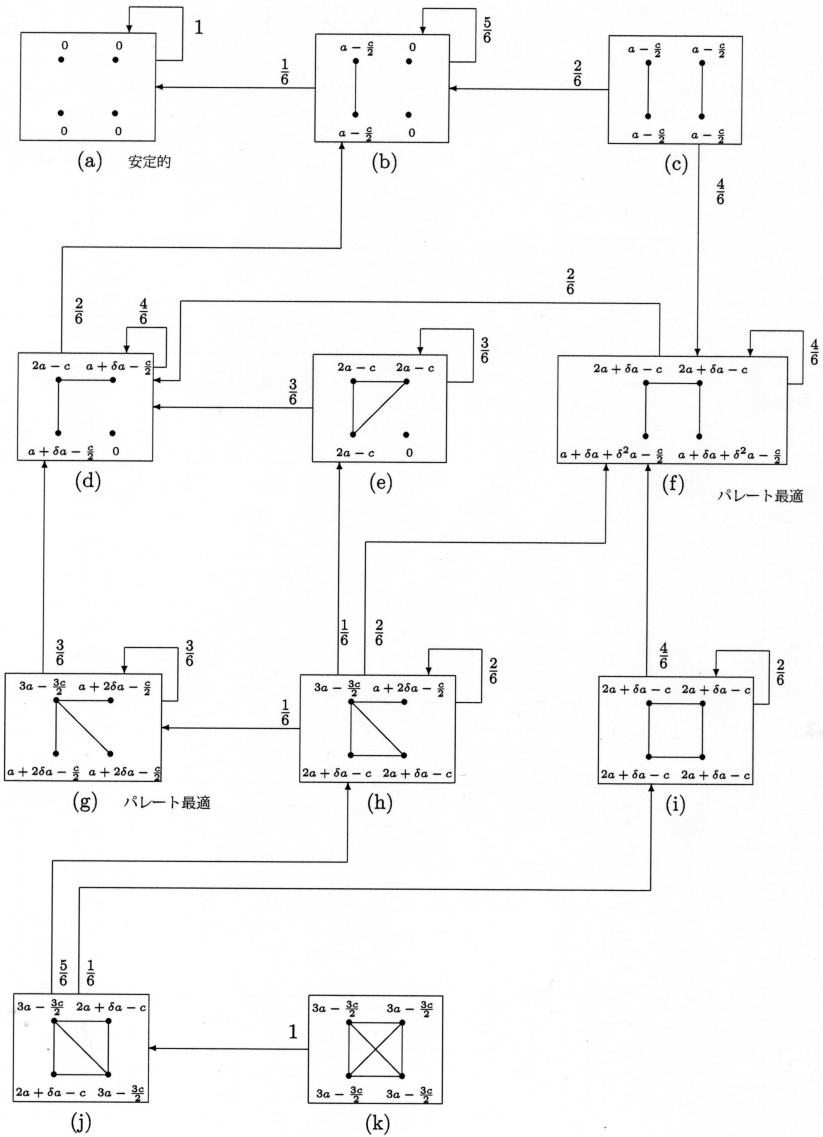


図7 $0 > a - \frac{c}{2} > -\frac{a}{2}$ の場合(第2節ケース4)

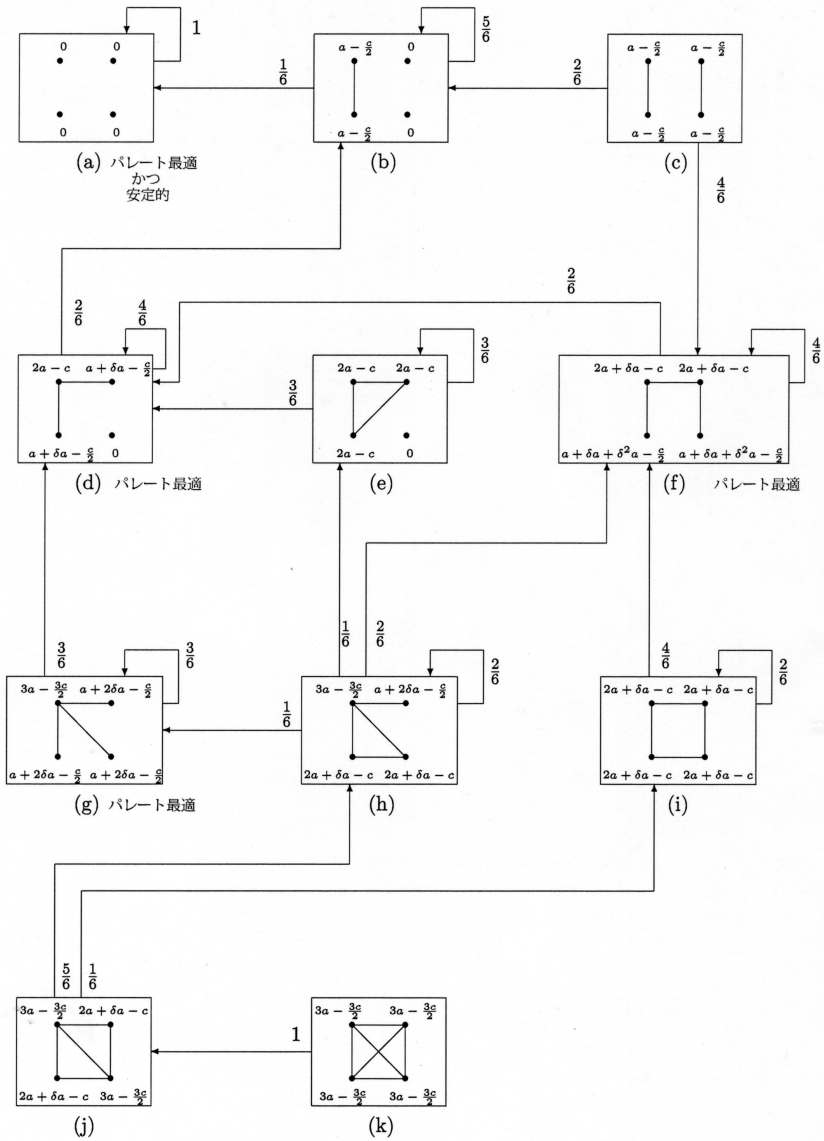


図8 $-\frac{a}{2} > a - \frac{c}{2} > -a$ の場合(第2節のケース5)

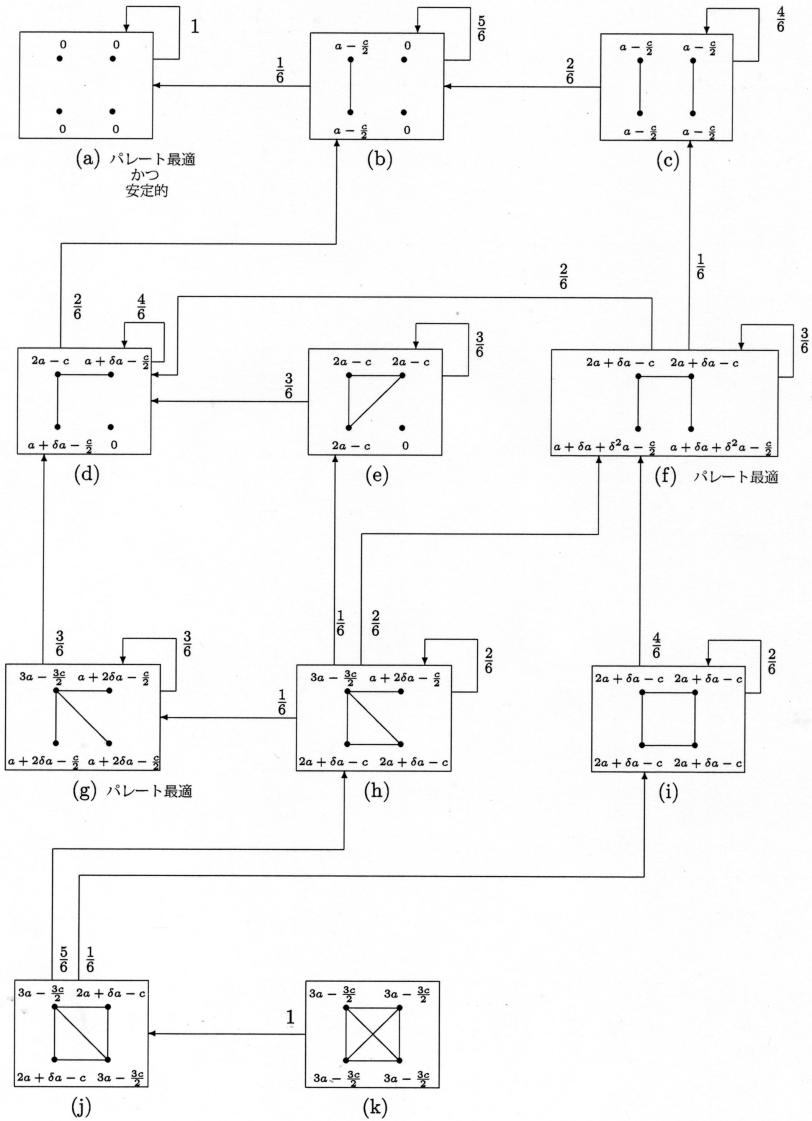


図9 - $a > a - \frac{c}{2} > a - 2a$ の場合(第2節のケース6)

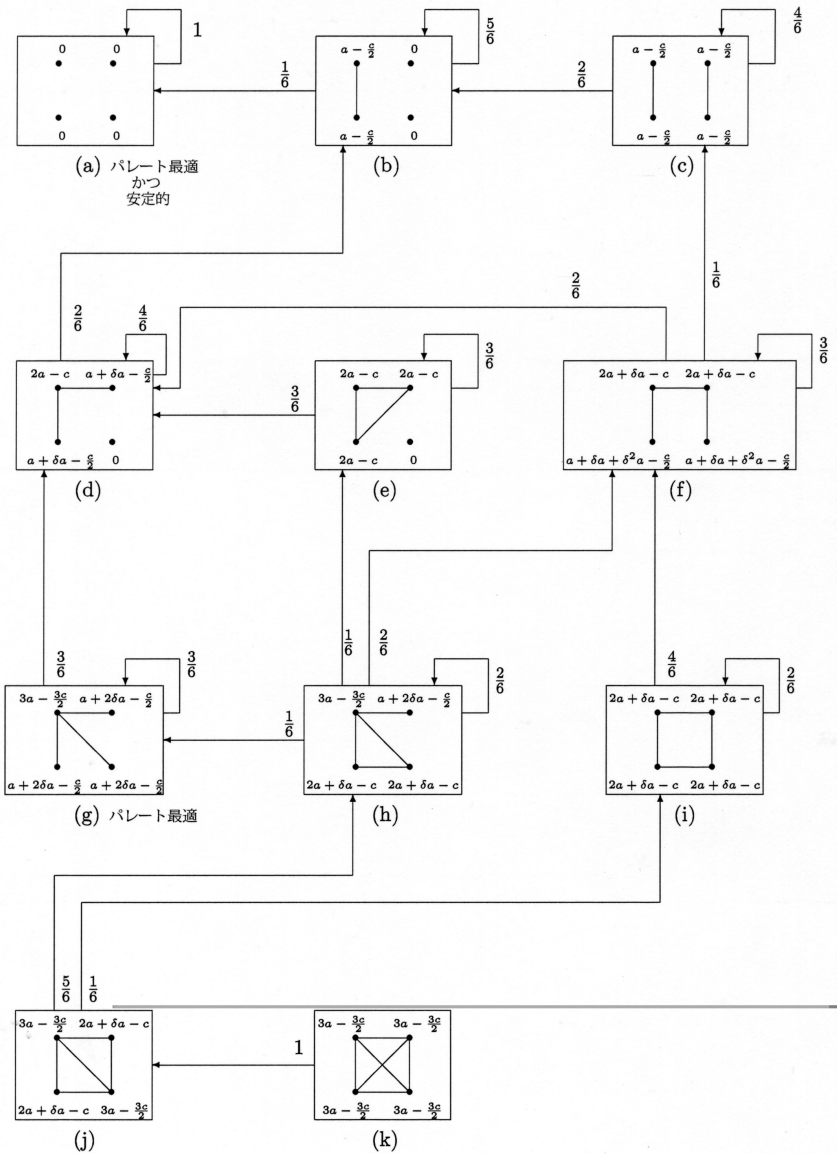


図 10 - $a - \frac{c}{2} > -2a$ の場合(第 2 節のケース 7)

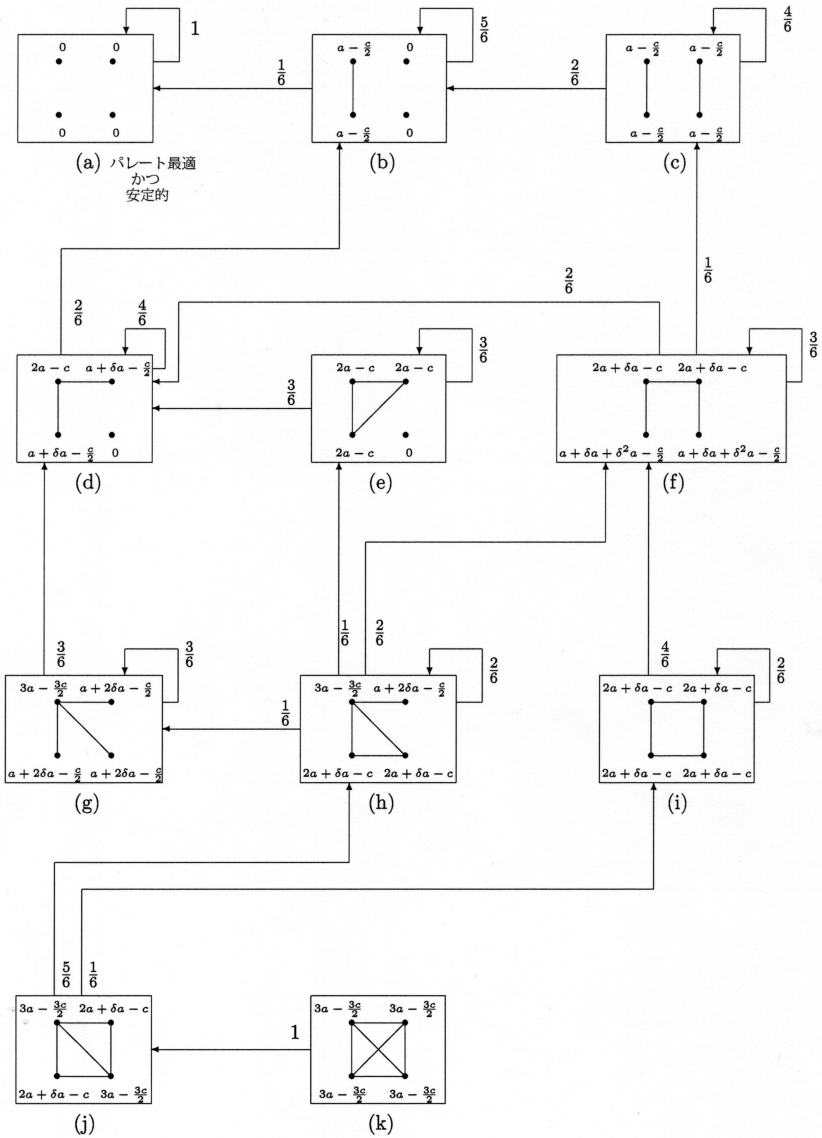


図 11 - 2 $a > a - \frac{c}{2}$ の場合(第 2 節のケース 8)

Excel によるシミュレーション

各ケースにおけるネットワーク間の確率的な推移がわかったので、以下では、全くリンクが結ばれていない状態または全てのリンクが結ばれている状態からスタートした場合に、各ネットワークが実現する確率が時間が経つにつれてどのように変化していくのかを Excel を使ってシミュレートする。

ここでは $a > a - \frac{c}{2} > 0$ の場合(第2節のケース2)について Excel への入力の仕方を詳しく説明する。分かりやすくするために、例えば、B7 のセルには第7期においてネットワーク(b)が実現する確率が表示され、J10 のセルには第10期においてネットワーク(j)が実現している確率が表示されるようにする。

まずはネットワーク(a)からスタートすることにして、A1 のセルには 1 を入力し、B1 から K1 までには 0 を入力する。第2期では、図5において(a)に向かう矢印はないので A2 には 0 を入力する。(b)には、(a)から確率 1 で入ってきて、ネットワーク(b)から確率 $\frac{1}{6}$ でまた(b)に戻るなので、B2 のセルには

$$=A1+(1/6)? B1$$

と入力する。ネットワーク(c)には(b)から確率 $\frac{1}{6}$ で入ってきて、(c)から確率 $\frac{2}{6}$ でまた(c)に戻るなので、C2 のセルには

$$=(1/6)? B1+(2/6)? C1$$

と入力する。ネットワーク(d)には(b)から確率 $\frac{4}{6}$ で入ってきて、(d)から確率 $\frac{3}{6}$ でまた(d)に戻り、(e)から確率 $\frac{3}{6}$ で入ってくるので、D2 のセルには

$$=(4/6)? B1+(3/6)? D1+(3/6)? E1$$

と入力する。ネットワーク(e)には(e)に向かっている矢印はないので E2 のセルには 0 を入力する。ネットワーク(f)には(c)から確率 $\frac{4}{6}$ で、(d)から確率 $\frac{2}{6}$ で、(f)から確率 $\frac{5}{6}$ でまた(f)に戻り、(h)から確率 $\frac{2}{6}$ で入ってくるので、F2 は

$$= (4/6)? C1 + (2/6)? D1 + (5/6)? F1 + (2/6)? H1$$

と入力する。ネットワーク(g)には(d)から確率 $\frac{1}{6}$ で入ってきて、(g)から確率1でまた(g)に戻り、(h)から確率 $\frac{1}{6}$ で入ってくるので、G2のセルには

$$= (1/6)? D1 + 1? G1 + (1/6)? H1$$

と入力する。ネットワーク(h)には(e)から確率 $\frac{3}{6}$ で、(h)から確率 $\frac{3}{6}$ でまた(h)に戻り、(j)から確率 $\frac{4}{6}$ で入ってくるので、H2のセルには

$$= (3/6)? E1 + (3/6)? H1 + (4/6)? J1$$

と入力する。ネットワーク(i)には(f)から確率 $\frac{1}{6}$ で入ってきて、(i)から確率1でまた(i)に戻り、(j)から確率 $\frac{1}{6}$ で入ってくるので、I2のセルには

$$= (1/6)? F1 + 1? I1 + (1/6)? J1$$

と入力する。ネットワーク(j)には(j)から確率 $\frac{1}{6}$ でまた(j)に戻り、(k)から確率1で入ってくるのでJ2のセルには

$$= (1/6)? J1 + K1$$

と入力する。最後に、(k)に向かう矢印はないのでK2には0を入力する。

第3期以降については1つ1つ入力する必要はなく、A2からK2までをコピーして、例えば、A100からK100まで貼り付けることにより100期分の入力を行うことができる。この作業によって、例えば、C4のセルは

$$= (1/6)? B3 + (2/6)? C3$$

と入力され、C5のセルには、

$$= (1/6) \cdot B4 + (2/6) \cdot C4$$

と入力されるといったように、A2 から K2 まで入力されたものがコピー先では update されている³。

以上のように入力した Excel シートを用いて、第 2 節のケース 2 においてネットワーク (a) からスタートした場合についてのシミュレーションを行うことができ、同様にして、他の各ケースにおけるシミュレーションも行うことができる⁴。

ダイナミック・プロセスの作り方から容易に推察できるように、安定的なネットワークが 1 つだけのケースでは、どのネットワークからスタートしたとしても十分時間が経てば、安定的なネットワークが実現している確率がほぼ 1 となる。

ケース 2 では (g) と (i) がともに安定的であるが、(a) からスタートしても (k) からスタートしても、30 期以降では他のネットワークが実現している確率はほぼ 0 となり、(i) の確率のほうが (g) の確率よりも高くなっている。

ケース 3 では (f) と (g) がともに安定的であるが、(a) からスタートしても (k) からスタートしても、10 期以降では他のネットワークが実現している確率はほぼ 0 となり、(f) の確率のほうが (g) の確率よりも高くなっている。

4 エラーのあるダイナミクスと確率的安定性

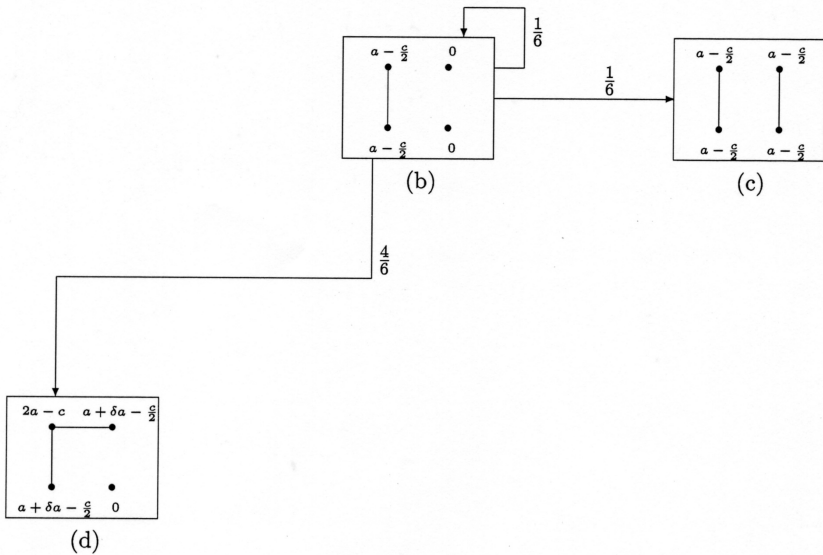
次に、いままで考察してきたダイナミクスにおいて、小さな確率 でエラーが生じるケースを考える。各期において 2 人のプレイヤーがランダムに選ばれ、両方ともリンクを新たに結ぶこと(あるいは既にあるリンクを切らないこと)を

³ Excel のこの機能を利用して様々な経済モデルのシミュレーションを行うことができる。詳しくは Shone [6] を参照。

⁴ 入力済みの Excel ファイルは <http://member.social.tsukuba.ac.jp/hokari/index-J.html> からダウンロード可能。

選択した場合、確率 $1 - \frac{c}{2}$ でリンクは結ばれ、確率 $\frac{c}{2}$ でリンクは結ばれないと仮定する。同様に、ランダムに選ばれた2人のプレイヤーのうち最低1人がリンクを結ばない(あるいはリンクを切る)ことを選択した場合には確率 $1 - \frac{c}{2}$ でリンクは結ばれず、確率 $\frac{c}{2}$ でリンクは結ばれるものとする。

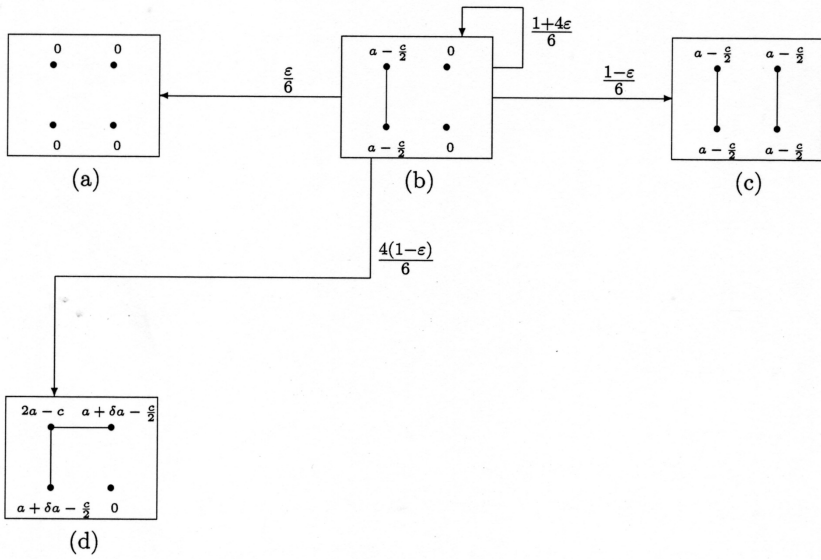
例えば、 $a > a - \frac{c}{2} > \frac{1}{2}a > 0$ (第2節のケース2)を仮定し、ネットワーク(b)からの確率的な推移はエラーがない場合には図5のように



となっている。エラーが生じる場合には

- ・ 確率 $\frac{1}{6}$ で I と II が選ばれ、確率 $1 - \frac{c}{2}$ で (b) のまま、確率 $\frac{c}{2}$ で (a) に移行、
- ・ 確率 $\frac{1}{6}$ で III と IV が選ばれ、確率 $1 - \frac{c}{2}$ で (c) に移行、確率 $\frac{c}{2}$ で (b) のまま、
- ・ 確率 $\frac{4}{6}$ で I と III, I と IV, II と III, あるいは II と IV が選ばれ、確率 $1 - \frac{c}{2}$ で (d) に移行、確率 $\frac{c}{2}$ で (b) のまま、

ということになるので、(b)からの確率的な推移は



となる。同様にして各状態からの推移を調べると図 12 のようになる。

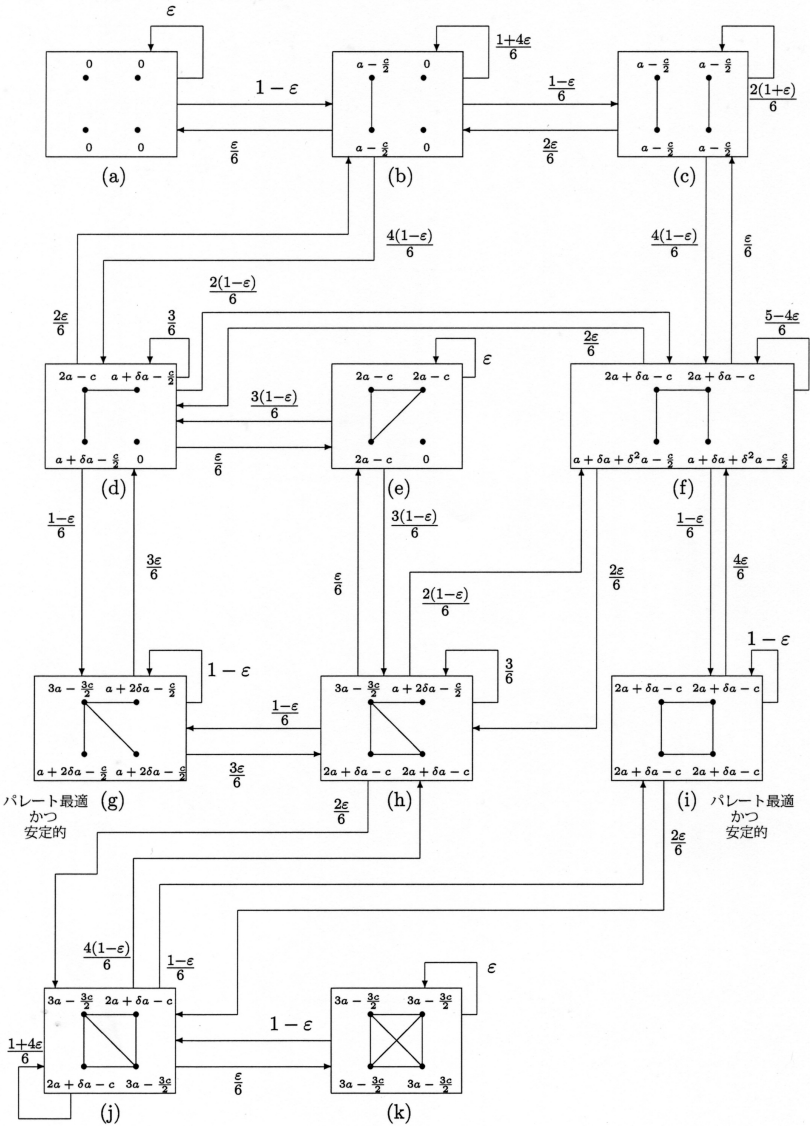


図 12 $a > a - \frac{c}{2} > 2a > 0$ (第 2 節のケース 2) の仮定の下で, 確率 > 0 でエラーが生じる場合のダイナミクス

図 12 においては, (i) どの状態についても次の期に同じ状態が実現する確率は 0 ではなく, (ii) どの 2 つの状態についても一方の状態からもう一方の状態に(直接的・間接的に)移行する確率も 0 ではない。この 2 つの条件を満たす確率的プロセスにおいては, いわゆる「定常分布」(stationary distribution) が 1 つだけ存在して, どの状態からスタートしたとしても, 状態の確率分布がその定常分布に収束することが知られている。

図 12 の確率的プロセスの定常分布の定義式は

$$p_a = ep_a + \frac{e}{6} \cdot p_b,$$

$$p_b = (1 - e) p_a + \frac{1+4e}{6} \cdot p_b + \frac{e}{3} \cdot p_c + \frac{e}{3} \cdot p_d,$$

$$p_c = \frac{1 - e}{6} \cdot p_b + \frac{1 + e}{3} \cdot p_c + \frac{e}{6} \cdot p_f,$$

$$p_d = \frac{2(1 - e)}{3} \cdot p_b + \frac{1}{2} \cdot p_d + \frac{1 - e}{2} \cdot p_e + \frac{e}{3} \cdot p_f + \frac{e}{2} \cdot p_g,$$

$$p_e = \frac{e}{6} \cdot p_d + ep_e + \frac{e}{6} \cdot p_h,$$

$$p_f = \frac{2(1 - e)}{3} \cdot p_c + \frac{1 - e}{3} \cdot p_d + \frac{5 - 4e}{6} \cdot p_f + \frac{1 - e}{3} \cdot p_h + \frac{2e}{3} \cdot p_i,$$

$$p_g = \frac{1 - e}{6} \cdot p_d + (1 - e) p_g + \frac{1 - e}{6} \cdot p_h,$$

$$p_h = \frac{1 - e}{2} \cdot p_e + \frac{e}{3} \cdot p_f + \frac{e}{2} \cdot p_g + \frac{e}{2} \cdot p_h + \frac{2(1 - e)}{3} \cdot p_j,$$

$$p_i = \frac{1 - e}{6} \cdot p_f + (1 - e) p_i + \frac{1 - e}{6} \cdot p_j,$$

$$p_j = \frac{e}{3} \cdot p_h + \frac{e}{3} \cdot p_i + \frac{1+4e}{6} \cdot p_j + (1-e)p_k,$$

$$p_k = \frac{e}{6} \cdot p_j + ep_k$$

であり，この11本のうちの10本と

$$p_a + p_b + p_c + p_d + p_e + p_f + p_g + p_h + p_i + p_j + p_k = 1$$

からなる11本の連立方程式を解くことにより， p_a の関数として定常分布を求めると次のようになる。

$$p_a = \frac{2e^3 + 102e^4 - 104e^5 + 24e^6}{225 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_b = \frac{12e^2 + 600e^3 - 1236e^4 + 768e^5 - 144e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_c = \frac{318e^2 - 948e^3 + 1014e^4 - 456e^5 + 72e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_d = \frac{30e + 1152e^2 - 3642e^3 + 3996e^4 - 1824e^5 - 288e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_e = \frac{30e^2 + 326e^2 - 756e^4 + 496e^5 - 96e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_f = \frac{1260e - 5016e^2 + 7788e^3 - 5856e^4 + 2112e^5 - 288e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_g = \frac{30 + 266e - 1378e^2 + 2334e^3 - 1844e^4 + 688e^5 - 96e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_h = \frac{150e + 624e^2 - 2850e^3 + 3516e^4 - 1728e^5 + 288e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5},$$

$$p_i = \frac{225 - 1110e + 2331e^2 - 2640e^3 + 1674e^4 - 552e^5 + 72e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5}$$

$$p_j = \frac{90e - 294e^2 + 888e^3 - 1308e^4 + 768e^5 - 144e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5}$$

$$p_k = \frac{15e^2 - 34e^3 + 114e^4 - 104e^5 + 24e^6}{255 + 686e - 2206e^2 + 1824e^3 - 584e^4 + 64e^5}$$

ここで $e = 0$ のとき、 $p_g = \frac{30}{255} \approx 0.12$ かつ $p_i = \frac{225}{255} \approx 0.88$ となり、 p_g と p_i 以外の確率は 0 となる。このとき、(g)と(i)の 2 つのネットワークは確率的安定(stochastically stable)であるという。ここで(g)と(i)は安定的なネットワークでありかつ確率的安定なネットワークとなっている。

複数ある安定的なネットワークの中で確率的安定なものとはそうでないものがある場合には、確率的安定なネットワークのほうが(長期的には)より実現しやすいネットワークであるとみなされるのであるが、上のケースと同様に第 2 節のケース 3 においても(f)と(g)が安定的なネットワークでありかつ確率的安定なネットワークとなっていることを示すことができるので、プレイヤーが 4 人の場合のコネクションモデルにおいては安定的なネットワークの集合と確率的安定なネットワークの集合は一致することになり、確率的安定かどうかという基準では複数ある安定的なネットワークのそれぞれを区別できないことになる。しかしながら、プレイヤーが 7 人の場合の Jackson and Wolinsky [5] の「共著者モデル」においては安定的ではあるが確率的安定ではないネットワークが存在することが Jackson and Watts [4] によって示されていることを踏まえると、コネクションモデルにおいてもプレイヤーの人数が多い場合には安定的ではあるが確率的安定ではないようなネットワークが存在することが予想される。

5 まとめと今後の課題

本稿と直接関係する先行研究としては Jackson and Wolinsky [5], Watts [7], Jackson and Watts [4] がある。この3つの論文と本稿における分析の違いをまとめると次のようになる。

Jackson and Wolinsky [5] では任意の人数のコネクションモデルにおける効率的なネットワークと安定的なネットワークを考察しているが、ダイナミック・プロセスは扱っていない。また、本稿では「効率的なネットワーク」として通常の意味でのパレート最適なネットワークを考察しているのに対して、Jackson and Wolinsky [5] では各プレイヤーの利得の合計が最大となるようなネットワークを考察している。

Watts [7] が考察しているコネクションモデルのダイナミック・プロセスにおいては、リンクで結ばれていない2人が選ばれた場合に、リンクを結びと同時に(2人が合意すれば)他のリンクを切ることができるとしている点が本稿の第3節における分析と異なっている。また、Watts [7] では「星型ネットワーク」(star)と呼ばれる特定のネットワーク(プレイヤーが4人の場合では(g)のネットワーク)が形成される確率がプレイヤーの数によってどう変化するかということ进行分析しているのだが、安定的なネットワークが複数ある場合のそれぞれのネットワークが実現する確率の比較は行っていない。

Jackson and Watts [4] では Jackson and Wolinsky [5] の「共著者モデル」および Gale and Shapley [3] の「マッチングモデル」における確率的安定なネットワークについて考察しているが、コネクションモデルは扱っていない、また、確率的安定なネットワークの分析においても、エラーが生じる確率の関数としての定常分布を実際に求めずに確率的安定なネットワークを見つけるアプローチをとっている点が本稿とは異なっている⁵。

本稿に続く形となる一連の研究ノートでは、(i)プレイヤーが5人および6人の場合のコネクションモデル、(ii)プレイヤーが4人から6人の場合の「共著者モデル」、(iii)3人対3人および4人対4人の「マッチングモデル」について本稿と同様の分析を行うことを予定している。

参考文献

- [1] G. Demange and M. Wooders, eds. *Group Formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions*. Cambridge UP, 2005.
- [2] B. Dutta and M. O. Jackson, eds. *Networks and Groups: Models of Strategic Formation*. Springer-Verlag, 2003.
- [3] D. Gale and L. Shapley. “College admissions and the stability of marriage.” *American Mathematical Monthly*, 69:9.15, 1962.
- [4] M. O. Jackson and A. Watts. “The evolution of social and economic networks.” *Journal of Economic Theory*, 106:265.295, 2002.
- [5] M. O. Jackson and A. Wolinsky. “A strategic model of social and economic networks.” *Journal of Economic Theory*, 71:44.74, 1996.
- [6] R. Shone. *An Introduction to Economic Dynamics*. Cambridge UP, 2001.
- [7] A. Watts. “A dynamic model of network formation.” *Games and Economic Behavior*, 34:331.341, 2001.
- [8] H. P. Young. *Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions*. Princeton UP, 1998.

⁵ このアプローチについては例えば Young [8] を参照。