

機関番号：12102

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007 ～ 2010

課題番号：19740004

研究課題名（和文）

古典制限1次元状態和や数物理学に現れる特殊多項式のパス模型を用いた研究

研究課題名（英文）Study on 1-dimensional sums and special polynomials in mathematical physics in terms of path models

研究代表者

佐垣 大輔 (SAGAKI DAISUKE)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師

研究者番号：40344866

研究成果の概要（和文）：

Mirkovic-Vilonen 多面体（以下、MV 多面体と略す）の理論において以下の3つの結果を得た。

- (1) P , Q を MV 多面体とする。このとき、 P と Q のテンソル積に対応する MV 多面体は、 P と Q の Minkowski 和に含まれることを示した。
- (2) Demazure 加群および反 Demazure 加群の結晶基底を MV 多面体を用いて記述した。
- (3) MV 多面体の理論を振れない A 型の量子アフィン代数の場合に拡張した。

研究成果の概要（英文）：

In the theory of Mirkovic-Vilonen (MV for short) polytopes, we obtain the following three results.

- (1) Let P and Q be MV polytopes. We have proved that the MV polytope corresponding to the tensor product of P and Q is contained in the Minkowski sum of P and Q .
- (2) We have described the crystal bases of Demazure modules and opposite Demazure modules in terms of MV polytopes.
- (3) We have extended the theory of MV polytopes to the case of the quantum group associated to the nontwisted affine Lie algebra of type A.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：量子アフィン代数、結晶基底、パス模型、Kirillov-Reshetikhin 加群、Mirkovic-Vilonen 多面体

1. 研究開始当初の背景

(1) 1次元状態和について

U_q' を量子アフィン代数とする。統計力学における可解格子模型の理論への応用などから、 U_q' の有限次元既約加群のうち特に重要

になるのは、それが結晶基底と呼ばれる“ $q=0$ における基底”を持つ場合である。どのような有限次元既約表現が結晶基底を持つかについては、（予想はあるが）まだ部分的にしか分かっておらず、量子アフィン代

数の表現論や可解格子模型の理論における最も重要な未解決問題の1つになっており、国内外の多くの研究者が様々な手法を用いて研究している。本研究で主に扱うのは、柏原正樹氏によって導入された、レベル・ゼロ基本加群とよばれる（結晶基底を持つ）有限次元既約加群である。レベル・ゼロ基本加群は、中島啓氏により籠多様体を用いて代数幾何学的に導入された標準加群や、V. Chari と A. Pressley により生成元と基本関係式を与えることで定義された量子 Weyl 加群とも同型であることが知られており、結晶基底を持つ有限次元既約加群の中でも特に基本的かつ重要な研究対象である。

（古典制限）1次元状態和の概念は、可解格子模型の理論における Baxter の角転送行列法を背景として、国場敦夫氏、尾角正人氏、山田泰彦氏らにより導入された。いくつかのレベル・ゼロ基本加群が与えられたとき、それらのテンソル積を考えると、それは U_q' の有限型の部分代数の表現としては完全可約になる。その分岐則にエネルギーの情報をつ加することで得られる q 変数の多項式が（古典制限）1次元状態和 X である。1次元状態和の研究、その中でも特に、1次元状態和 X が $q=2$ 項係数達のフェルミオニックなある種の和 M で表せるといふ、 X のフェルミ公式に関する予想 ($X=M$ 予想) の解決は、可解格子模型の理論の発展のために必要不可欠な極めて重要な問題であると認識されており、国場氏、尾角氏、山田氏らの他にも、A. N. Kirillov, A. Schilling, M. Shimozono らが組み合わせ論的な手法を用いて、また G. Lusztig が、籠多様体のベッチ数との関係から代数幾何的な手法を用いて、研究を行っている。

(2) 特殊多項式について

本研究で主に扱う特殊多項式は、Kostka 多項式と Macdonald 多項式である。Kostka 多項式は、対称多項式環の2つの基底、Schur 多項式達と Hall-Littlewood 多項式達との遷移行列の成分として現れる多項式である。この多項式は、表現論、組み合わせ論、代数幾何学、可積分系など数学、物理学の様々な局面に現れ、多くの数学者や物理学者によって精力的に研究されている。

Macdonald 多項式は、Weyl 群不変な多項式全体のなす環の（ある内積に関する）直交基底として現れる、 q, t をパラメータとする直交多項式である。この Macdonald 多項式は、その特殊化として、表現論、組み合わせ論における多くの重要な特殊多項式（A 型の場合だと、Hall-Littlewood 多項式や Schur 多項式、Jack 多項式など）を含んでいることが知られている。また、変形 Virasoro 代数の特異ベクトルを表すのに用

いられるなど、可積分系への豊富な応用も知られている。

2. 研究の目的

以前、内藤聡氏との共同研究により、レベル・ゼロ基本加群のテンソル積の結晶基底が、Lakshmibai-Seshadri パス (LS パス) 全体のなすクリスタルと同型であることを証明した。そして、LS パス全体の集合の上に次数関数を定義し、それを用いて1次元状態和を LS パスを用いて記述した。

本研究の主目的は、上の結果を踏まえて、1次元状態和を新たにパス模型の視点から研究し、1次元状態和に関する最重要課題である $X=M$ 予想を解決することである。

さらに、上で述べた以前の結果の応用として、Kostka 多項式や Macdonald 多項式の $t=\infty$ での特殊化の LS パスと次数関数を用いて記述を得ることができる。本研究では、この表示を用いて、Kostka 多項式に関する様々な興味深い予想や Macdonald 多項式やその特殊化として得られる特殊多項式に、新たにパス模型を用いてアプローチする。

3. 研究の方法

LS パスとは、閉区間 $[0, 1]$ から U_q' の整ウエイト格子の実形への区分的に線形で連続な写像（すなわち、実形内の折れ線）である。上で述べた1次元状態和の LS パスを用いた記述であるが、使っているのは LS パスの終端、すなわち、 $t=1$ での値に由来する情報のみであり、その LS パスの“経路”、すなわち、 $0 \leq t < 1$ の情報はほとんど使っていない。この LS パスの経路の持つ情報に注目して、以下のように $X=M$ 予想に関する研究を行う。

(1) まず、 g が振れない A 型のアフィン・リー代数の場合について考える。この場合は、 $X=M$ 予想は、レベル・ゼロ基本加群のテンソル積の最高ウエイト元と“rigging”を持つ Young 図形 (rigged configuration) との間に全単射 (KKR 全単射) を構成することで、すでに解決されている。その結果を基に、LS パスの経路とフェルミ公式における M との関係を探るのが、ここでの狙いである。また、この段階で得られた多くの計算結果は、後に Kostka 多項式や Macdonald 多項式の研究に取り組む際にも大いに役立つと思われる。

この (1) における研究手順は以下の①、②の通りである。

① (コンピュータを使うなど) 具体的な計算によって、LS パスの方向ベクトルを決定し、それらの間の関係を調べる。この計算結果を用いて、LS パスの方向ベクトルたち

の間の規則性を見つけ、LS パスの経路の様子を明らかにする。

② 上の①で得た計算結果を基に、rigged configuration と LS パスとの間の関係を考察する。そして、KKR 全単射を用いて成されていた $X=M$ 予想の証明をパス模型的に再解釈することで、LS パスの経路に関する規則性を探す。

(2) 次に、 g が振れない古典型のアフィン・リー代数の場合を考える。ここでの研究手順は以下の通りである。

① まず、振れない A 型の場合と同様に、LS パスの方向ベクトルを決定し、それらの間の関係を調べる。

② A 型以外の振れない古典型のアフィン・リー代数の場合にも、 $X=M$ 予想は、rigged configuration と KKR 全単射を用いることで、部分的にはあるが解決されている。もし、A 型だけでは LS パスの経路に関する規則性が見出せなかったときには、(1) ② で述べた考察をこれらの場合に再度行うことで、規則性を見つけ出す。

③ (1) の段階で見つけ出した規則性が、A 型以外の場合にもあるかどうかを確認する。そして、(1) ② で再解釈した $X=M$ 予想の証明を A 型以外の場合に当てはめることで、 $X=M$ 予想の証明を与える。(1) で見つけた規則性がこれらの場合には当てはまらなかったり、 $X=M$ 予想の証明がうまく出来ない場合は、(2) ② に戻って修正を行う。

(3) 例外型や振れのあるアフィン・リー代数に対して、(上の (1), (2) で明らかになっているはずの) g が振れない古典型の場合の LS パスの経路に関する規則性やフェルミ公式の証明を踏まえて、 $X=M$ 予想の証明を完成させる。

$X=M$ 予想の研究とある程度並行して次の方法で Kostka 多項式などの特殊多項式の研究を行う。

(4) 上の (1)において得られた振れない A 型の場合の大量の計算結果と、フェルミ公式 $X=M$ のパス模型的な解釈を基にして Kostka 多項式に関する種々の予想を、パス模型の視点から検証し、証明する。

(5) g が simply-laced の場合に、(特殊化していない) Macdonald 多項式のパス模型を用いた表示を与える。Macdonald 多項式は q, t の 2 つのパラメータを持つ直交多項式

であるが、我々が以前与えたのは、この多項式の $t=\infty$ での特殊化に対する、パス模型を用いた表示である。この表示には、1 次元状態和の場合と同様に、LS パスの終端に由来する情報しか使っていない。そこで、これまでの研究において得られているはずの、LS パスの経路に関する大量の計算結果と規則性を基に、Macdonald 多項式のパラメータ t と LS パスの経路との関係を調べることで、特殊化されていない Macdonald 多項式の LS パスを用いた表示を導く。

以上の研究を、関連する 1 次元状態和、Kostka 多項式、Macdonald 多項式 (また、Macdonald 多項式に関連してアフィン Hecke 環) などの研究を行なっている国内外の研究者と情報・知識を交換し、活発な議論を行いながら、効率よく進める。そして、本研究で得られた研究成果を国内外の研究集会や学会で発表し、表現論や数物理学の研究者達と意見交換をすることで、パス模型や可解格子模型の理論をさらに発展させる。

4. 研究成果

(1) 当初の研究計画に加えて、rigged configuration に幾何的にアプローチするために、Mirkovic-Vilonen (MV) 多面体の研究を行った。主な研究成果は次の通り。

- ① B 型, C 型の有限次元単純リー代数の場合に、MV 多面体の成すクリスタル上の “lowering” 柏原作用素の記述を与えた (クリスタルの構造を具体的に調べるには柏原作用素の記述が必要になる)。
- ② Demazure クリスタルおよび opposite Demazure クリスタルを MV 多面体を用いて記述することに成功した。(レベル・ゼロ基本表現の結晶基底は Demazure 加群の結晶基底と密接な関係があることが観察されている。) さらに extremal な MV 多面体の頂点の具体的な記述を与えた。
- ③ P, Q を MV 多面体とする。 P と Q のテンソル積に対応する MV 多面体が、 P と Q の Minkowski 和に含まれることを示し、MV 多面体のテンソル積の記述に関する大きな手がかりを得た。さらにこれの応用として MV 多面体が Demazure クリスタルに含まれるための必要条件を extremal MV 多面体との包含関係によって与えることに成功した。
- ④ 振れない A 型の量子アフィン代数に関する MV 多面体の理論を構築することに成功した。

(2) この研究では、エクストリーマル・ウェイト加群と呼ばれる量子アフィン代数上の加群が重要な役割を果たす。そこで、無限ランクの量子アフィン代数上のエクストリーマル・ウェイト加群に関する研究を行い、それらの結晶基底に対するパスモデルを構成することに成功した。そして、それらのパスモデルのテンソル積の分解則を Littlewood-Richardson 係数を用いて具体的に記述することに成功した。

(3) 振れない E_6 型の量子アフィン代数上の随伴表現に対応する頂点に付随した Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群については、結晶基底の存在は知られているが、その完全性はまだ証明されていない。尾角正人氏は、この結晶基底に同型になると予想されるクリスタルを組合せ論的に構成した。本年度、この尾角氏らのクリスタルに含まれる A_5 -最高元たちの多面体的表示に関する予想を証明できた。これは KR クリスタルの完全性や rigged configuration との関係調べる上で重要な一歩である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① Syu Kato, Satoshi Naito, and Daisuke Sagaki, Tensor products and Minkowski sums of Mirkovic-Vilonen polytopes, Transformation Groups に掲載予定 (査読あり).

② Satoshi Naito, Daisuke Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of type B_∞ , C_∞ , and D_∞ , Transactions of the American Mathematical Society に掲載予定 (査読あり).

③ Syu Kato, Satoshi Naito, and Daisuke Sagaki, Polytopal estimate of Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, Advances in Mathematics, Volume 226 (2011), 2587-2617 (査読あり).

④ Satoshi Naito, Daisuke Sagaki, Crystal base elements of an extremal weight module fixed by a diagram automorphism II: case of affine Lie algebras, Progress in Mathematics, Volume 284 (2010), 225-255 (査読あり).

⑤ 内藤 聡・佐垣 大輔, 量子アフィン展開環上の extremal ウェイト加群の結晶基底と Littelmann のパスモデル, 雑誌「数学」, 62巻 (2010), 57-84 (査読あり).

⑥ Hidekazu Niibori and Daisuke Sagaki, Simplicity of a vertex operator algebra whose Griess algebra is the Jordan algebra of symmetric matrices, Communications in Algebra, Volume 38 (2010), 848-875 (査読あり).

⑦ Satoshi Naito and Daisuke Sagaki, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, Advances in Mathematics, Volume 221 (2009), 1804-1842 (査読あり).

⑧ Satoshi Naito and Daisuke Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, Compositio Mathematica, Volume 144 (2008), 1525-1556 (査読あり).

⑨ Satoshi Naito and Daisuke Sagaki, A modification of the Anderson-Mirkovic conjecture for Mirkovic-Vilonen polytopes in types B and C, Journal of Algebra, Volume 320 (2008), 387-416 (査読あり).

⑩ Satoshi Naito and Daisuke Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero weight shape, Proceeding of London Mathematical Society, Volume 96 (2008), 582-622 (査読あり).

[学会発表] (計 8 件)

① Daisuke Sagaki, Tensor products and Minkowski sums of Mirkovic-Vilonen polytopes, Trimester Programs “On the Interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics”, 2011年2月28日, Hausdorff Institute for Mathematics (ドイツ・ボン大学).

② Daisuke Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of type B_∞ , C_∞ , and D_∞ , 国際研究集会「Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups 2010」, 2010年8月6日, 名古屋大学.

③ 佐垣 大輔, Tensor product

multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of type B_∞ , C_∞ , and D_∞ , 第 13 回「代数群と量子群の表現論」, 2010 年 6 月 10 日, すいとびあ江南 (愛知県江南市).

④ 佐垣 大輔, 量子アフィン環のレベル・ゼロ基本表現とそのテンソル積のパス模型, 2009 年度 日本数学会秋季総合分科会 特別講演, 2009 年 9 月 27 日, 大阪大学.

⑤ Daisuke Sagaki, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, 国際研究集会「International workshop on combinatorial and geometric approach to representation theory」, 2009 年 9 月 21 日, Seoul National University (韓国).

⑥ 齊藤 義久 (発表者), 佐垣 大輔, 内藤 聡, On tensor products of Mirkovic-Vilonen polytopes in type A, 研究集会「表現論と組合せ論」, 2009 年 8 月 26 日, 北海道大学.

⑦ 内藤 聡 (発表者), 佐垣 大輔, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, 研究集会「組合せ論的表現論の拡がり」, 2008 年 10 月 7 日, 京都大学数理解析研究所.

⑧ Daisuke Sagaki and Satoshi Naito, Berenstein-Zelevinsky datum for the affine Lie algebra of type $A_1^{(1)}$, 国際研究集会「Crystals and Tropical Combinatorics」, 2008 年 8 月 30 日, 関西セミナーハウス (京都).

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~sagaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐垣 大輔 (Sagaki Daisuke)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師

研究者番号: 40344866