創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー

（３年計画の３年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
鈴木　清夫・駒野　　誠・更科　元子
須田　　学・牧下　英世・町田多加志
三井田裕樹

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー
（３年計画の３年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
鈴木　清夫・駒野　　誠・更科　元子
須田　　学・牧下　英世・町田多加志
三井田裕樹

要約

2002年度から５年間指定を受けたSSH研究で，大学での学びにつながる数学に注目して特に「統計」および「微分方程式」に関する教材・カリキュラムを開発し，授業実践などを通してその効果を確認することができた。そこで2007年度より新規指定を受けたSSH研究では，これら以外の分野を含めて，有効な教材を数多く開発することを目指すこととした。本年度までに54の教材を開発し，それらを含んだカリキュラムを作成するとともに，教員研修会などを実施し公開している。

また，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」の実施，筑波大学のインターンシップと連動したサイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組み，数学オリンピックや数学研究部など生徒の数学的活動の支援，筑波大学学生へのメディアル教育などを行っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. はじめに

本校数学科では，筑波大学や他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。2002年度から５年間指定を受けたスーパーサイエンスハイスクール(以下SSHと略)研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』の中で数学科は，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」(集団の特徴を掴む考え方や手法）および「微分方程式」(微小な変化から関数の特徴を捉える考え方）に関する教材開発と授業実践を行った。また，それらを本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置するとともに，教育研究会などで公開し，その効果を確認することができた。

そこで2007年度より新規指定を受けたSSH研究『国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，これら以外の分野を含めて，生徒も教師も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を数多く開発し，中高一貫カリキュラムの充実を目指すこととした。

本年度までに54の教材を開発し，カリキュラムに配置するとともに，教員研修会などで公開している。また，教材・カリキュラム開発以外に，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した筑波大学インターンシップと連動した総合学習「ゼミナール」「テーマ研究」，数学オリンピックや数学研究部など生徒の数学的活動の支援，筑波大学学生へのメディアル教育などを実施している。以下、その取り組みを報告する。

2. 今年度の研究

2.1. 教材・カリキュラムの開発

これまでに開発した54教材の一覧，それらを配置したカリキュラム，および今年度開発した３教材を以下に記載する。

<Project research>
Creative Teaching Materials,Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

2.1.1 開発教材一覧

表左端のアルファベットの記号は次の略であり，中学は小文字，高校は大文字，数字は実施学年である。

「A.代数(Algebra)」　「An. 解析(Analysis)」　「G. 幾何(Geometry)」　「P. 確率(Probability)」
「D. 微分方程式(Differential Equation)」　「S. 統計(Statistics)」　「O. その他(Others)」

		年度				年度	
a1.	整数	2008		s1.	統計の基本	2006	
a1-2.	有理数	2007		s2.	標準偏差・近似直線	2006	
a3.	暗号理論と整数論	2006		s3.	正規分布と標準化	2006	
A1	数と方程式	2008		s3-2.	シミュレーションによる授業	2006	
A2	離散な数列と連続な関数	2009		S1.	回帰直線，相関係数	2007	
A3.	置換と正多面体群	2007		S1-2	数理統計学入門	2009	
A3-2.	１次変換の線形性	2008		S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007	
an1.	２元１次方程式とその応用	2007		S3.	主成分分析入門	2007	
an2	合成関数とグラフ	2009		S3-2.	正規分布の平均の推定	2008	
an3	絶対値を含む関数のグラフ	2009		d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007	
an3-2	描画ソフトを利用した絶対値とガウス記号を含む関数のグラフ	2010	★	d1-2.	『数える』	2010	★
An1.	２次関数	2007		d2.	グラフや図形の移動・変形	2006	
An1-2	２次関数（２）	2009		d3.	２次関数の接線	2006	
An1-3	和や積のグラフ	2010	★	d3-2.	面積・体積	2006	
An2.	円周率の近似	2007		d3-3.	最大・最小	2006	
An2-2.	三角関数表を作る	2006		D1.	包絡線	2006	
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006		D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007	
g1	四角形の合同条件	2008		D3	包絡線(その２)	2006	
g1-2	作図の教材	2009		D3-2	微分方程式	2006	
g1-3	四角形の性質	2010		D3-3	微分方程式の応用	2006	
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007		D3-4	関数のグラフの描画法	2008	
g3.	立方体の切断	2007		D3-5	曲線と面積	2008	
g3-2.	反転法	2007		O1.	４元数を高校数学へ	2007	
g3-3	立方体の切断（２）	2009		O2.	有限世界の数学	2007	
G1	四面体の幾何	2008		Pf1.	組合せの確率モデル	2007	
G1-2	デカルトの円定理	2009		Pf2.	EBI と確率・統計	2007	
G2.	正１７角形の作図	2008		Pf3.	無限集合の確率	2008	

＊掲載年度は、本校数学科研究報告の掲載年度である。
★は本論集に掲載した教材である。

2.1.2. 数学科　中学校カリキュラム

2002 年度より実施

数学科の目標：いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる。

学年	中学 1 年		中学 2 年		中学 3 年	
単元／開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材
学年の目標	論証を中心に指導する。「答え」至上主義，結果至上主義からの脱却を目指す。生徒同士の『なぜ？』『どうして？』を大切にし，それらの説明を通して自分の考えを表現したり，他を説得したりする方法を身につける。		関数や図形の拡大縮小を題材にして，変化するものをとらえて表現し分析する力を身につける。		中学 1，2 年での学習の応用，総合として，より複雑な変化の解析を扱い，現実の事柄を数学の言葉で表現し，分析していく力を身につける。	
授業時間数	週 3 時間＋年間 15 時間		週 3 時間＋年間 20 時間		週 3 時間＋年間 20 時間	
a. 代数	学習の目標と入門 （整数の性質①） 正の数・負の数 （正負の数） （文字と式） （単・多項式の計算①） 方程式 （1 次方程式） （2 元 1 次連立方程式）	a1. 整数 a1-2. 有理数 d1. 自然数の和，平方数の和，立方数の和 d1-2. 『数える』	数と式 （整数の性質②） （平方根） （単・多項式の計算②） （展開，因数分解） 2 次方程式 （2 次方程式①）		2 次方程式 （2 次方程式②）	a3. 暗号理論と整数論
an. 解析	関数 （いろいろな関数） （比例，反比例） （1 次関数①）	an1. 2 元 1 次方程式とその応用	関数 （2 元 1 次方程式と座標平面） （1 次関数②）	an2. 合成関数とグラフ d2. グラフや図形の移動・変形	2 乗に比例する関数 （2 次関数） 総合演習	d3. 2 次関数の接線 an3. 絶対値を含む関数のグラフ an3-2. 絶対値とガウス記号を含む関数のグラフ d3-2. 面積体積 d3-3. 最大・最小
g. 幾何	平面図形 （平面図形の基礎） 図形の性質 （平行線の性質） 図形の合同 （三角形の合同） いろいろな四角形 （平行四辺形の性質）	g1−2. 作図の教材 g1. 四角形の合同条件 g1-3. 四角形の性質	相似 （図形の拡大縮小） （三角形の相似） 三平方の定理 （平面図形の計量） 空間図形	g2. チェバ・メネラウスの定理	円 三角形の五心 空間図形	g3−2. 反転法 g3. 立方体の切断 g3−3. 立方体の切断(2)
p. 確率	·		（確率）	＜s3-2 シミュレーションによる授業＞	確率	s3-2 シミュレーションによる授業
s. 統計	統計	s1. 統計の基本	統計	s2. 標準偏差、近似直線	統計	s3. 正規分布と標準化
o. その他					※チャレンジ学習	

※チャレンジ学習は，中学 3 年の課題学習であり，前期と後期に分かれ，週 1 時間実施。2009 年度は，数学の応用を学ぶクラスと基礎基本を振り返るクラスに分かれて実施。

2.1.3. 数学科　高等学校カリキュラム

2003年度より実施

数学科の目標：いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる。

学年	高校1年		高校2年		高校3年	
単元／開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材	単元	開発教材
学年の目標	中学で培ったものをベースにして，実数から複素数，三平方の定理から三角比・余弦定理，2次方程式から高次方程式など，発展や一般化として扱う。現実場面を意識した確率も合わせて扱う。これらを通して，将来必要となる数学の基礎的な知識を身につける。		より複雑な様々な関数についての考察を行う。また，図形の性質について，中学校で学んだ初等幾何的手法の他，解析的な手法や代数的な手法で考察する。これらを通して，事象を数学的に処理する能力を伸ばす。		『数学B』は数学Ⅰ，Ⅱ，A，Bの補充深化を行う。『数学Ⅲ』，『数学C1』は理科系への進学者を対象とした講座で，『数学Ⅲ』は微分積分を中心に，『数学C1』は行列及び式と曲線を扱う。『数学C2』は経済などの文科系への進学者を意識して確率分布，統計処理を扱う。これらを通じて，それぞれの進路に合わせた能力を伸ばす。	
科目(単位数) 授業時間数	「数学Ⅰ」(3単位) ＋ 「数学A」(2単位) 週5時間		「数学Ⅱ」(3単位) ＋ 「数学B」(1単位) 週4時間		「数学Ⅲ」(4単位)，「数学B」(2単位)，「数学C1」(2単位) 「数学C2」(2単位)※　すべて選択	
A. 代数	数 (実数と複素数) 式の計算 (展開，因数分解) (多項式の除法) 方程式・不等式 (高次方程式)	<a3. 暗号理論と整数論> A1. 数と方程式	数列 (数列、二項定理) 複素数	A2. 離散な数列と連続な関数	行列とその応用「数学C1」 (行列)	A3.　置換と正多面体群 A3－2. 1次変換の線形性
An. 解析	図形と計量 (三角比) (三角関数(弧度法)) 2次関数 (2次関数(2次不等式))	An1.　2次関数 An1-2. 2次関数(2) D1.　包絡線 An1-3. 和や積のグラフ	指数関数と対数関数 (いろいろな関数) 三角関数 微分と積分 (いろいろな関数) (整関数の微分積分)	An2.　円周率の近似 An2-2.　三角関数表を作る An2-3. 加法定理から導き出される多項式 D2.　グラフ描画の方法 <An1-3. 和や積のグラフ>	微分「数学Ⅲ」 (極限) (微分法) 積分「数学Ⅲ」 (積分法)	D3. 包絡線（その２） D3-2. 微分方程式 D3-3. 微分方程式の応用 D3-4. 関数のグラフと描画法 D3-5. 曲線と面積
G. 幾何	平面図形	G1. 四面体の幾何 G1－2. デカルトの円定理	平面・空間ベクトル (ベクトル) 図形と方程式	G2. 正17角形の作図	式と曲線「数学C1」 (式と曲線)	(D3-2. 微分方程式（極座標での面積，曲線の長さ))
P. 確率	場合の数 確率	Pf-1.　組合せの確率モデル Pf-2.　EBIと確率・統計 Pf-3. 無限集合の確率			確率分布「数学C2」 (確率，確率分布)	<Pf-1.　組合せの確率モデル> <Pf-2.　EBIと確率・統計> <Pf-3. 無限集合の確率>
S. 統計	統計	S1.　回帰直線，相関係数 S1-2. 数理統計学入門	統計	S2.　残差分析によるデータ系列の関係分析	統計処理「数学C2」 (資料の整理) (回帰・相関) (推定・検定)	S3.　主成分分析入門 S3-2. 正規分布の平均の推定
O. その他	集合と論理	Of.　4元数を高校数学へ	※1 ゼミナール	<Of.　4元数を高校数学へ> O2.　有限世界の数学	※2 テーマ研究	<Of.　4元数を高校数学へ>

※1 ゼミナールは，高校2年の「総合学習」であり，2010年度は「60期のつくコマ数学科！」を開講。
※2 テーマ研究は，高校3年の「総合学習」であり，研究レポートを作成する。

2.1.4. 開発教材

An1-3. 和や積のグラフ

関連分野	関数
高等数学	解析学
対象学年	高校１年生、高校２年生
関連単元	２次関数、三角関数
教 材 名	和や積のグラフ

≪既知の関数の和や積で表わされた関数のグラフ≫

グラフの指導は、通常、２次関数ならば平行移動、三角関数ならば合成公式などを用いて演繹的に行う。しかし、基本的なグラフが描ければ、それらの和や積で表わされる関数は、特徴的な点をプロットすることや包摂関係などから、その概形を描くことができる。またその過程で未知の関数の様子を探ることになり、関数についての興味関心を培うことができる。

とりわけ三角関数は高校になって初めて学習する関数であり、その表現や式変形に絡む公式の多さから、生徒が不安を持つ関数である。特に、加法定理及びそれから導かれる合成や和積の公式に戸惑う生徒が多い。そこでこれらの導入も兼ねて、基本的な三角関数の和や積で表される関数のグラフについての考察を行い、周期の重要性や『うなり』現象の面白さを感じるとともに、『波の合成』のイメージを掴んでもらうことは有効であろう。

具体的には、基本的な三角関数のグラフ及びその移動変形（平行移動、座標軸を基準とする引き延ばし、相似拡大縮小）を扱った後に、学習済みの関数（$y=x, y=x^2, y=\dfrac{1}{x}$）を含めた、和や積で表される関数のグラフについての考察を行う。グラフの概形は、特徴的な点（和では一方が０となる場合や異符号で絶対値が等しい場合、積では一方が０及び±1となる場合に対応する点）をプロットし、元のグラフとの大小（上下）関係なども考慮してかくことになる。未知の関数をこれらのことから合理的に推理する楽しさを味わわせるとともに、関数のグラフ描画の基本事項である「点をプロットする」ことを再認識させたい。

いずれもグラフ描画ソフトを用いれば簡単に書くことが出来るが、手作業で行うことに意味があると考えている。

なお、これらのことは２次関数でも扱うとよいので、以下、２次関数の和や積のグラフを含めて、指導の流れを記載する。

An1-3.1.　２次関数

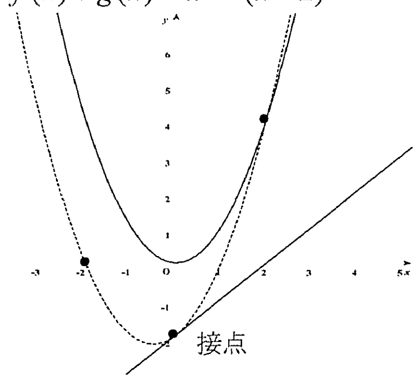
(1) 和や積のグラフ

中学で学習する $y=ax^2$ のグラフを確認した後、既知関数の和や積のグラフの概形について考えさせる。注目すべきは、和では一方が０となる場合や異符号で絶対値が等しい場合、積では一方が０及び±1となる場合、に対応する点である。また、元のグラフとの上下関係や接点に関して、和のグラフは、同符号なら外側に、異符号なら双方の間に、積のグラフは、絶対値がともに１より小さいなら内側にある。さらに積のグラフについて、絶対値がともに１より大きいなら外側に、それ以外は双方の、或いは一方をx軸について反転させたものとの間にある。

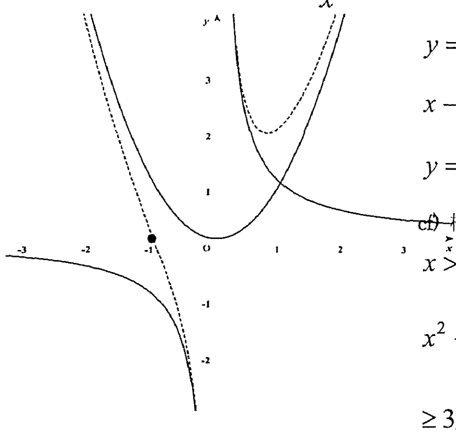
なお極大極小となる点は、相加相乗平均の大小関係を用いて考えることもできるが、深入りしない。

問１． $y=f(x)+g(x)$ のグラフの概形をかけ。

(1) $f(x)+g(x)=x^2+(x-2)$



(2) $f(x)+g(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$



$x\to0$ のとき

$y=\dfrac{1}{x}$ に、

$x\to\pm\infty$ のとき

$y=x^2$ に漸近する

cf) 極値に関して

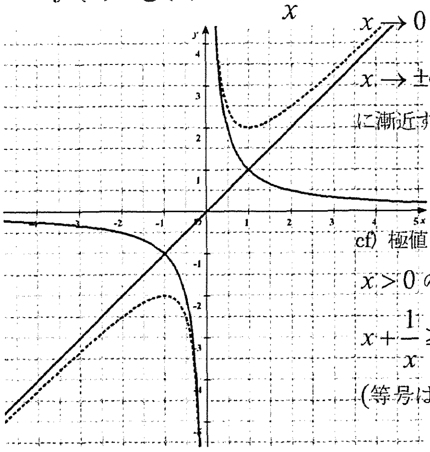
$x>0$ のとき、

$x^2+\dfrac{1}{x}=x^2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}$

$\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

(等号は$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$のとき)

(3) $f(x)+g(x)=x+\dfrac{1}{x}$



$x \to 0$ のとき $y=\dfrac{1}{x}$、

$x \to \pm\infty$ のとき $y=x$

に漸近する。

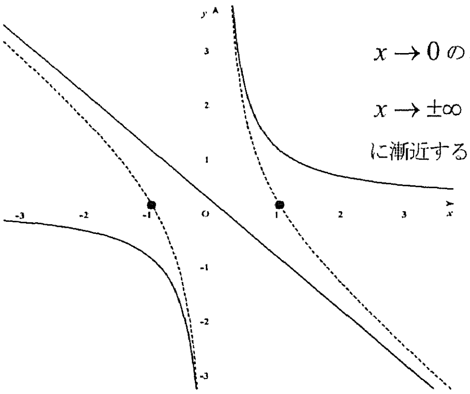
cf) 極値に関して

$x>0$ のとき、

$x+\dfrac{1}{x} \geq 2$

(等号は$x=1$のとき)

(4) $f(x)+g(x)=-x+\dfrac{1}{x}$



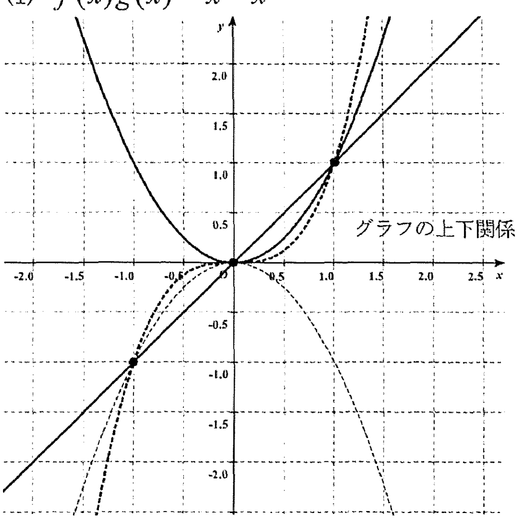
$x \to 0$ のとき $y=\dfrac{1}{x}$、

$x \to \pm\infty$ のとき $y=-x$

に漸近する。

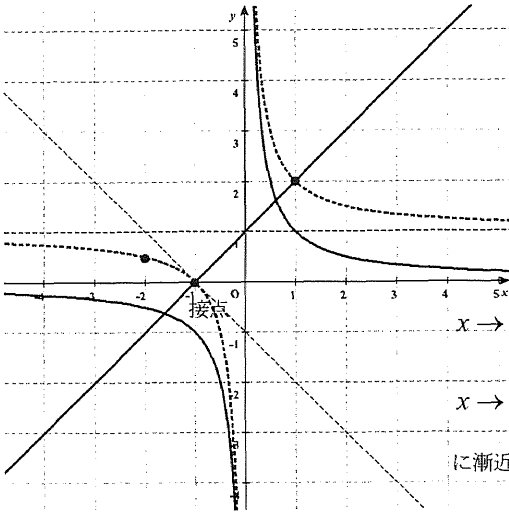
問２． $y=f(x)g(x)$ のグラフの概形をかけ。

(1) $f(x)g(x)=x^2 \cdot x$



グラフの上下関係に注目する

(2) $f(x)g(x)=(x+1)\cdot\dfrac{1}{x}$

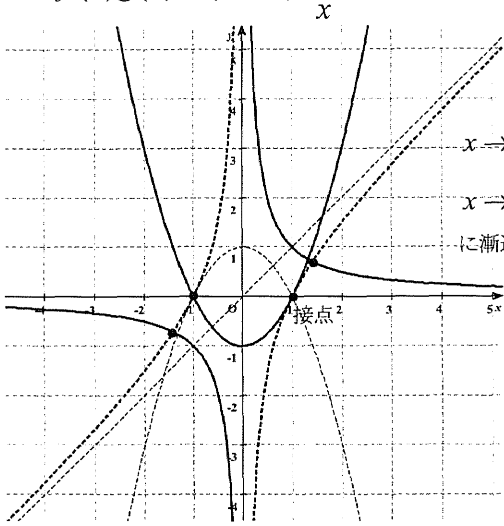


$x \to 0$ のとき $y=\dfrac{1}{x}$、

$x \to \pm\infty$ のとき $y=1$

に漸近する。

(3) $f(x)g(x)=(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x}$

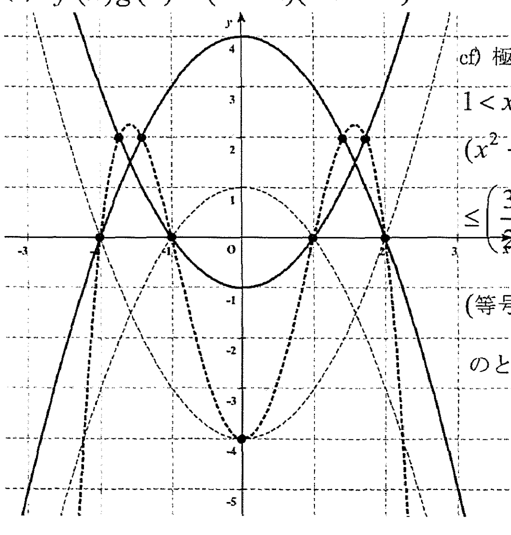


$x \to 0$ のとき y 軸に、

$x \to \pm\infty$ のとき $y=x$

に漸近する。

(4) $f(x)g(x)=(x^2-1)(-x^2+4)$



cf) 極値に関して

$1<x<2$のとき

$(x^2-1)(4-x^2)$

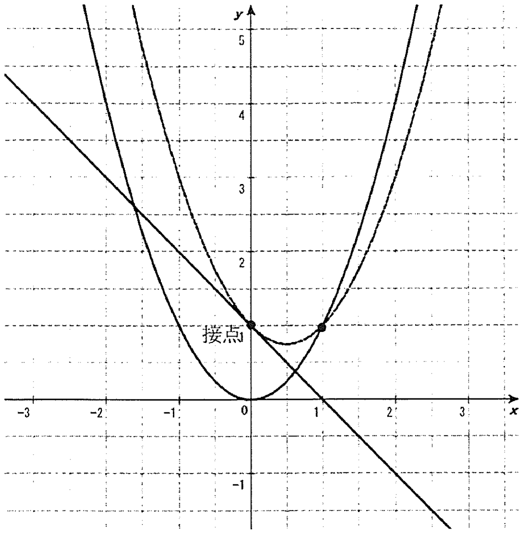
$\leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

(等号は $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

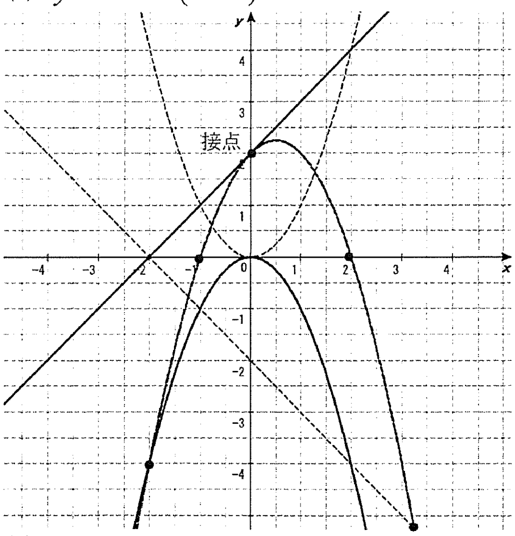
のとき)

問３．次の関数のグラフの概形をかけ。

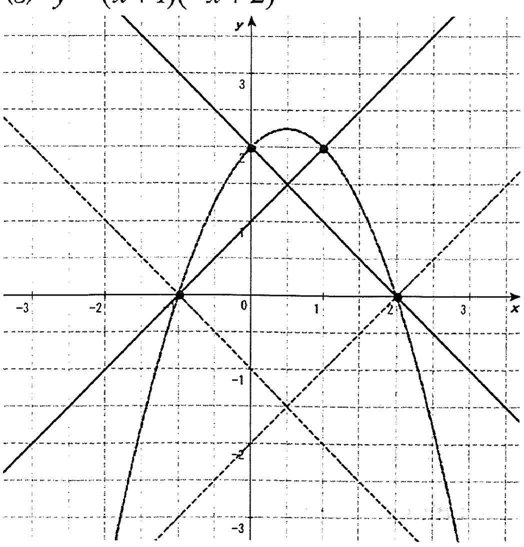
(1) $y=x^2+(-x+1)$



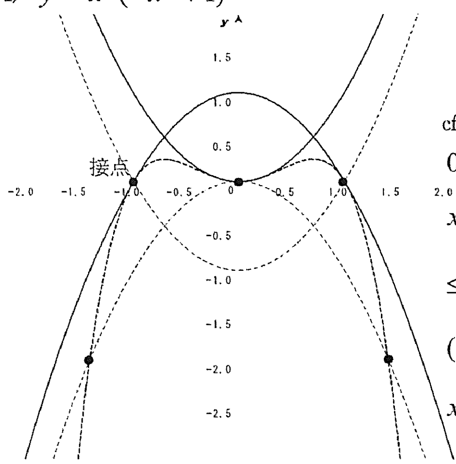
(2) $y=-x^2+(x+2)$



(3) $y=(x+1)(-x+2)$



(4) $y=x^2(-x^2+1)$



cf) 極値に関して

$0<x<1$ のとき、

$x^2(-x^2+1)$

$\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

(等号は

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき)

(2)　２次関数のグラフの移動・変形

平行移動、対称移動、回転移動、及び拡大(縮小)について、確認する。(数学科研究報告 2007 『d2 グラフや図形の移動変形』参照)

問４．次の移動・変形①～⑧について各問いに答えよ。

① x 軸についての対称移動

② y 軸についての対称移動

③ x 軸方向へ -1、y 軸方向へ 2 の平行移動

④原点を中心とする 180° 回転

⑤原点を中心とする 90° 回転（反時計回り）

⑥原点を中心とする２倍の拡大

⑦ x 軸を基準とする（上下への）２倍の引き伸ばし

⑧ y 軸を基準とする（左右への）$\dfrac{1}{2}$ 倍の引き伸ばし

(1) 点 $\mathrm{P}(2,1)$ を①～⑧で移動した点をかけ。

解）略

(2) 点 (a,b) を①～⑧で移動した点の座標を求めよ。

解）①$(a,-b)$、②$(-a,b)$、③$(a-1,b+2)$、④$(-a,-b)$、⑤$(-b,a)$、⑥$(2a,2b)$、⑦$(a,2b)$、⑧$(\dfrac{a}{2},b)$

(3) 直線 $y=2x+1$ を①～④で移動した図形をかけ。また、その式を答えよ。

解）①$y=-2x-1$、②$y=-2x+1$、③$y=2x+5$

④$y=2x+1$　（グラフは略）

(4) 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ を⑤～⑧で移動した図形の概形をかけ。またその式を求めよ。

解）⑤$y=-\dfrac{1}{x}$、⑥$y=\dfrac{4}{x}$、⑦$y=\dfrac{2}{x}$、⑧$y=\dfrac{1}{2x}$

（グラフは略）

問５. 次の移動・変形①～⑤について各問いに答えよ。
①x 軸方向へ 2 、y 軸方向へ -1 の平行移動
②原点を中心とする $\dfrac{1}{2}$ 倍の縮小
③x 軸を基準とする（向上下への）$\dfrac{1}{3}$ 倍の引き伸ばし
④原点を中心とする 45° 回転（反時計回り）
⑤原点を中心とする　$-120°$ 回転（反時計回り）
【注】回転に関しては、複素数の積を利用。
点の 45° 回転 $\Leftrightarrow \times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$、$-45°$ 回転 $\Leftrightarrow \times\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$
$-120°$ 回転 $\Leftrightarrow \times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$、
$120°$ 回転 $\Leftrightarrow \times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
（数学科研究報告 2008『A1 数と方程式』参照）

(1) 点 (a,b) を①～⑤で移動した点の座標を求めよ。

解）①$(a+2,b-1)$、②$(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$、③$(a,\frac{b}{3})$、

④$(a+bi)\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}i \quad \therefore\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}},\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)$

⑤$(a+bi)\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad \therefore\left(\dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2},\dfrac{-\sqrt{3}a-b}{2}\right)$

(2) 放物線 $y=x^2$ を①,②,③で移動した図形の概形をかけ。また、その式を答えよ。

解）①$y=(x-2)^2-1$、②$y=2x^2$、③$y=\dfrac{1}{3}x^2$
グラフは略

(3) 放物線 $y=x^2$ を、④（反時計回りに 45° 回転）で移動した図形の式を求めよ。
（$f(x,y)=0$ の形でよい。）

解）求める図形上の点 (x,y) を $-45°$ 回転した点は、

$(x+yi)\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ より $\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}},\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$

これが $y=x^2$ 上にあるので、

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}=\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$$

(4) 放物線 $y=x^2$ を、⑤（反時計回りに $-120°$ 回転）で移動した図形の式を求めよ。
（$f(x,y)=0$ の形でよい。）

解）求める図形上の点 (x,y) を $120°$ 回転した点は、

$(x+yi)\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より $\left(\dfrac{-x-\sqrt{3}y}{2},\dfrac{\sqrt{3}x-y}{2}\right)$

これが $y=x^2$ 上にあるので、

$$\frac{\sqrt{3}x-y}{2}=\left(\frac{-x-\sqrt{3}y}{2}\right)^2$$
$$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2y=0$$

An1-3.2.　三角関数

(1) 三角関数のグラフの移動・変形

三角関数のグラフの基本的事項を確認した後、次のように、その移動・変形を取り上げる。

問６．図の点線は $y=\sin x$ のグラフである。これを次のように移動変形したグラフの概形をかき、その式を求めよ。（グラフは省略）

(1)　x 軸方向へ $\dfrac{\pi}{2}$、y 軸方向へ 2 平行移動
(2) 上下（x 軸の垂直方向）へ２倍
(3) 左右（y 軸の垂直方向）へ２倍
(4) 原点を中心に２倍に相似拡大

解）(1) $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})+2$、(2) $y=2\sin x$
(3) $y=\sin\dfrac{1}{2}x$、(4) $y=2\sin\dfrac{1}{2}x$

問７．図の点線は $y=\cos x$ のグラフである。これを次のように移動変形したグラフの概形をかき、その式を求めよ。（グラフは省略）

(1) 左右（y 軸の垂直方向）へ $\dfrac{1}{2}$ 倍
(2) 原点を中心に $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似拡大

解）(1) $y=\cos 2x$、(2) $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x$

問８．図の点線は $y=\tan x$ のグラフである。これを次のように移動変形したグラフの概形をかき、その式を求めよ。（グラフは省略）

(1)　x 軸方向へ $\dfrac{\pi}{2}$、y 軸方向へ -1 平行移動
(2) 原点を中心に２倍に相似拡大

解）(1) $y=\tan(x-\dfrac{\pi}{2})-1$、(2) $y=2\cos\dfrac{1}{2}x$

問９．次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $y=\sin 3x$ (2) $y=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}x$

(3) $y=\cos\dfrac{1}{2}(x-\pi)+1$ (4) $y=2\cos(3x+\dfrac{\pi}{2})-1$

(5) $y=\tan 2x+1$ (6) $y=-\dfrac{1}{2}\tan(x+\dfrac{\pi}{2})$

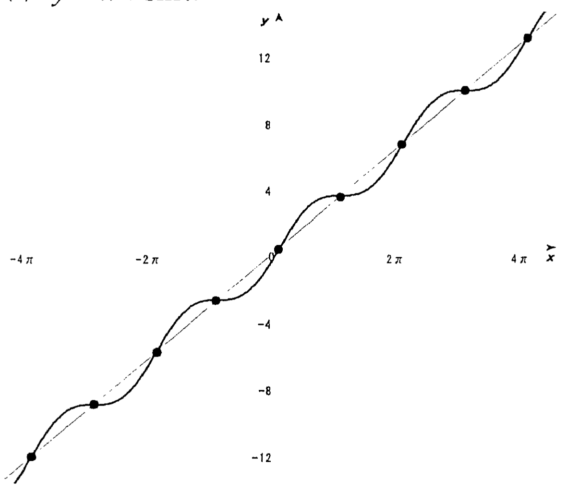
解）略

(2) 三角関数の和や積のグラフ

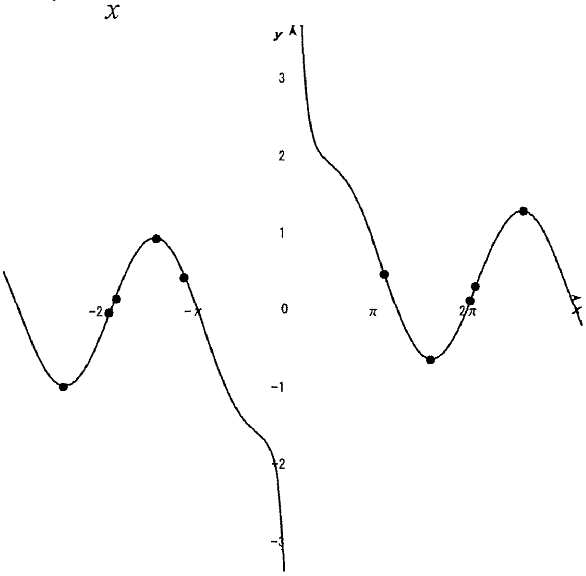
まず、既知の関数との和や積のグラフを扱う。

問 10. 次の関数のグラフの概形をかけ。

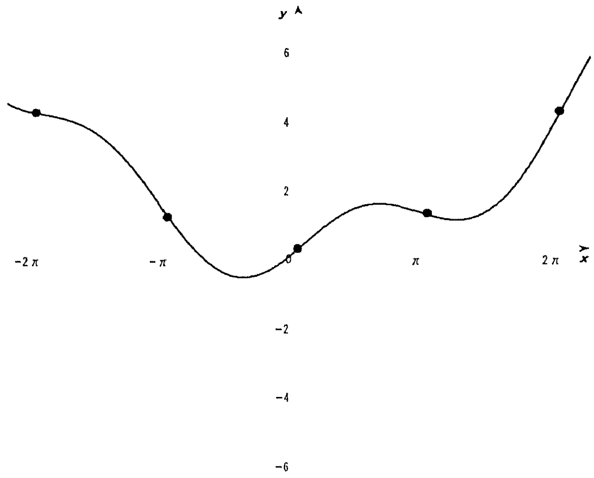
(1) $y=x+\sin x$



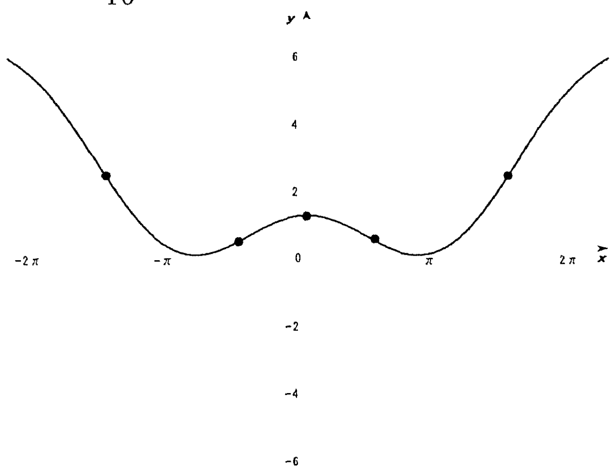
(2) $y=\dfrac{1}{x}+\sin x$



(3) $y=\dfrac{1}{10}x^2+\sin x$

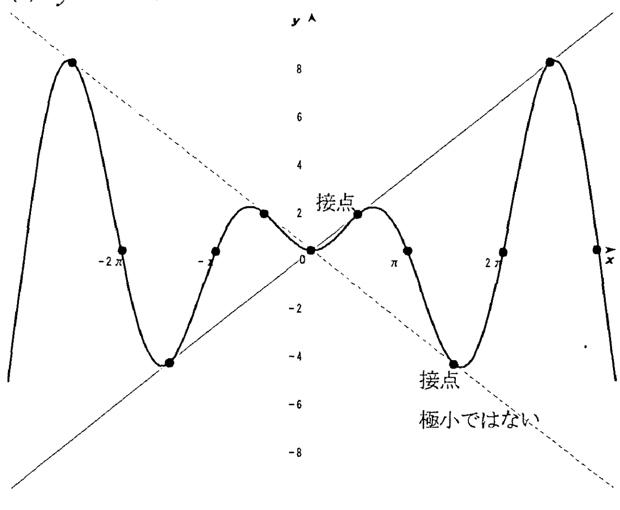


(4) $y=\dfrac{1}{10}x^2+\cos x$

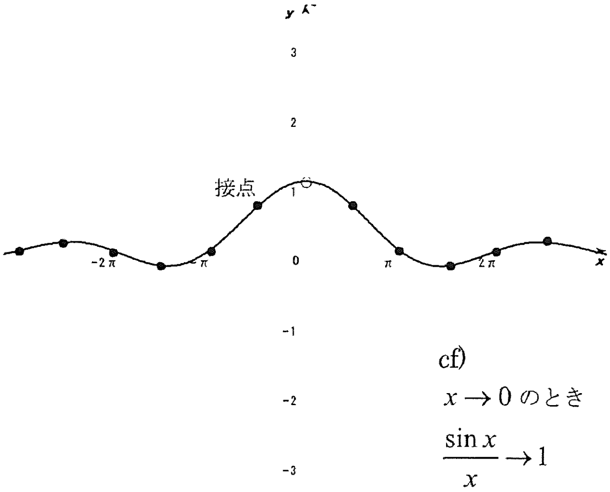


問 11. 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $y=x\sin x$

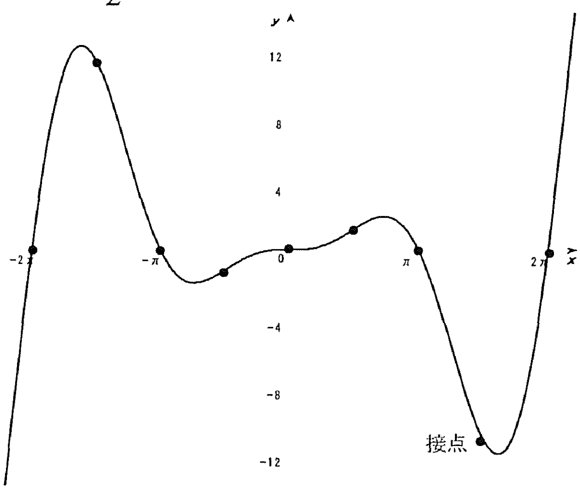


(2) $y=\dfrac{1}{x}\sin x$

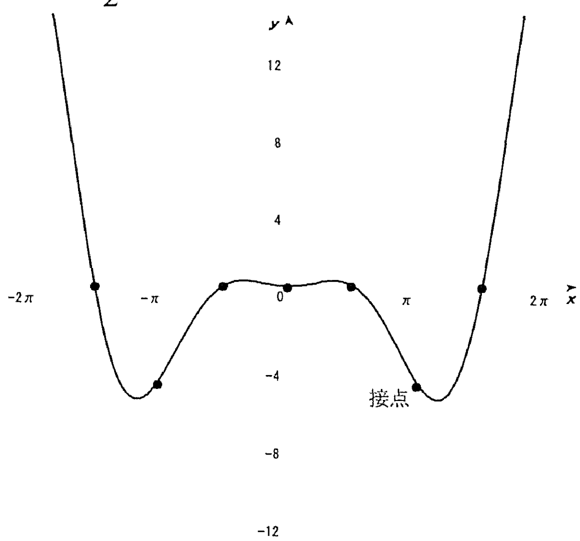


cf)
$x \to 0$ のとき
$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$

(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2\sin x$

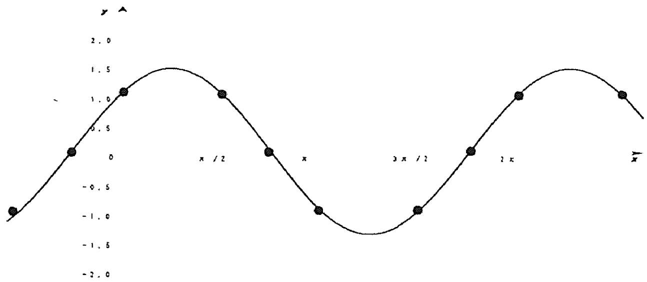


(4) $y=\dfrac{1}{2}x^2\cos x$

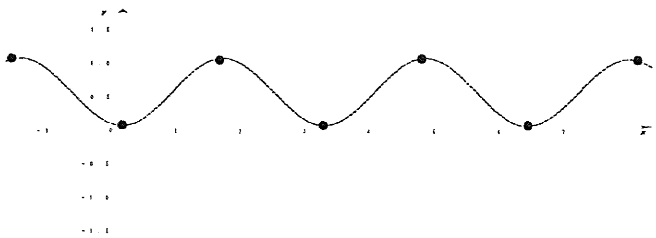


次に、三角関数の和や積で表わされるもののグラフについて考察する。これらを通して、周期が等しい三関数の和や積が一つの波になることなどを予想させ、合成公式や和積の公式の導入とする。

例1． $y=\sin x+\cos x$

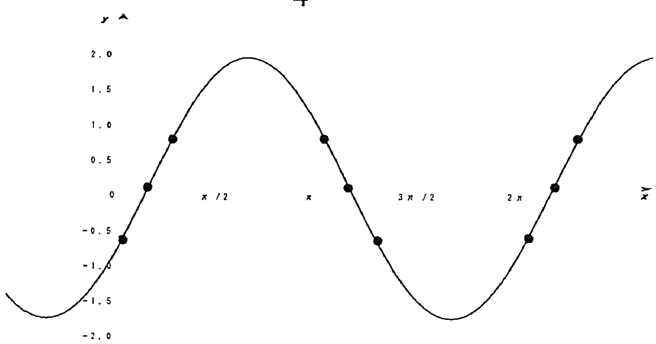


例2． $y=\sin x\cdot\sin x$

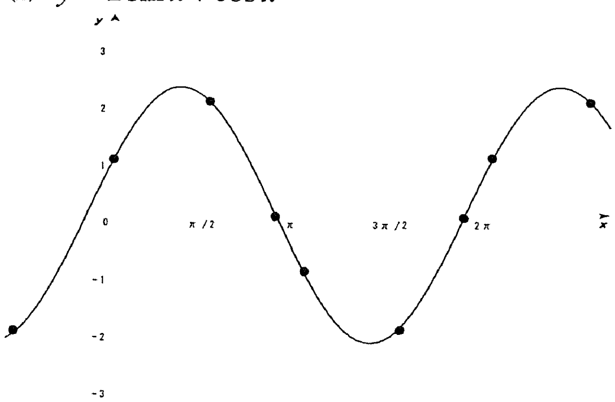


問12．次の関数のグラフの概形をかけ。

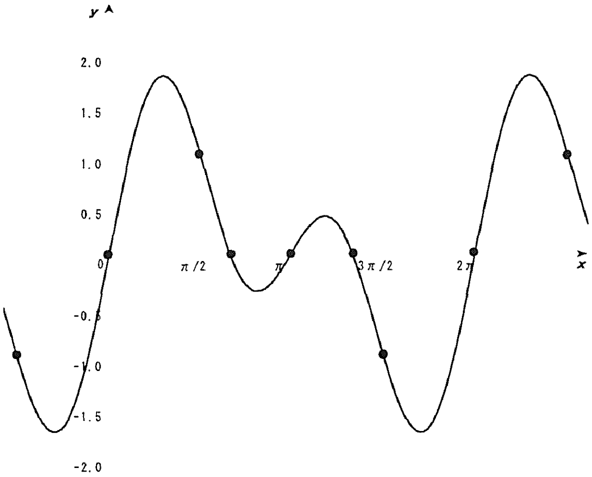
(1) $y=\sin x+\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$



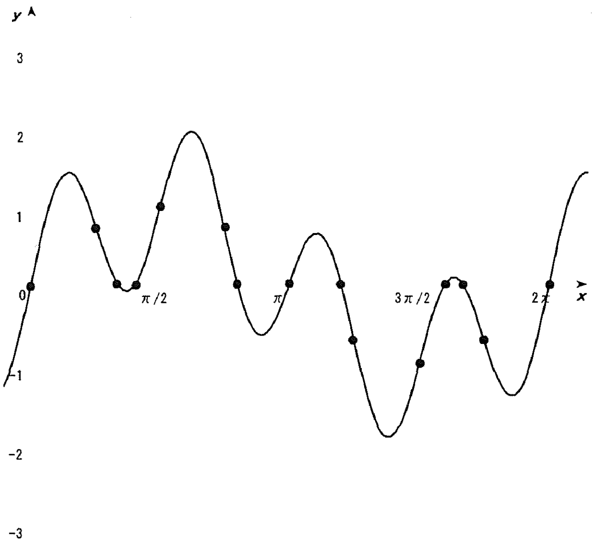
(2) $y=2\sin x+\cos x$



(3) $y = \sin x + \sin 2x$

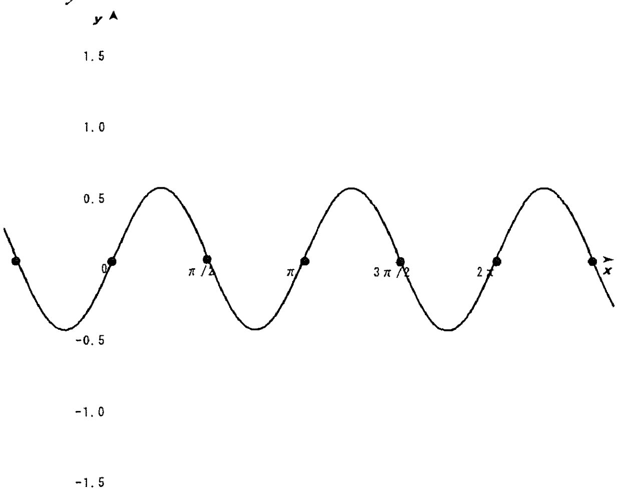


(4) $y = \sin x + \sin 4x$

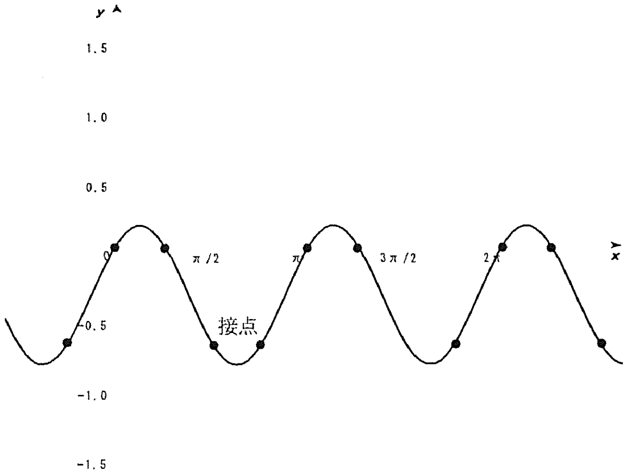


問 13. 次の関数のグラフの概形をかけ。

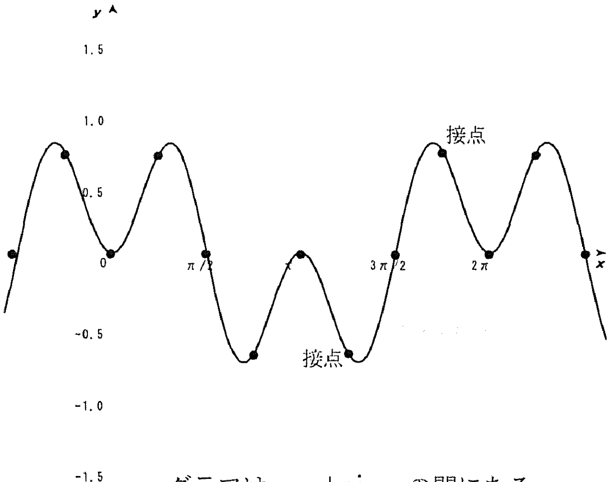
(1) $y = \sin x \cos x$



(2) $y = \sin x \sin(x + \dfrac{3\pi}{4})$

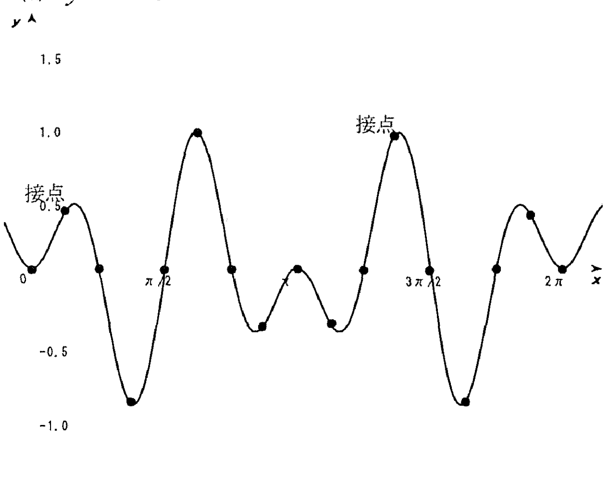


(3) $y = \sin x \sin 2x$



グラフは $y = \pm\sin x$ の間にある

(4) $y = \sin x \sin 4x$



グラフは $y = \pm\sin x$ の間にある

【補足】

２つの三角関数の周期が等しいとき、それらの和や積は１つの三角関数となる。

加法定理及び合成、半角、２倍角、和⇔積の公式などを扱った後、このことを次のように確認する。

例１． $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

例２． $y=\sin x\cdot\sin x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$

問 12.

(1) $y=\sin x+\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$=\sin x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}$

$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin(x+\alpha)$

(ただし、$\sin\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}},\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}$)

別解）和積の公式を用いて

$y=\sin x+\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$=2\sin\dfrac{x+x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{x-(x-\frac{\pi}{4})}{2}$

$=2\cos\frac{\pi}{8}\sin(x-\frac{\pi}{8})$

(2) $y=2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$

(ただし、$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$)

問 13. (1) $y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

(2) $y=\sin x\sin(x+\frac{3\pi}{4})$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos(x+x+\frac{3\pi}{4})-\cos(x-x-\frac{3\pi}{4})\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(\cos(2x+\frac{3\pi}{4})+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

また、２つの三角関数の周期が異なる場合、それらの和や積は周期的に複雑な増減をする。（これは、音波の場合の「うなり」現象に対応するものである。）

問 13. (3) $y=\sin x\sin 2x$ は、$y=\pm\sin x$ のグラフの間に、$y=\sin 2x$ のグラフが上下から押し込まれて入ったものとなり、(4) $y=\sin x\sin 4x$ は、$y=\pm\sin x$ のグラフの間に、$y=\sin 4x$ のグラフが入ったものになっている。

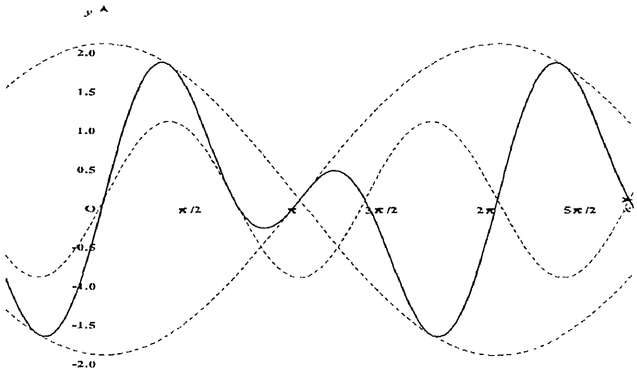
一般に、$0<m<n$ のとき、$y=\sin mx\sin nx$ は、$y=\pm\sin mx$ のグラフの間に、$y=\sin nx$ のグラフが入ったものとなる。

周期が異なる三角関数の和の場合も、次のように積の形に変形して考えると、グラフの概形をつかみやすい。

問 12.

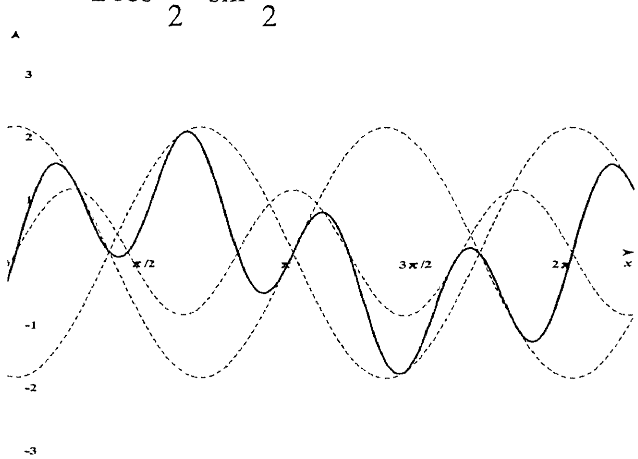
(3) $y=\sin x+\sin 2x=2\sin\dfrac{x+2x}{2}\cos\dfrac{x-2x}{2}$

$=2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}$



(4) $y=\sin x+\sin 4x=2\sin\dfrac{x+4x}{2}\cos\dfrac{x-4x}{2}$

$=2\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}$



（2010　鈴木）

an3-2. 絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウェアによるグラフ描画

関連分野：解析分野
高等数学：解析幾何
対象学年：中学3年生，高校2年生
関連単元：関数のグラフ
教 材 名：絶対値とガウス記号を含む関数のグラフの GRAPES によるグラフ描画

《不連続な線をグラフとする関数の作成》

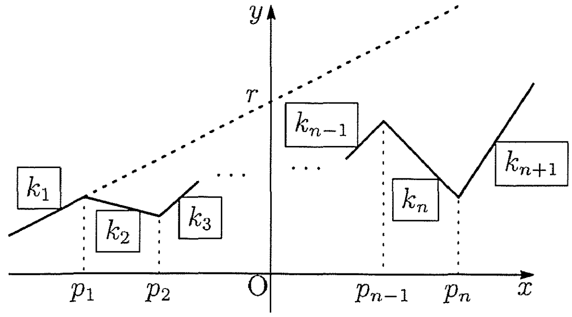
与えられた関数のグラフを描くことは，比較的容易である．特に，GRAPES や FunctionView などの関数グラフソフトを利用すれば，陽関数や陰関数のグラフを一瞬で描くことができ，手計算で描いたグラフが正しいのかを生徒自ら確認できる．これは，さらに発展した内容へ進むための土台となり得る．また，関数グラフソフトは，与えられた関数のグラフを描く作業の逆，つまり，与えられた線をグラフとする関数を作成する際に，生徒の試行錯誤の手段となる．

本稿では，特に，不連続な線をグラフとする関数を，GRAPES を利用しながら作成する方法について考察する．GRAPES の使い方については，巻末の付録を参照していただきたい．使用する関数は，基本的に絶対値とガウス記号を含む関数のみなので，一部を除いて中学3年生でも利用できる教材である．

an3-2.1. 折れ線をグラフとする関数の作成

最初に，折れ線をグラフとする関数の作成しておこう．これは，次の問題で完全に解決される．

問1. $x = p_1, p_2, \cdots, p_n\ (p_1 < p_2 < \cdots < p_n)$ で折れ曲がり，傾きが左端から順に $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ となる折れ線



で左端を含む直線が点 $(0, r)$ を通るものをグラフとする関数を求めよ．

解 求める関数を

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i|x - p_i| + bx + c \qquad \cdots (*)$$

とおく．傾きより，

$$\begin{cases} -a_1 - a_2 - \cdots - a_n + b = k_1 \\ a_1 - a_2 - \cdots - a_n + b = k_2 \\ a_1 + a_2 - \cdots - a_n + b = k_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 + a_2 + \cdots - a_n + b = k_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b = k_{n+1} \end{cases}$$

$$\iff a_i = \frac{k_{i+1} - k_i}{2}\ (1 \leqq i \leqq n),\ b = \frac{k_1 + k_{n+1}}{2}$$

を得る．また，左端を含む直線は

$$y = -\sum_{i=1}^{n} a_i(x - p_i) + bx + c$$

であり，点 $(0, r)$ を通ることから

$$c = r - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i = r - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{i+1} - k_i}{2} p_i$$

である．これらを $(*)$ に代入して，求める関数

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{i+1} - k_i}{2}(|x - p_i| - p_i) + \frac{k_1 + k_{n+1}}{2}x + r$$

を得る．□

例えば，2回折れ曲がる折れ線をグラフとする関数を求めるには，問1で $n = 2$ の場合を考えて，

$$y = a_1|x - p_1| + a_2|x - p_2| + bx + c$$

とおけばよいことが分かる．しかし，GRAPES では添え字を使えないので，例えば，

$$y = a|x - p| + b|x - q| + cx + d$$

を陽関数で描くとよい．ただし，GRAPES では，$|x|$ は $\mathrm{abs}(x)$ で表されるので，

「$a * \mathrm{abs}(x - p) + b * \mathrm{abs}(x - q) + cx + d$」

を陽関数で描くことになる．このとき，a, b, c, d, p, q は自動的にパラメータとなり，初期値がすべて1となる．パラメータの値を変えることによって，さまざまな折れ線を描けることを確認できる (図1)．

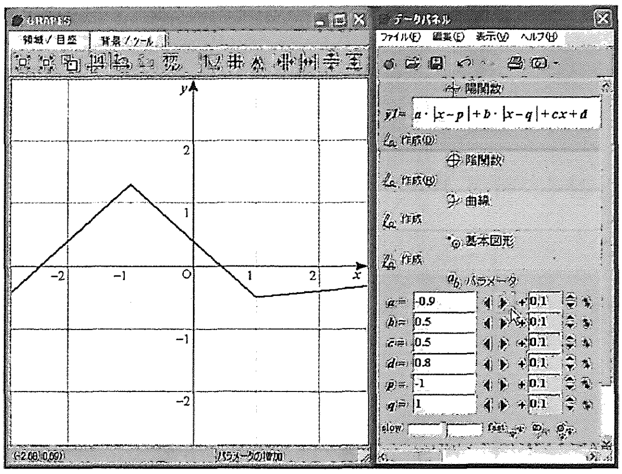


図 1: $y = a|x-p| + b|x-q| + cx + d$ のグラフ

an3-2.2. ガウス記号を含む関数のグラフの描画

GRAPES で，ガウス記号 $[x]$ を含む関数のグラフを描画するには，$\mathrm{int}(x)$ を用いる．実際，陽関数に「$\mathrm{int}(x)$」を入力してそのグラフを描画すると，図 2 のようになる．

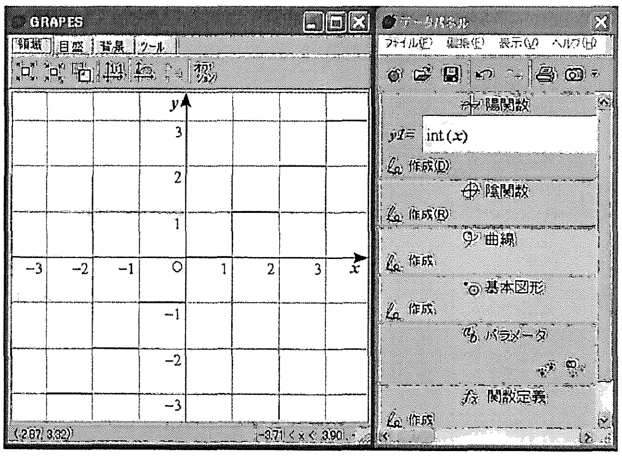


図 2: $y = [x]$ のグラフ

ここで，端点が描画されていないことに気が付くだろう．端点を描画するには，陽関数で「$\mathrm{int}(x)$ $(\mathrm{int}(x) = x)$」を追加して描画すればよい．

一般に，狭義単調増加または狭義単調減少であるような関数 $f(x)$ に対して，$y = [f(x)]$ のグラフで端点もあるものを描きたければ，理論的には，陽関数で

$$「\mathrm{int}(f(x))」と「\mathrm{int}(f(x))\ (\mathrm{int}(f(x)) = f(x))」$$

描画すればよいことになる．しかし，GRAPES のグラフ描画では，値として有限小数を用いているため，端点が必ず描画されるとは限らない．

例えば，陽関数で

$$「\mathrm{int}(3x)」と「\mathrm{int}(3x)\ (\mathrm{int}(3x) = 3x)」$$

を描くと，図 3 のようになってしまい，点 $\left(\dfrac{2}{3},\ 2\right)$ などが描かれていない．

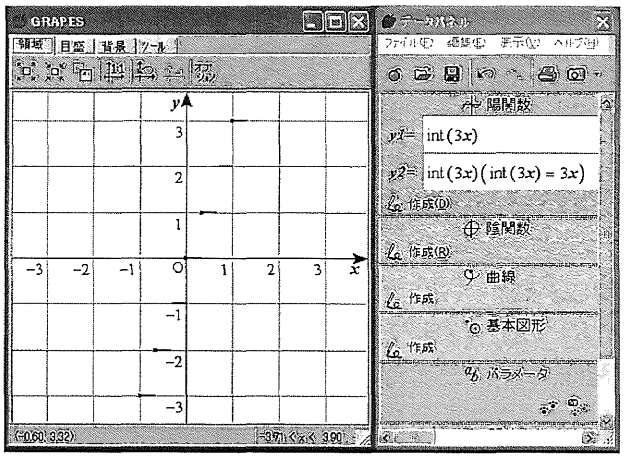


図 3: $y = [3x]$ のグラフ

このような点を GRAPES で描くには工夫が必要であるが，値だけ知りたいのであれば，「ツール」タブから「関数や式の値を表示」を選択し，「$x =$」に「2/3」を入力して，「$y1$」の値が「2.000000000000」であることを確認できる．

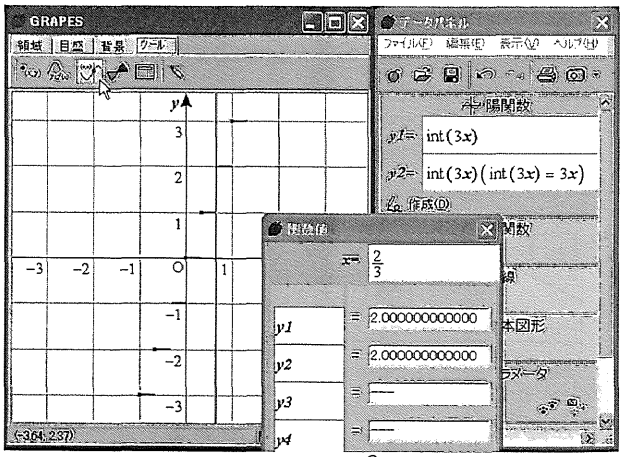


図 4: $y = [3x]$ の $x = \dfrac{2}{3}$ における値

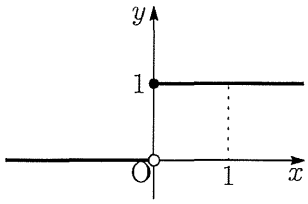
an3-2.3. 単位ステップ関数の作成

実数 x に対して,

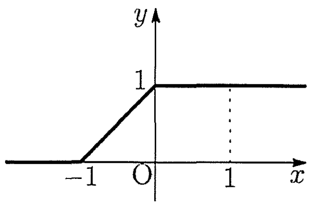
$$u(x)=\begin{cases}1 & (x \geqq 0 \text{のとき})\\ 0 & (x<0 \text{のとき})\end{cases}$$

で定義される関数 $u(x)$ を単位ステップ関数とよぶ．ここでは，単位ステップ関数 $u(x)$ を場合分けすることなく，絶対値とガウス記号を含む関数で表現する方法を考察する．次の問 2 で考えている線は，$y=u(x)$ のグラフである．

問 2. 次の線をグラフとする関数を次の手順に従って 4 種類以上作れ．手順：関数を作る→ GRAPES で確認→証明 (説明) する．



解答例 (1 種類のみ) まず，次の折れ線



をグラフとする関数を作る．$y=a|x+1|+b|x|+cx+d$ とおくと,

$$\begin{cases}-a-b+c=0 & (x<-1 \text{の傾き})\\ a-b+c=1 & (-1 \leqq x<0 \text{の傾き})\\ a+b+c=0 & (x \geqq 1 \text{の傾き})\\ a+d=1 & (\text{点 }(0,1)\text{ を通る})\end{cases}$$

より $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$, $c=0$, $d=\dfrac{1}{2}$ なので，この折れ線をグラフとする関数は $y=\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}$ である．GRAPES の陽関数で

「$(\mathrm{abs}(x+1)-\mathrm{abs}(x)+1)/2$」

を描けば，実際に求める折れ線であることを確認できる (図 5)．このとき,

$$\begin{cases}0 \leqq \dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}<1 & (x<0 \text{のとき})\\ \dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}=1 & (x \geqq 0 \text{のとき})\end{cases}$$

より，ガウス記号を用いて

$$\left[\frac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]=\begin{cases}1 & (x \geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

を得る．GRAPES で 2 つの陽関数

「$\mathrm{int}((\mathrm{abs}(x+1)-\mathrm{abs}(x)+1)/2)$」

「$\mathrm{int}((\mathrm{abs}(x+1)-\mathrm{abs}(x)+1)/2)\ (x=0)$」

を描けば，実際に求める線が得られることを確認できる (図 6).

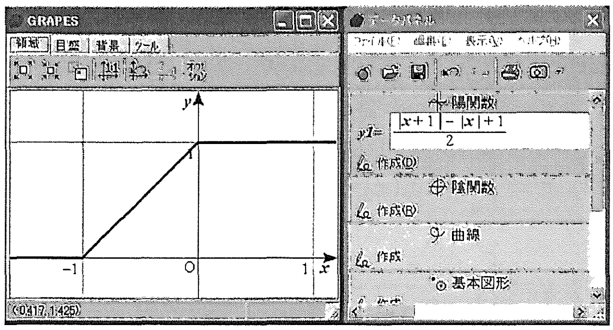


図 5: $y=\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}$ のグラフ

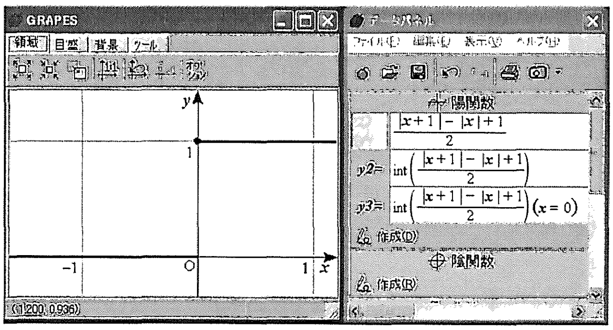


図 6: $y=\left[\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]$ のグラフ

よって，$y=\left[\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]$ が求める関数の 1 つである．□

生徒の解答をすべて挙げておく．(1) は解答例で求めたものである．

(1) $y=\left[\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]$

(2) $y=\left[\left|x+\dfrac{1}{2}\right|-|x|+\dfrac{1}{2}\right]$

(3) $y=\left[\dfrac{1}{4}|x+1|-\dfrac{1}{4}|x-1|+1\right]$

(4) $y=[\max(|x|,|x+1|)-|x|]$

(5) $y=\left[x+\dfrac{1}{2}+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\right]-[x+|x|]$

(6) $y=\dfrac{|[x+1]|-|[x]|+1}{2}$

(7) $y=\left|\left[\dfrac{x+1-|x+1|}{2}\right]\right|-\left|\left[\dfrac{x-|x|}{2}\right]\right|+1$

(8) $y=[2^x]-\left|[2^x]-\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{1}{2}$

(9) $y=\dfrac{[2^x]-|[2^x]-1|+1}{2}$

(10) $y=\left[\dfrac{x}{|x|+1}+1\right]$

(11) $y=[\tanh x+1]$

(12) $y=\left[\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Atan}(x)+1\right]$

(13) $y=\left[\sqrt[3]{\dfrac{x}{|x|+1}}+1\right]$

(14) $y=\left[\sin\dfrac{x}{|x|+1}+1\right]$

(15) $y=\left[\dfrac{x}{x^2+1}+1\right],\quad y=\left[\dfrac{x}{x^4+1}+1\right]$

一般化　$y=\left[\dfrac{x}{x^{2n}+1}+1\right]\quad(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$

(16) $y=\left[\dfrac{x}{2^{|x|}}+1\right]$

(17) $y=\left[\dfrac{\left[\mathrm{Atan}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]+2}{3}\right]$

(18) $y=\left[\dfrac{2^x}{2^x+1}+\dfrac{1}{2}\right]$

(19) $y=\left[\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x+1}{|x|+1}-1\right)+1\right]\quad(a\geqq 2)$

(20) $y=\left[\dfrac{|\sin x+\sin|x||}{2}+\dfrac{\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left|x+\dfrac{\pi}{2}\right|\right|}{2}\right]$

(21) $y=\left[\dfrac{|x+1|}{|x|+1}\right]$

(22) $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\left|[x]+\dfrac{1}{2}\right|}{[x]+\dfrac{1}{2}}+1\right)$

当然，これらはすべて単位ステップ関数$u(x)$と等しい関数である．作成の手順を確認しておこう．(1)–(4) は，折れ線にガウス記号を施している．表現方法は違うが，(2) と (4) は同じ折れ線を利用している．(5)–(9) は，階段形の差で$u(x)$を作っている．(10)–(12) は，似た曲線にガウス記号を施している．(13)，(14) は，(10) に他の関数を合成している．(15)，(16) は，(10) と同じ発想で作れ，似た形の曲線にガウス記号を施している．(17)–(20) は，多少複雑になるが，平行移動などをうまく利用している．(21) は，折れ線の除算にガウス記号を施している．(22) は，$v(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ で定義される関数 $v(x)$ を階段形の除算 $\dfrac{\left|[x]+\dfrac{1}{2}\right|}{[x]+\dfrac{1}{2}}$ で作ってから，$\dfrac{v(x)+1}{2}=u(x)$ であることを利用している．この考え方は，(6) の $|[x+1]|-|[x]|=v(x)$，(9) の $[2^x]-|[2^x]-1|=v(x)$ でも見られる．

(1)–(22) における $u(x)$ の構成方法に共通するのは，ガウス記号を含むことである．不連続な関数を扱っているので，当然かもしれないが，念のため注意しておこう．

an3-2.4. 単位ステップ関数の活用

単位ステップ関数

$$u(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

の作り方を，問 2 で確認したが，すべてガウス記号を含むものであった．以後，簡単のため，

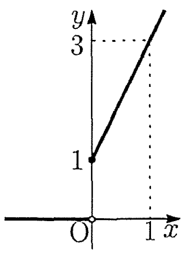
$$u(x)=\left[\frac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]$$

として話を進める．GRAPES では，関数定義で

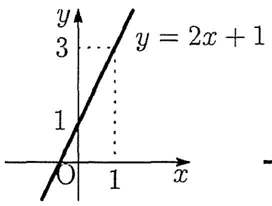
「int((abs($x+1$) − abs(x) + 1)/2)」

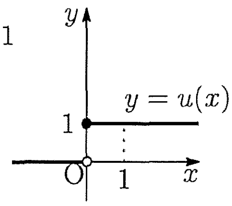
とすればよい．ただし，GRAPES で最初に定義した関数の名前は $f(x)$ となるので，GRAPES における画面では，$f(x)=\left[\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]$ と定義することになる．当然，$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ である．単位ステップ関数 $u(x)$ (GRAPES では $f(x)$) の応用として，まず，次の問を考えてみよう．

問 3. 次の線をグラフとする関数を GRAPES で確認しながら作れ．



解　$y = 2x+1$ と $y = u(x)$ のグラフ





を考えて，それぞれの関数の積をとれば，

$$y = (2x+1)u(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である．実際，図 7 のように求める線が得られる．

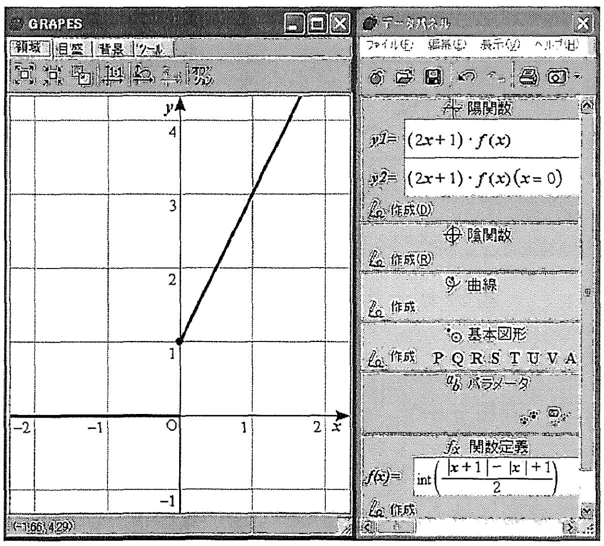
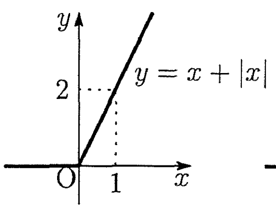


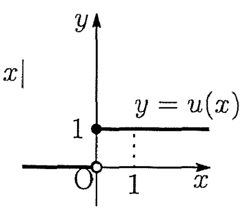
図 7: $y = (2x+1)u(x)$ のグラフ

よって，$y = (2x+1)u(x)$ が求める関数である．□

ここでは，単位ステップ関数との積を利用したが，和を利用する解法も考えられる．

問 3 の別解　$y = x+|x|$ と $y = u(x)$ のグラフ





を考えて，それぞれの関数の和をとれば，

$$y = x+|x|+u(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である．実際，図 8 のように求める線が得られる．

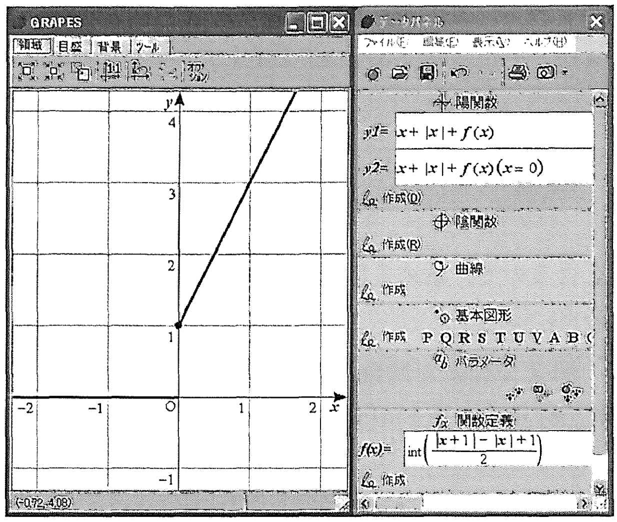


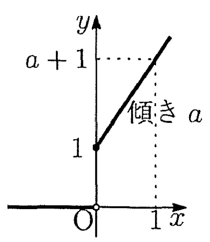
図 8: $y = x+|x|+u(x)$ のグラフ

よって，$y = x+|x|+u(x)$ が求める関数である．□

2 つの解法を紹介したが，単位ステップ関数 $u(x)$ の積と和によって，次のようなグラフの変化が確認できる．前者では「$u(x)$ を掛ける」ことによって，直線 $y = 2x+1$ の領域 $x < 0$ における部分の y 座標の値が 0 になり，後者では「$u(x)$ を足す」ことによって，折れ線 $y = x+|x|$ の領域 $x \geqq 0$ における部分が y 軸方向に 1 だけ平行移動する．これは，$u(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ であることから明らかであるが，積に関する単位元 1，和に関する単位元 0 の特徴がよく現れている．$u(x)$ を有効に使うために知っておいた方がよいだろう．

さて，問 3 を一般化してみよう．

問 4. 次の線をグラフとする関数を作れ．

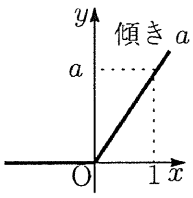


解　直線 $y = ax+1$ の領域 $x < 0$ の部分の y 座標の値を 0 にするために，$ax+1$ に $u(x)$ を掛ければ，

$$(ax+1)u(x) = \begin{cases} ax+1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

なので，$y=(ax+1)u(x)$ が求める関数である．□

別解 $y=x+|x|$ のグラフを y 軸方向に $\dfrac{a}{2}$ 倍だけ拡大して，$y=\dfrac{a}{2}(x+|x|)$ のグラフを作ると，右図のようになる．このグラフの領域 $x \geqq 0$ の部分を y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい．$\dfrac{a}{2}(x+|x|)$ に $u(x)$ を足して，



$$\frac{a}{2}(x+|x|)+u(x)=\begin{cases} ax+1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

を得るので，求める関数は $y=\dfrac{a}{2}(x+|x|)+u(x)$ である．□

問 4 で作った関数を以後，$U_a(x)$ と表す．つまり，$U_a(x)=(ax+1)u(x)$ や $U_a(x)=\dfrac{a}{2}(x+|x|)+u(x)$ とおけばよく，

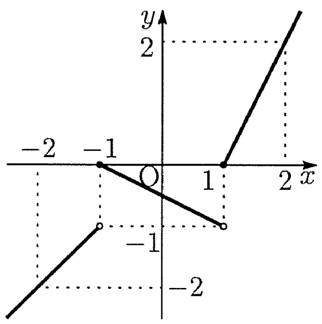
$$U_a(x)=\begin{cases} ax+1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

である．GRAPES では，関数定義で順番に

$$f(x)=\left[\frac{|x+1|-|x|+1}{2}\right],\ g(x)=(ax+1)f(x)$$

のように定義すればよい．この関数は，次のような問で有効に利用できる．

問 5. 次の線をグラフとする関数を GRAPES を利用しながら作れ．



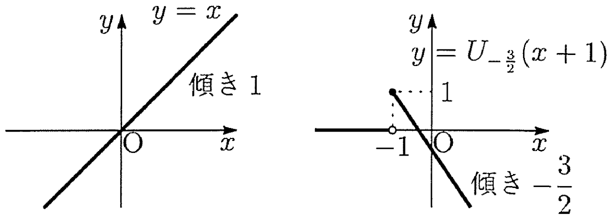
解 上で述べたように，

$$U_a(x)=(ax+1)u(x)=\begin{cases} ax+1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

とおいて，この関数を用いる．作りたい線は，

$$y=\begin{cases} x & (x<-1) \\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} & (-1 \leqq x<1) \\ 2x-2 & (x \geqq 1) \end{cases}$$

のグラフであり，左端から順に，傾きが $1,\ -\dfrac{1}{2},\ 2$ の直線よりなる．左端から順に，求める線を構成していく．まず，直線 $y=x$ を考え，領域 $x \geqq -1$ の部分の傾きを 1 から $-\dfrac{1}{2}$ に変化させ，かつ，y 軸方向に 1 だけ平行させる．そのために，$y=U_{-\frac{3}{2}}(x+1)$ との和を考える．



GRAPES で $y=x+U_{-\frac{3}{2}}(x+1)$ のグラフを描くと，図 9 のように，領域 $x<1$ の部分で正しい線となっていることが確認できる．

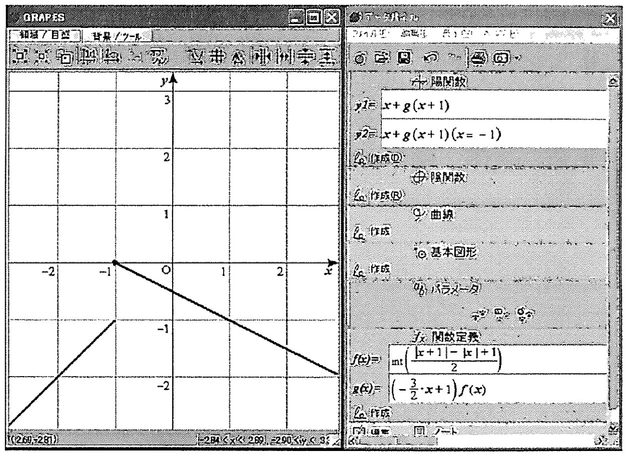
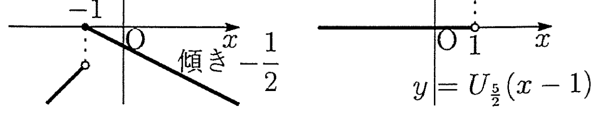


図 9: $y=x+U_{-\frac{3}{2}}(x+1)$ のグラフ

よって，さらに，$y=x+U_{-\frac{3}{2}}(x+1)$ のグラフにおける，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ の領域 $x \geqq 1$ の部分の傾きを，$-\dfrac{1}{2}$ から 2 に変化させ，かつ，y 軸方向に 1 だけ平行移動させる．そのために，$y=U_{\frac{5}{2}}(x-1)$ との和を考える．



GRAPES で

$$y=x+U_{-\frac{3}{2}}(x+1)+U_{\frac{5}{2}}(x-1)$$

のグラフを描くと，図 10 のように，求める線となっていることが確認できる．

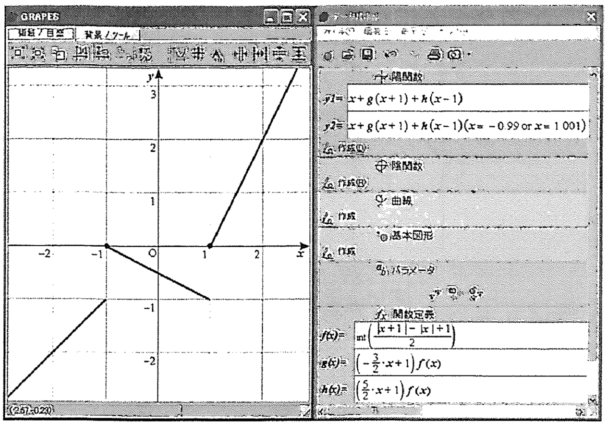
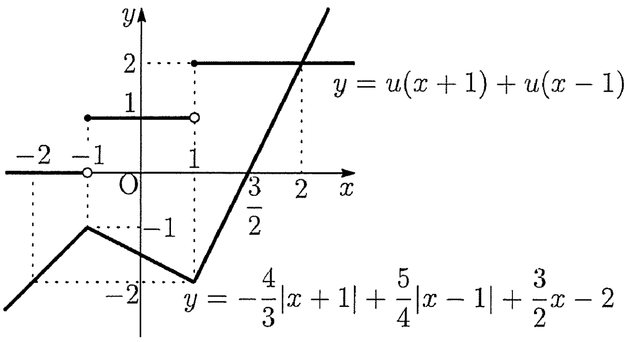


図 10: $y = x + U_{-\frac{3}{2}}(x+1) + U_{\frac{5}{2}}(x-1)$ のグラフ

よって，求める関数は $y = x+U_{-\frac{3}{2}}(x+1)+U_{\frac{5}{2}}(x-1)$ である．□

この解法は，$U_a(x)$ を利用して左端から順に線を作るものであるが，もっと直観的な考え方もある．

別解　下図において，階段形と折れ線を表すグラフの関数の和を考えればよい．



階段形は $y = u(x+1) + u(x-1)$ のグラフである．また，折れ線を表す式を問 1 の結果に従って

$$y = a|x+1| + b|x-1| + cx + d$$

とおくと，

$$\begin{cases} -a-b+c=1 & (x<-1 \text{ の傾き}) \\ a-b+c=-\dfrac{1}{2} & (-1 \leqq x < 1 \text{ の傾き}) \\ a+b+c=2 & (x \geqq 1 \text{ の傾き}) \\ a+b+d=-\dfrac{3}{2} & \left(\text{点}\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)\text{を通る}\right) \end{cases}$$

より，$a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{4}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = -2$ を得るので，折れ線は $y = -\frac{3}{4}|x+1| + \frac{5}{4}|x-1| + \frac{3}{2}x - 2$ のグラフである．これらの関数の和のグラフは，図 11 のように求める線となっている．

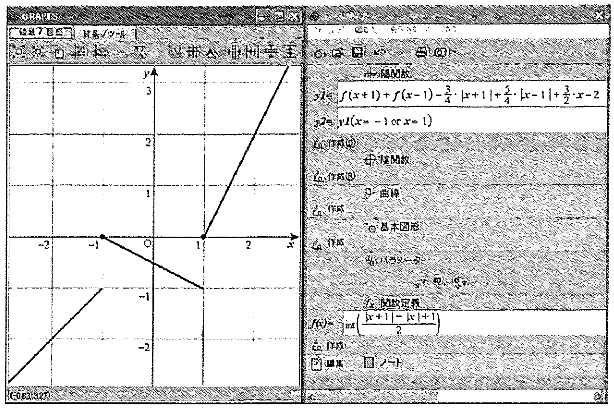


図 11: 階段形と折れ線の関数の和のグラフ

よって，求める関数は

$$y = u(x+1)+u(x-1)-\frac{3}{4}|x+1|+\frac{5}{4}|x-1|+\frac{3}{2}x-2$$

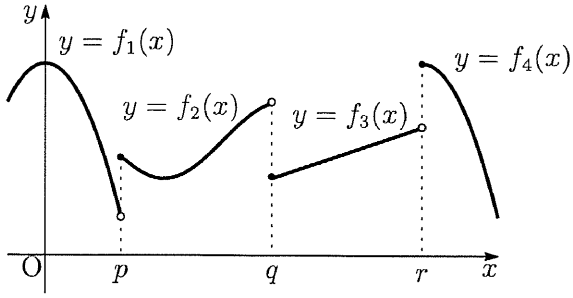
である．□

この別解は，問 3，4 を解かずに，問 1，2 から直接，問 5 を扱えることを示している．生徒の理解の程度や時数を考えて，問 3，4 を扱うか，扱わないか選択してみるとよいだろう．

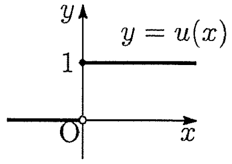
an3-2.5. 不連続な曲線の単位ステップ関数による表現

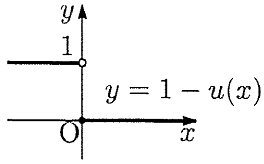
単位ステップ関数 $u(x)$ を用いて，不連続な曲線をグラフとする関数を作ってみよう．とりあえず，4 つの関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ のグラフよるなる不連続な曲線を，次の問で考察する．

問 6. 次の曲線をグラフとする関数を，$u(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ を用いて作れ．

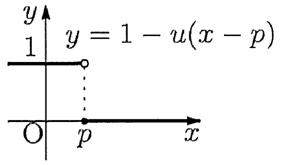


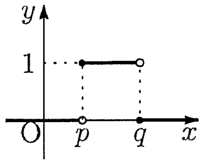
解　まず，$u(x)$ を用いて，次の図の右側の線を作る．





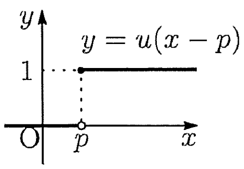
そのためには，$y=u(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動してから，y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよいので，$y=1-u(x)$ である．この線を x 軸方向に p だけ平行移動して，$y=1-u(x-p)$ のグラフを考えれば，次の図の左側を得る．続いて，右側の線も作る．

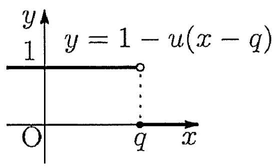




$y=u(x-p)(1-u(x-q))$

そのために，$y=u(x-p)$ と $y=1-u(x-q)$ のグラフ





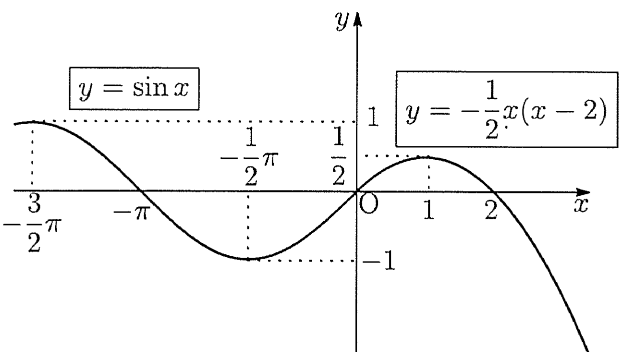
を考えれば，積をとり，$y=u(x-p)(1-u(x-q))$ のグラフでよいことが分かる．よって，求める関数は

$$\begin{aligned} y =& f_1(x)(1-u(x-p)) + f_2(x)u(x-p)(1-u(x-q)) \\ &+ f_3(x)u(x-q)(1-u(x-r)) + f_4(x)u(x-r) \end{aligned}$$

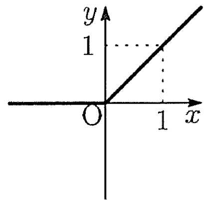
である．□

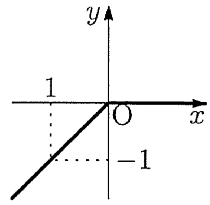
ここでは，4 つの関数のみによる曲線を考えたが，何個の関数であっても，連続な箇所があっても，同じ方法で曲線を表現することができる．つまり，例えば $u(x)=\left[\dfrac{|x+1|-|x|+1}{2}\right]$ のように $u(x)$ をガウス記号で表現したことを思い出せば,「$u(x)$ を用いる」，すなわち,「ガウス記号を用いる」ことによって，どのような曲線でも表現可能である．ただし，連続な箇所のみであれば，$u(x)$ もガウス記号も用いることなく，絶対値による表現が可能である．最後に，このことを次の問で確認しておこう．

問 7. 次の線をグラフとする関数を，$u(x)$ もガウス記号も用いずに作れ．



解　次の 2 つの折れ線をグラフとする関数を作る．





左側は $y=\dfrac{x+|x|}{2}$ であり，右側は $y=\dfrac{x-|x|}{2}$ である．これらの関数は，

$$\frac{x+|x|}{2}=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x & (x \geqq 0)\end{cases},\quad \frac{x-|x|}{2}=\begin{cases}x & (x<0)\\ 0 & (x \geqq 0)\end{cases}$$

をみたす．よって，求める関数は，

$$y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+|x|}{2}\cdot(x-2)+\sin\left(\frac{x-|x|}{2}\right)$$

である．

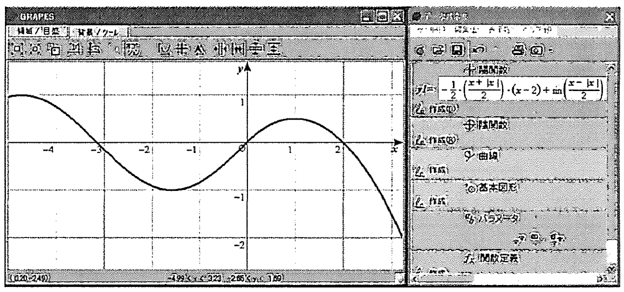


図 12: $y=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+|x|}{2}\cdot(x-2)+\sin\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)$

GRAPES での描画によって，求めた関数が正しいことも確認できる (図 12)．□

次のページから,「附録：GRAPES の使い方」も載せてあるので，参照していただければ幸いである．

an3-2.6. 附録：GRAPES の使い方

○ GRAPES のインストール

関数グラフソフト GRAPES は，主に次のような特徴を持つ．

(1) 無料で利用できる関数グラフソフトであり，Windows OS (Windows 7，Vista，XP，2000) でのみ使用できる．
(2) レジストリを使用しないので，USB メモリ，外付けハードディスク等の記録メディアからも起動できる．
(3) 陽関数，陰関数のグラフ描画等が簡単にできる．
(4) 定数の値を変えることによって，軌跡の描画ができる．

インストールは次のようにしてできる．GRAPES のウェブサイト “`http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/`” で「grps675a.exe」(原稿執筆時点での最新バージョン) をダウンロードして，実行する (図 1，2 参照)．このとき「GRAPES」フォルダが作成されるので，その中にある「grapes.exe」を実行して GRAPES を起動する．例えば,「grapes.exe」を USB メモリに保存しておけば，そこから起動することも可能である．USB メモリを持っている生徒も多いので，そのように指示しておくのもよいだろう．

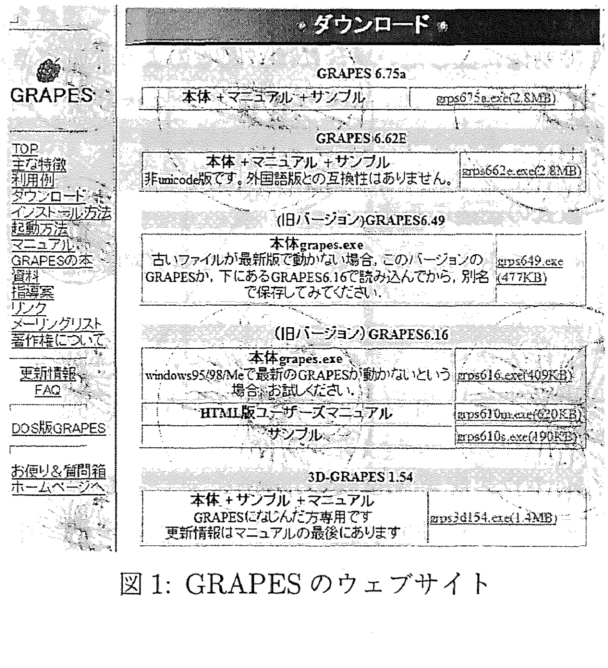


図 1: GRAPES のウェブサイト

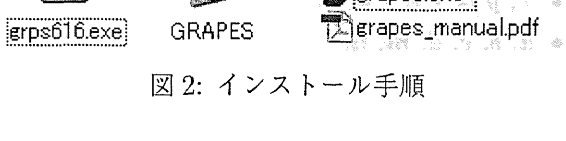


図 2: インストール手順

実際に GRAPES を起動して，いくつかグラフを描くと，図 3 のような画面になる．

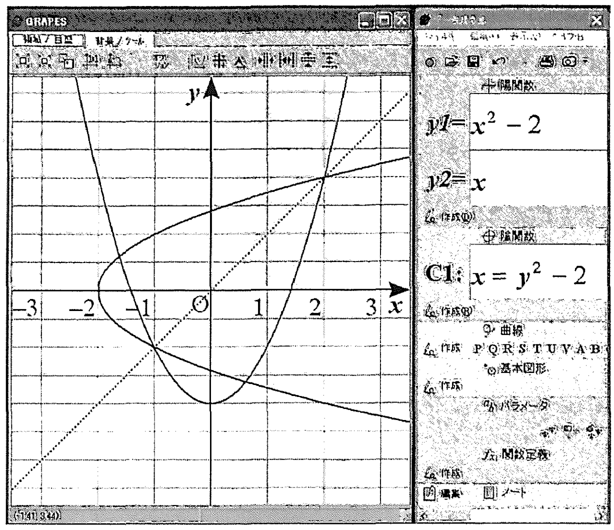


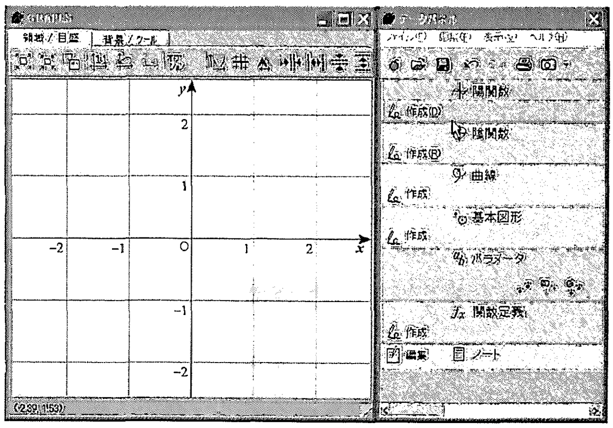
図 3: スクリーンショット

ここでは，陽関数 $y = x^2 - 2$，$y = x$ のグラフと陰関数 $x = y^2 - 2$ のグラフを描いている．

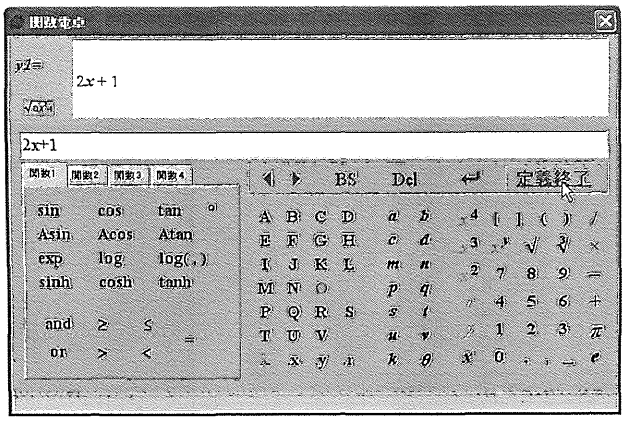
○陽関数のグラフの描画方法

GRAPES の操作の詳細については,「GRAPES」フォルダ内にある「grapes_manual.pdf」を参照していただきたい．ここでは，できるだけ簡潔に，陽関数のグラフの描画における手順を，直線 $y = 2x + 1$ を例として説明する．

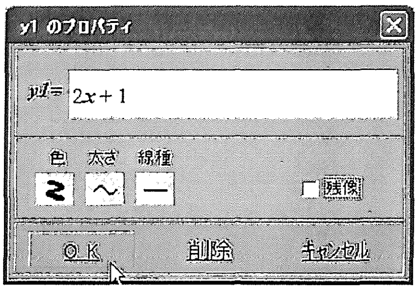
(1) データパネルの「陽関数」にある「作成」ボタンをクリックする．



(2) 「$y1 =$」のテキストボックスに「$2x + 1$」を入力して,「定義終了」ボタンをクリックする．

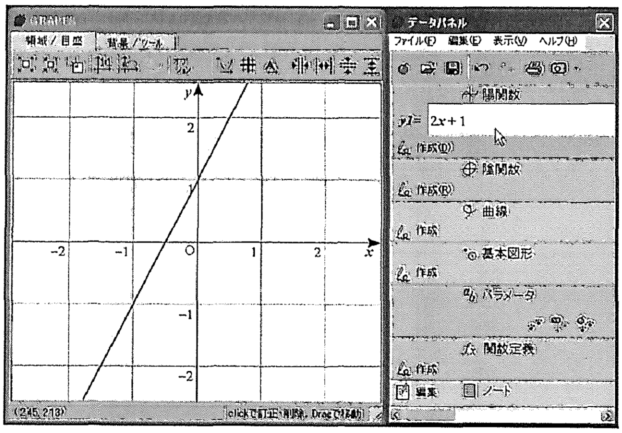


(3) 「$y1$ のプロパティ」ウィンドウで「OK」ボタンをクリックする．



ここでは，色，太さ，線種，残像などの変更も可能である．

(4) この段階で，次の図のように直線 $y = 2x + 1$ が描画される．



ここで，データパネルの「陽関数」における「$y1=$」ボタンをクリックすると，グラフの表示・非表示を切り替えられる．

(5) この陽関数のグラフを再編集する場合は，データパネルの「陽関数」における「$2x+1$」ボックスをクリックして，(2)，(3) と同様な作業をする．具体的には，(2) における $2x+1$，(3) における色，太さ，線種，残像などを変更できる．

(6) 陽関数のグラフを追加する場合は，(1)，(2)，(3) と同様な作業を繰り返す．追加した陽関数の名前は，「$y2=$」,「$y3=$」，$\cdots$ のようになる．

定義域の指定

括弧内で定義域を指定することができる．例えば，「$2x+1$」の後ろに「$(x >= 0)$」を追加すれば，半直線を描画できる．いくつか例を挙げておく．

- 半直線：「$2x + 1\ (x >= 0)$」
- 1 点：「$2x + 1\ (x = 0)$」
- 線分：「$2x + 1\ (0 <= x <= 1)$」
- 2 点：「$2x + 1\ (x = 0 \text{ or } x = 1)$」

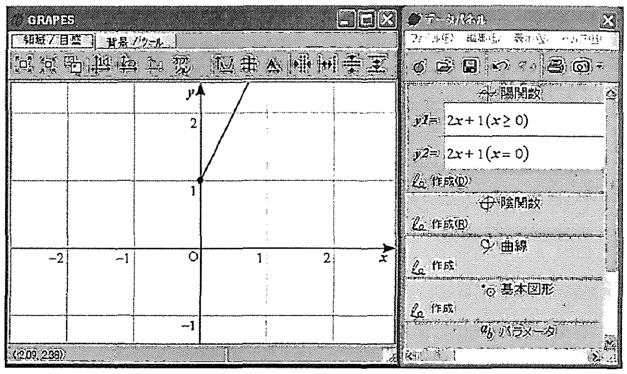


図 4: 端点を表示した半直線

GRAPES の描画では，端点を含むか含まないかが分かりにくい．例えば，半直線の描画において端点を黒丸で明確に表したい場合には，図 4 のように，半直線「$2x+1\ (x >= 0)$」と 1 点「$2x+1\ (x=0)$」の両方を描くとよい．

○数式の記述の基本

GRAPES における最も基本的な数式の記述をまとめておく．

- 2 乗：x^2，3 乗：x^3，…
- 平方根：Sqrt(x)，立方根：Cbrt(x)
- 絶対値：abs(x) または [x]
- ガウス記号：int(x)
- 三角関数：sin(x), cos(x), tan(x)
- 和：+，差：−，積：*，商：/

[x] はガウス記号ではなく，絶対値を表すので，間違えないようにして欲しい．文字の扱いについては，次のようになる．

- x, y は変数を表す．
- $a, b, c, d, m, n, \cdots$ などは自動的にパラメータになり，適当な刻み値で増減できる．

- e は自然対数の底 e を表す.
- Pi は円周率 π を表す.

e や Pi などのように，予め意味の定められた文字も存在することに注意しておきたい.

○パラメータの使い方

ここでは，パラメータの使い方について紹介しよう．例えば，陽関数で「$ax+b$」を描画すると，自動的に a, b がパラメータとなり，その初期値は $a=1, b=1$ に設定される (図 5).

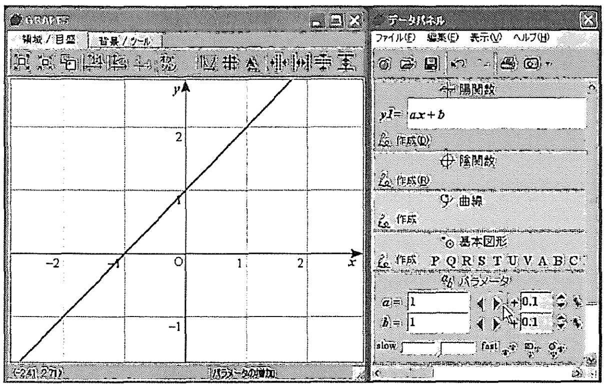


図 5: $y = ax + b$ の描画 ($a = 1,\ b = 1$)

データパネルの「パラメータ」にある△ボタンをクリックすると，刻み値 0.1 でパラメータ a, b の値を増減できる．例えば，パラメータ a の△ボタンを 5 回クリックすれば，$a = 1.5$ となり，図 6 のような描画が得られる.

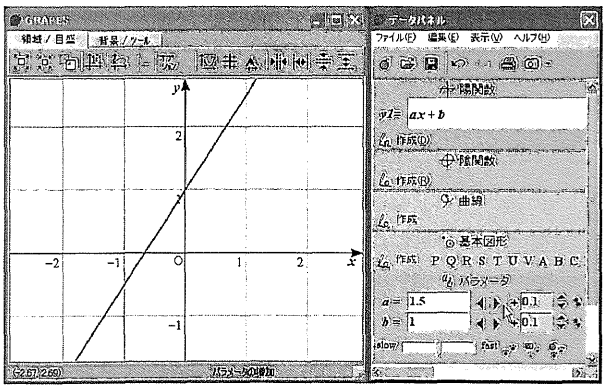


図 6: $y = ax + b$ の描画 ($a = 1.5,\ b = 1$)

また,「y1 のプロパティ」で「残像」にチェックを入れておいて (図 7)，先程と同じ作業をすると，図 8 のように残像を描画できる.

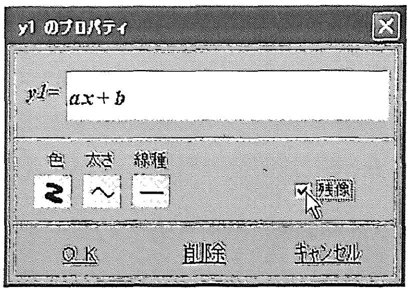


図 7: 残像にチェック

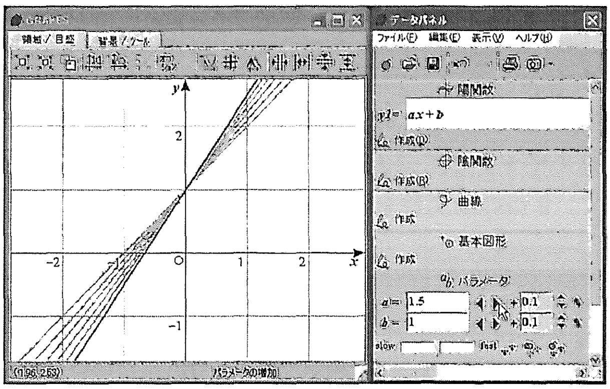


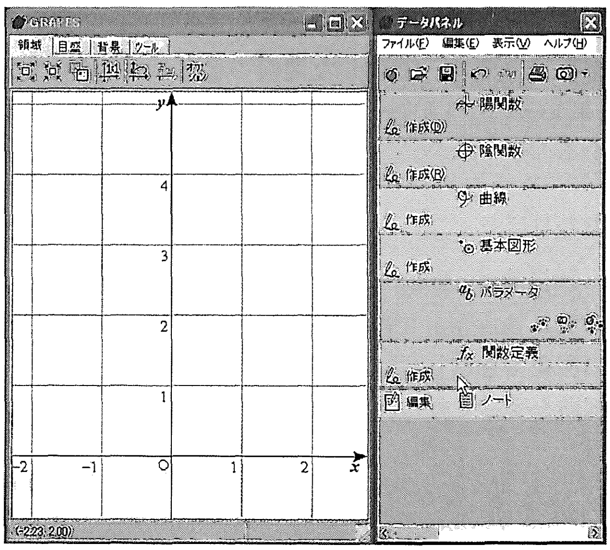
図 8: 残像の描画

残像は，特に軌跡や包絡線の確認で有効に利用できる.

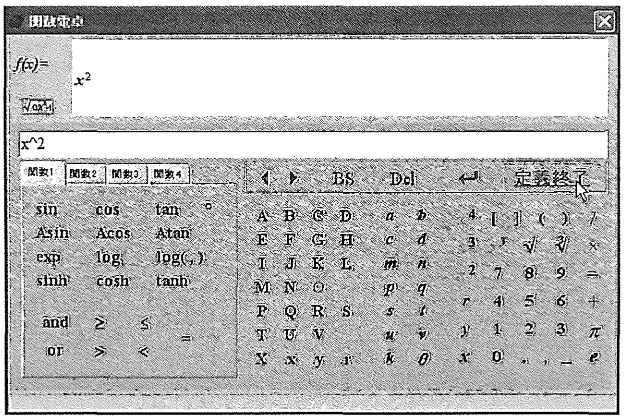
○関数定義

GRAPES では関数の定義も可能である．例として，$f(x) = x^2$ を定義し，$y = f(x)$ と $y = f(x-1)+2$ のグラフを描いてみる.

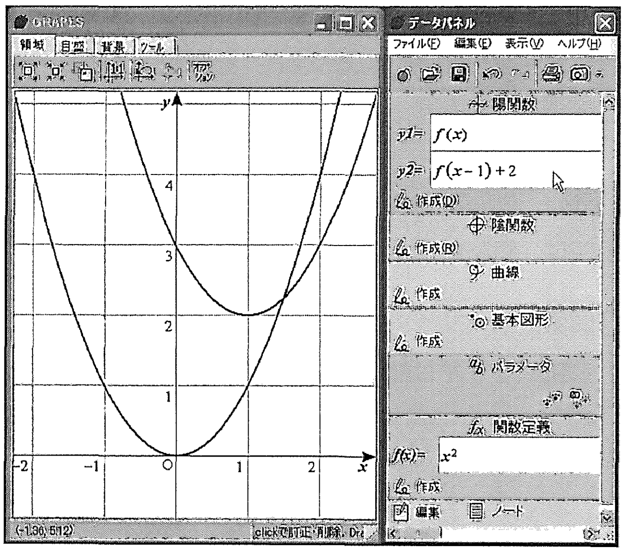
(1) データパネルの「関数定義」にある「作成」ボタンをクリックする.



(2) 「$f(x) =$」のテキストボックスに「x^2」を入力して,「定義終了」ボタンをクリックする.



(3) データパネルの「陽関数」にある「作成」ボタンをクリックして,「$f(x)$」と「$f(x-1)+2$」を入力して，2つの陽関数を順に描画する．



(4) 関数定義を追加する場合は，(1)，(2) と同様な作業を繰り返す．追加した関数の名前は,「$g(x)$ =」,「$h(x)$ =」,「$f1(x)$ =」,「$f2(x)$ =」, …のようになる．

おわりに

本研究は，2009年度科学研究費補助金「数式処理システム maxima で確認し創造する態度を育む数学教材の開発と普及」(奨励研究，課題番号：21913006) の補助を受けて行われた．

(2010年　須田)

d1－2.　『数える』

関連分野：代数分野
高等数学：数列，数列の和，順列組み合わせ
対象学年：中学１年生
関連単元：「文字と式」
教 材 名：「数える」

≪個数の処理の考察≫

旧学習指導要領では，高校の数学Ｉの中に「個数の処理」という単元があった。それ以前は，ものの個数を数えるような教材は「確率」の分野に入っており，確率・統計の前座的な存在であった。また，現行の指導要領ではどうかといえば，数学Ａの中の「場合の数と確率」「集合と論理」という単元に吸収されている。自然数の和のような身近な和については，数学Ｂの中の「数列」の中に入っている。

高校において，規則性や数列の和や順列組合せを学ぶとき，大抵すぐにΣやｎＰｒ，ｎＣｒといった記号を導入する。これらの記号や式は，非常に合理的で，しばしば美しい一般化を可能にし，魅力的だ。これは，中学で文字式を学習したときに，面倒な算数の文章題（いわゆる～算といった名称のもの）を全て連立１次方程式で機械的に解けるようになったときの感動と似ている。また，初等幾何の図形の性質が，座標やベクトルの計算によって簡単に示される場合も同じような新鮮な驚きがある。しかし高校の授業でΣ記号等はそのような魅力を発揮しているだろうか。残念ながらそうは思えない。その理由として，算数や初等幾何のようにひとつひとつ性質を考えながら「ものを数える」「規則を見つける」という『遊び』のような段階が足りないからではないだろうか，と考えた。

一方，小学７年生のような中１は，クイズのような謎解きが大好きである。そこで今回私は中学１年生の授業の中で，以前の高校数学Ｉ「個数の処理」にあったような内容を文字の威力を実感するための教材のひとつとして取り入れてみた。実際に最近授業中に取り組んでみておもしろかった教材を紹介する。流れとして，自然数の和，平方数の和にも触れたが，中学生であるからΣ記号は使わなかった。また，厳密な文字計算や一般化も要求していない。

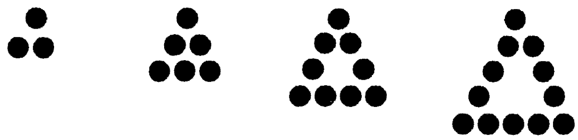
なお，自然数・平方数・立方数の和については，本校数学科によ『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発－大学での学びにつながる数学教材－（2007年度）』を参照されたい。

d1－2.1.　規則探し基本編

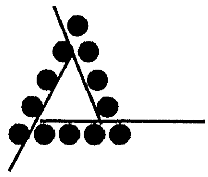
問（以下，問題文は同じ）
次のように小石を並べた。
規則を考え，10番目，ｎ番目の小石の数を求めよ。

（1）

１番目　　２番目　　３番目　　４番目



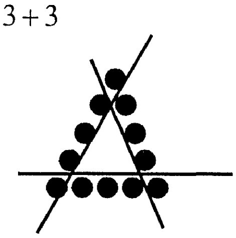
結果は30，3n と簡単だが，考え方はいろいろある。



上手に３つに分ければ

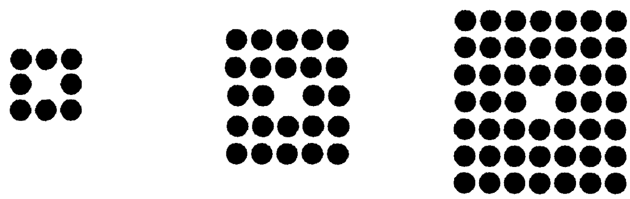
$n\times 3$

図のように分ければ，$(n-1)\times 3+3$

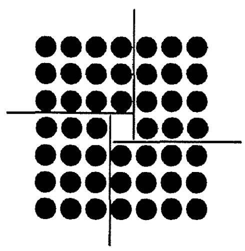


（2）

１番目　　２番目　　３番目



これも答えは簡単である。
やり方は（1）の応用として



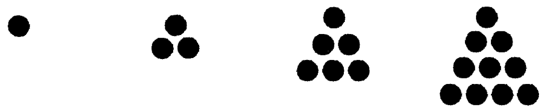
$n(n+1)\times 4$

または真ん中の穴に注目して，$(2n+1)^2-1$

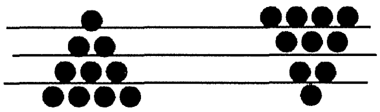
d1－2.2.　多角形数

（3）三角数（自然数の和）

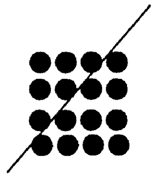
1番目　　2番目　　3番目　　4番目



これは台形の面積などとからめて考えると$\dfrac{n(n+1)}{2}$



・三角数２つにわけると　$\dfrac{(n-1)n}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

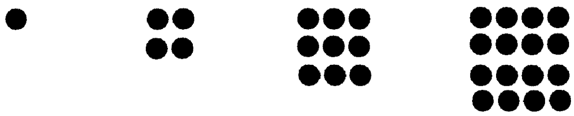


・ｎ番目の三角数２つから重なった対角線をのぞくと

$$\frac{n(n+1)}{2}\times 2-n$$

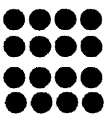
（4）四角数（平方数）

1番目　　2番目　　3番目　　4番目

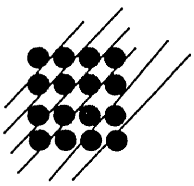


これをただの正方形とだけみるのではなく，いろいろな区切り方を考えるのが面白い。

・　正方形なので　$n\times n$



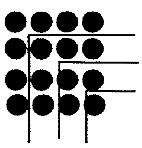
・　斜めに区切ると



$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$$

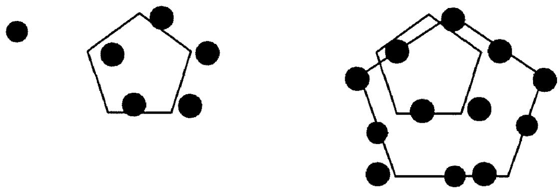
・正方形に分けていくと奇数の和

$$1+3+5+7+\cdots$$

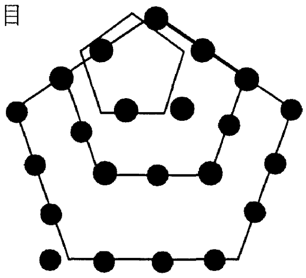


（5）五角数

1番目　　2番目　　3番目



4番目



・四角数と三角数に分ける

ｎ番目の四角数（平方数）＋（ｎ－1）番目の三角数

$$n^2+\frac{(n-1)n}{2}$$

・ｎ番目の三角数３つに分けて重なったところを引く

$$\frac{n(n+1)}{2}\times 3-2n$$

この見方は，多角形数に拡張できる。

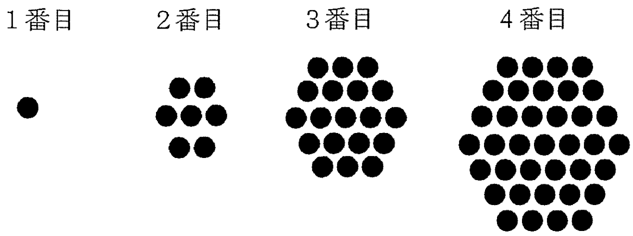
（6）六角数以上

三角数に分けるようにすると，P 角数は全て同じように表せる。

n番目のP角数は

$$\frac{n(n-1)}{2}\times(p-2)+n=\frac{n}{2}\{(p-2)n-(p-4)\}$$

（7）蜂の巣型



・真ん中をとって残りを正三角形6個に6等分すると

$$1+6\times\frac{(n-1)n}{2}$$

・n個目の三角数6個が重なってみるとみれば

$$\frac{n(n+1)}{2}\times 6-6n+1$$

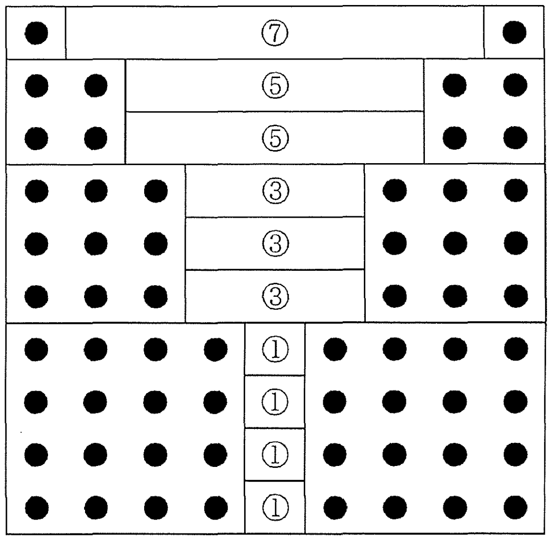
・外側から玉ねぎのようにむいていき
　　6角形の皮の和とみると

$$1+6+12+18+\cdots=1+6\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$$

d1－2.3.　平方の和

これについては，本校数学科作成の『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発－大学での学びにつながる数学教材（「集団の特徴をつかむ」「関数の微小な変化をとらえる」）の完成と普及－（2007 年度)』の中で詳しく取り上げたので，最近の授業で出てきたユニークなものを紹介する。

(1) 奇数の和が平方数になることを利用する



平方の和 S は奇数の和に分解できるから，

$$1^2=1$$

$$2^2=1+3$$

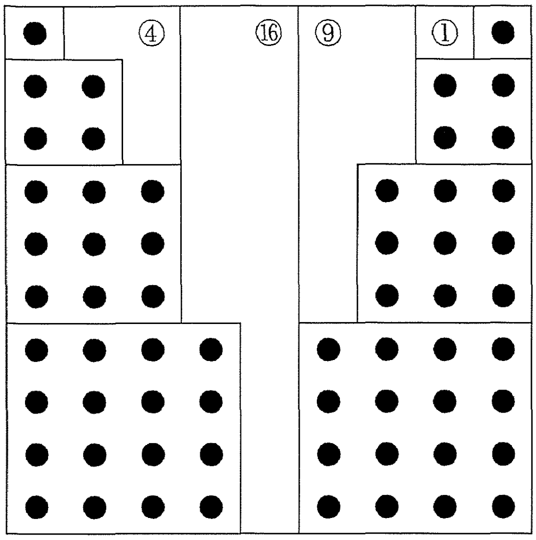
$$3^2=1+3+5$$

…

図のように並べて番号をふると，

$$3S=(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$$ とわかる。

(2) 三角数の和が平方数になることを利用する



平方の和Ｓは三角数の和に分解できるから，

$$1^2=1$$

$$2^2=1+3$$

$$3^2=3+6$$

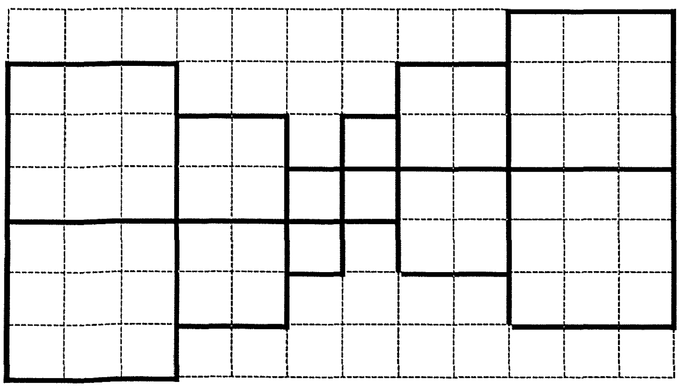
$$4^2=6+10$$

$$\cdots$$

図のように並べて番号をふると，

$$3S=(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$$ とわかる。

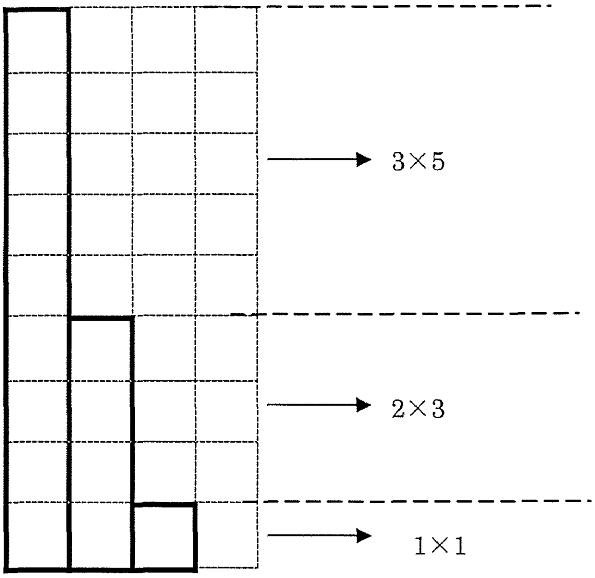
(3) 正方形を４セット並べる



図で足りない部分も $1^2+2^2+\cdots$ なので

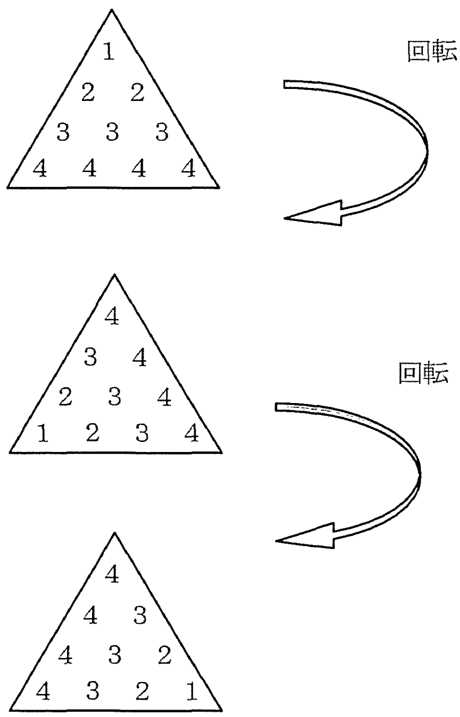
$$S\times 6=(2n+1)\times(n+n^2)$$ とわかる。

(4) ２辺が１，n^2 の長方形を並べる



右のマス目の個数は $n\times(2n-1)$

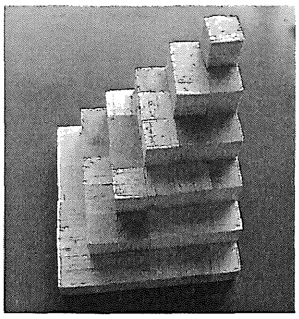
(5) 次のような三角形を考え，１２０°，２４０°回転させ，３つを組む。



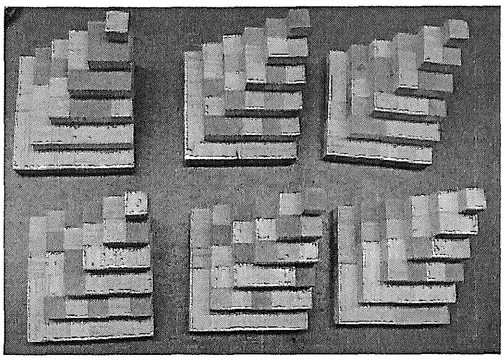
すると，３Ｓ＝三角数×（２ｎ＋１）となっていることがわかる。

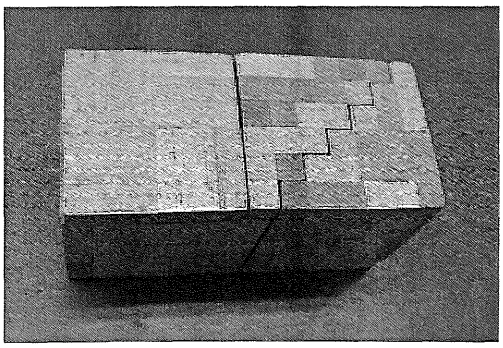
(6) 立体を利用する（工作編）

1辺1の立方体を写真のように積み上げる。



これを6個作り，組んで立方体にする。

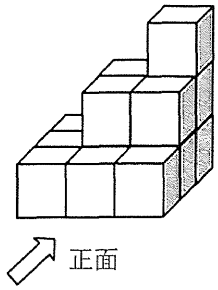




(7) 立体を利用する（数え上げのアイデア）

1辺1の立方体を図のように積み上げる。

例えば3段の場合



①上から見たときの個数は

1	2	3
1	2	2
1	1	1

②正面から見たときの個数は

0	0	1
0	2	2
3	3	3

③　①+②を作り

左に1列増やす

0	1	2	4
0	1	4	4
0	4	4	4

④　②を対角線に対称に移し，

右に1列増やす

3	2	1	0
3	2	0	0
3	0	0	0

③+④を作ると　$\left(1^2+2^2+3^2\right)\times 3=\dfrac{3+4}{2}\times 3\times 4$

n段について同様に考えると，

$$\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)\times 3=\frac{n+n+1}{2}\times n\times(n+1)$$

これは数年前の授業からでてきたアイデアで，実にユニークである。

d1−2.4.　２つの和

(A) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)$

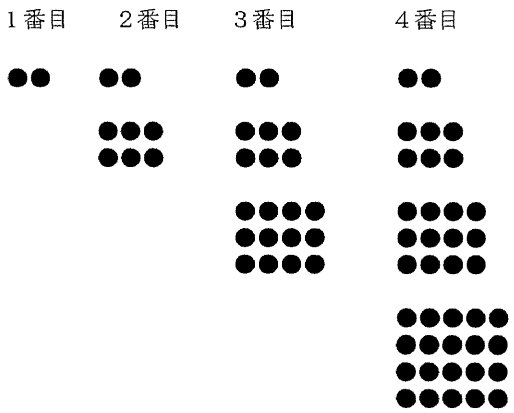
と

(B) $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times1$

(A)　連続２数の積の和

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)$$

問次のように小石を並べた。
ｎ番目の小石の数はどうなるか。



高校生ならば，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ と表現してから展開して

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

…（＊）

と計算するだろう。

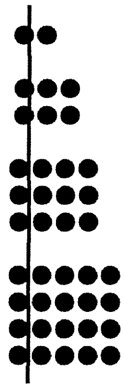
$$2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}m\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

とかくと，自然数の和の和が連続３数の積を３で割ったものになっていることがわかる。

中学生からでた解法を紹介する。

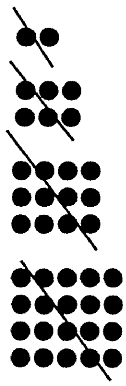
解法１
一番左１列を切り離すと，三角数と四角数の和となっている。これは式（＊）を図示したものといえる。

（４番目）



解法２
長方形の形が足されていくので，各長方形を斜めに半分にすると，三角数の和×２　とわかる。

（４番目）



解法３
つい先日，今年の中学１年生の授業から出てきた解法である。次のような鮮やかな式変形が授業中に飛び出した。

求める和$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)$

のすべての項を３倍し，

$$1\cdot 2\times(3-0)+2\cdot 3\times(4-1)+3\cdot 4\times(5-2)+\cdots+(n-1)n\times\{(n+1)-(n-2)\}+n(n+1)\times\{(n+2)-(n-1)\}$$

$$=(1\cdot 2\cdot 3-0\cdot 1\cdot 2)+(2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3)+\cdots+\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$$

$$=-0\cdot 1\cdot 2+n(n+1)(n+2)$$

$$=n(n+1)(n+2)$$

　これを考えた生徒のコメント
「2 つ並んでいるのだから，３掛ければうまくずれるのではないかと考えた」
　この計算法なら，連続３数の和を４倍すると，連続４数になることもわかる。

$\boxed{\text{解法４}}$

　ｎが偶数ならば，２個ずつ組にして，

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+5\times 6+6\times 7+\cdots$$

$$=2(1+3)+4(3+5)+6(5+7)\cdots$$

$$=2\times 2^2+2\times 4^2+2\times 6^2+\cdots$$

　ととらえる。ｎ＝2mならば,

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)$$

$$=2\times 2^2\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2\right)$$

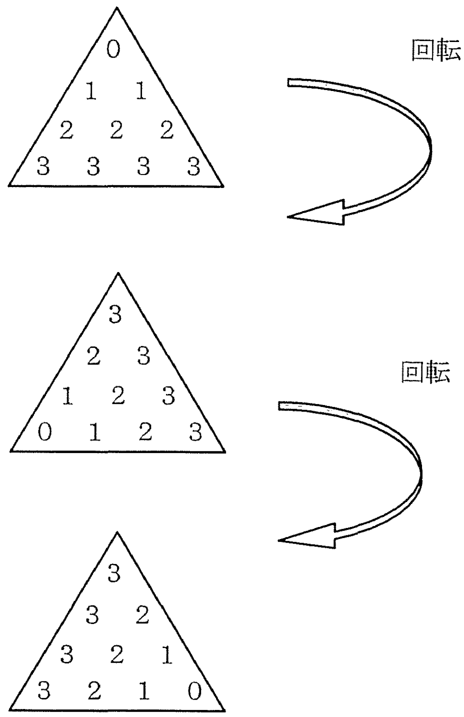
$$=8\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$=\frac{8}{6}\times\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$\boxed{\text{解法５}}$

次のような三角形を考え，１２０°，２４０°回転させ，３つを組む。



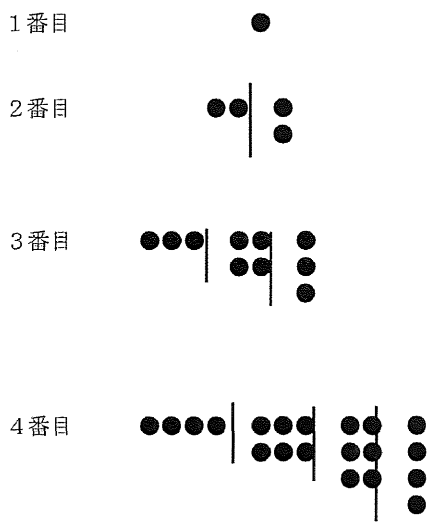
すると，３Ｓ$=2n\times\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$となっている。

これは平方の和の解法の発展と見ることができる。

(B) $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times1$

この問題では，授業中に多くのアイデアが発表され，印象的な問題となった。

> 問 次のように小石を並べた。
> n番目の小石の数はどうなるか。



この数列の和 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times1$

は，高校生ならΣを用いて

$\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$ と表現してから，

$$\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

… (★)

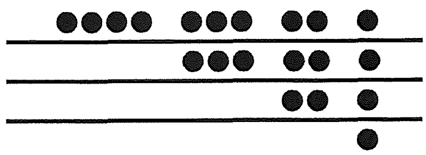
というふうに計算するのが一般的だ。
この計算は，Σの便利さを実感できるものではあるが，Σの中に項数nが入っており，わかりにくいという高校生もいる。過去に大学入試問題にも出題されている。

この数列の和をΣ計算を使わず，求めることはできないだろうか。授業でとりあげてみたところ，中学生からいろいろな解法が発表された。

解法１

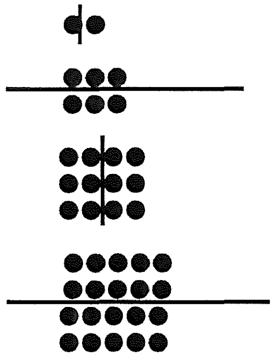
横に区切ると，下から三角数が順に並んでいる。

（４番目）



ここで，連続２数の積の和Ａと比較する。こちらは縦横交互に分け，すべて半分に分割してみる。すると，結果は半分になっていることがひとめでわかる。

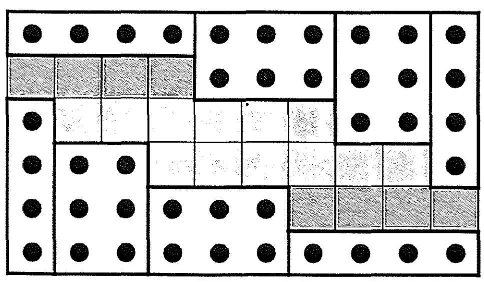
（４番目）



これは三角数の和という点では前述の斜め半分と同じだが，よりわかりやすくＢとの比較がしやすい。授業中に驚かされた解法であった。

解法２

逆さにして１行あけて配置すると，真ん中の部分は
（４番目）



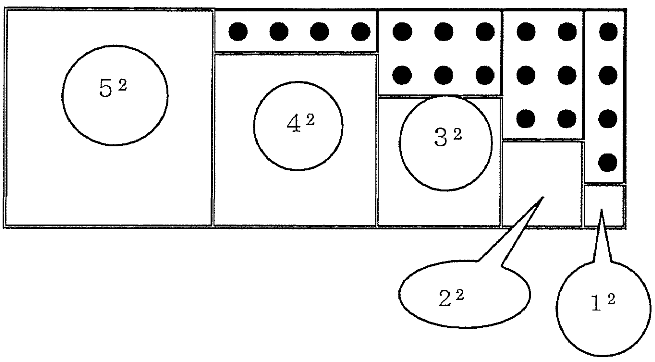
1行目　⇒　n
2行目　⇒n＋（n－1）－1　　　＝2（n－1）
3行目　⇒n＋（n－1）＋（n－3）－1－2
　　　　　　　　　　　　　　　　＝3（n－2）
…
となり，求めたい和と同じものとなっている。
したがって和は

$$(n+2)\times\frac{n(n+1)}{2}\div 3=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

解法3

平方数を加え，長方形を作る。これは高校生がΣを用いて計算する（式★）を図示したものといえよう。図示するとわかりやすい。

（4番目）

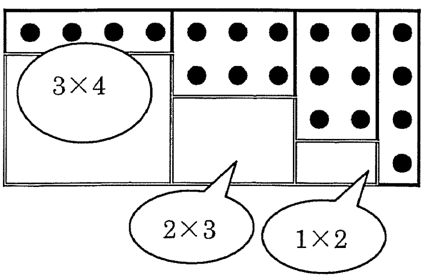


解法4

(A) の連続2数の積の和を加え，長方形を作る。

今年の中学1年生の授業から出てきたものである。

（4番目）



式で見れば，

$$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times 1$$

$$=1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times(n+1-n)$$

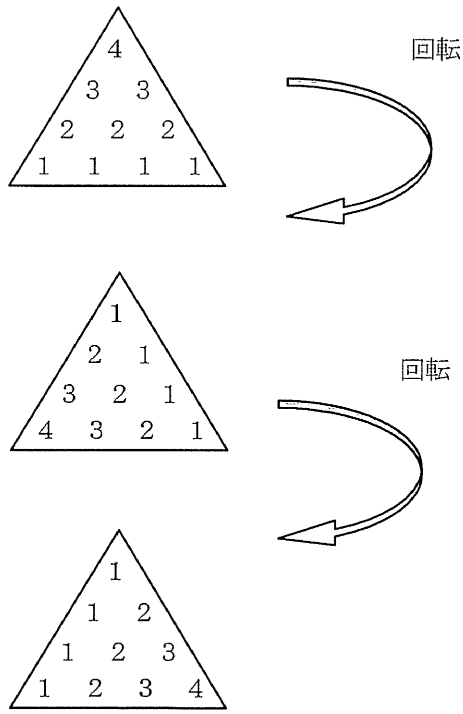
$$=(1+2+3+\cdots+n)n-\{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}n-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

解法5

次のような三角形を考え，１２０°，２４０°回転させ，３つを組む。



すると，三角数×（n＋2）となっている。

よって

$$\frac{n(n+1)}{2}\times(n+2)\div 3=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

鮮やかな印象を残した解法である。これはパズル好きの生徒が思いついた解法だが，平方の和を求めたときに三角形を使う解法があったので思いついたそうだ。

$\boxed{\text{解法6}}$

これも今年の中学１年生の授業からのアイデア。

隣り合う結果の比をとる。

$$1\cdot1=1$$
$$\times\frac{4}{1}$$
$$1\cdot2+2\cdot1=4$$
$$\times\frac{5}{2}$$
$$1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1=10$$
$$\times\frac{6}{3}$$
$$1\cdot4+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1=20$$
$$\times\frac{7}{4}$$
$$1\cdot5+2\cdot4+3\cdot3+4\cdot2+5\cdot1=35$$

このようになっていることから

ｎ番目の結果は

$$\frac{4}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{6}{3}\times\frac{7}{4}\times\cdots\times\frac{n+2}{n}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$\boxed{\text{解法7}}$

これも今年の中学１年生の授業から。

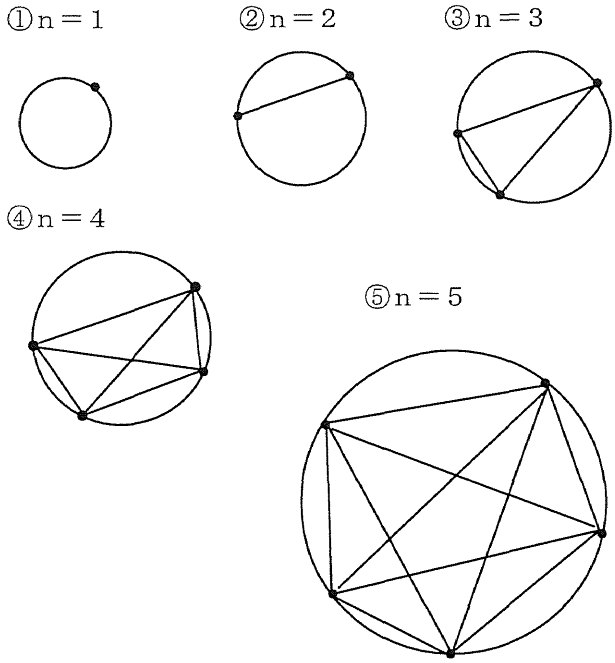
パスカルの三角形から探し出せる。

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
```

d1－2.5.　等比数列か？

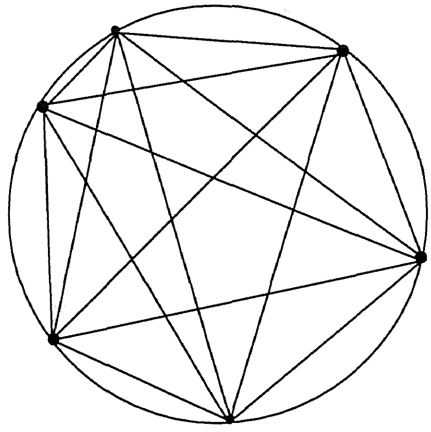
これは高校では順列・組合せの練習問題としてよく取り上げられる数列である。

円周上にｎ個の点をとり，それらをすべて弦で結ぶ。そのとき，分割によってできる領域の個数が最も多くなるようにする。円は何個に分割されるか？



ｎが１～５のときには，１，２，４，８，１６となるので，殆どの生徒が６番目は３２と予想する。高校生でとりあげると，多くの生徒は等比数列の導入かと思い，ｎ＝６の図を描きもせず「次は３２」と答える。

しかし点が６個の場合，何度数えても３１個しか分割個数がない。これは不思議だ。中学生はこれをどう考えるか。



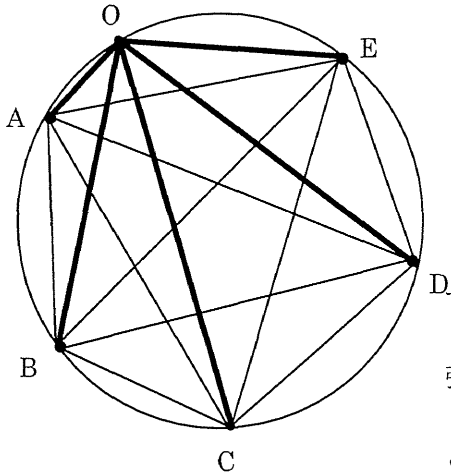
アイデア１

６個目の点からでる５本の弦について，新しい交点をすべて数える。

　１本目上の交点　　　０
　２本目上の交点　　１×３
　３本目上の交点　　２×２
　４本目上の交点　　３×１
　５本目上の交点　　　０

これらに端の１を足して

　　０＋１
　１×３＋１
　２×２＋１
　３×１＋１
　　０＋１



を合計すると１５あるので新しい領域は１５個

１６＋１５＝３１個

同様に考えると，ｎ＝７のときは

　　０＋１
　１×４＋１
　２×３＋１
　３×２＋１
　４×１＋１
　　０＋１

合計２６増えるから　５７個

これをｎを使って表せば

{（ｎ－１）－０}　×０＋１
{（ｎ－１）－１}　×１＋１
{（ｎ－１）－２}　×２＋１

となるので，　{（ｎ－１）－α}　×α＋１
（αは0からｎ－１までの整数)
を加えていけばよい。

　ｎ＝８のときは　４２個増えて　９９個
　ｎ＝９のときは　６４個増えて　１６３個
とわかる。

アイデア２

図の中の弦の数，交点の数を表にしてみる。
これは多くの中学生が思いついていた。

n	弦	交点	領域の最大数
1	0	0	1
2	1	0	2
3	3	0	4
4	6	1	8
5	１０	5	１６
6	１５	１５	３１
7	２１	３５	５７
8	２８	７０	９９

すると，

弦の数ｘ，交点の数ｙに対し，領域の数は
　ｘ＋ｙ＋１
となっていることがわかる。

　高校生なら
　ｘがｎ個の点から２個を選ぶ組み合わせ　$_nC_2$
　ｙがｎ個の点から４個を選ぶ組み合わせ　$_nC_4$

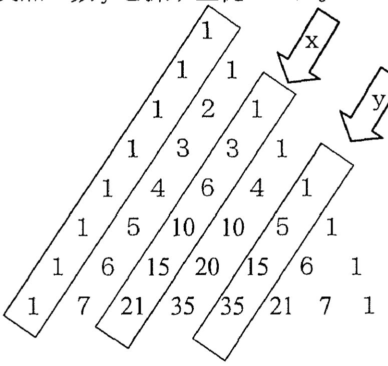
であるから，$_nC_2+{}_nC_4+1$　と表現できる。

　ｘ本の弦はｙ個の交点によりｘ＋ｙ本の線分に分けられ，それにより，領域はｘ＋ｙ＋１個となる。

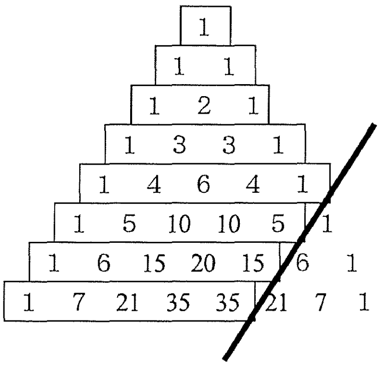
　算数で登場する「植木算」を思い出す生徒もいた。

アイデア３

パスカルの三角形の中に，上の表の数値である弦の数ｘ，交点の数ｙを探す生徒がいた。



パスカルの三角形の構成を考えれば，



端から５個目までの数の和となっていることがわかる。これを高校生なら

$${}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + {}_{n-1}C_3 + {}_{n-1}C_4$$

と表現できる。

アイデア４

人は増加数列をみて規則を探すとき，どう増えているのかをみる。それは階差数列という言葉は知らない中学生でも同じである。1 回でうまくいかなくても諦めずになんども差をとっている生徒がいた。

1　2　4　8　16　31　57
1　2　4　8　15　26
1　2　4　7　11
1　2　3　4

彼は３回（３階）の差をとって，「やっと自然数になった」と喜んで，次は下の段から右へ広げていき，他のアイデアによる解と一致したことを確かめてから，「でもなぜだろう？」と考えていた。

この数列の一般項の式はｎの４次式なので，３階階差数列が１次式になるわけであるが，その理論は中学生には無理があろう。

なお一般項は

$$\frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$$

となる。

何人かの生徒が差の差の差が自然数列であることから和の和の和をとって計算してレポートを提出してきた。また，パスカルの三角形から４次式になると考え，係数を未知数とした５元連立方程式を立てて決める，という方法で計算してきた生徒もいた。

d1－2.6.　おわりに

「ものを数える」という基本的な行為は，日常生活の中で役立つのみならず，古くは古代ギリシャ数学から現代科学まで広くに繋がっている。授業中にピタゴラスやガウスのような数学者の話も盛り込めるので，親しみやすい。また，マグネットや模型を利用できる場面があり，教具の工夫が楽しい教材である。『数列』『順列・組合せ』などとかしこまった単元になってΣやP, Cとともに高校数学に登場する頃には，いろいろな数え方を探すという楽しい「遊び」の要素が減ってしまいもったいないと感じてきた。実際に授業で取り組んでみると，中学生からは高校生にない柔軟な思考法が飛び出す場面も多かった。高校の範囲だからと言って先送りせず，設定が単純で奥が深い題材は中学生にもどんどん挑戦させてみたいと考えている。

【参考文献】

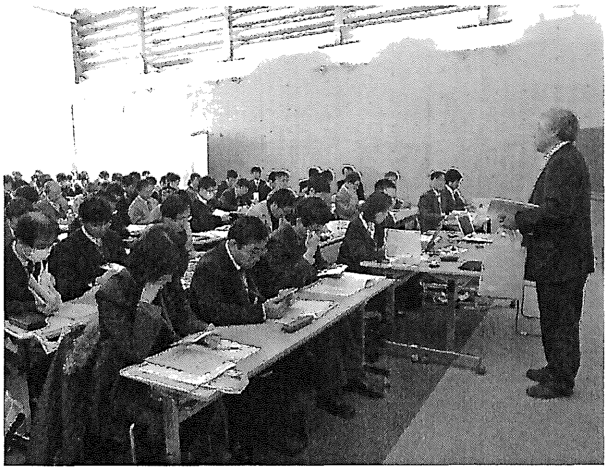
1.　中村義作『代数を図形で解く』講談社
2.　『代数学辞典（上・下)』聖文社

（2010 年　更科）

開発した教材・カリキュラムは教員研修会などで公開し，参加者から今後の研究の指針を得ている。本年度は以下の研修会を実施した。

（詳細は本校 SSH 報告書参照）

・SSH 交流枠支援教員研修　数学科教員研修会
（2010 年 12 月 5 日実施，会場　本校 50 周年会館，参加者　129 名）



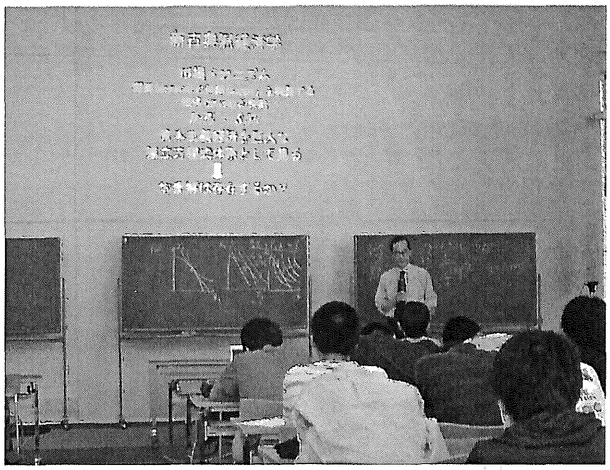
・SSH 数学科教員研修会　in 熊本
（2011 年 3 月 18 日実施，会場　熊本県八代中高校，参加者　40 名（予定））

2.2. 数学特別講座

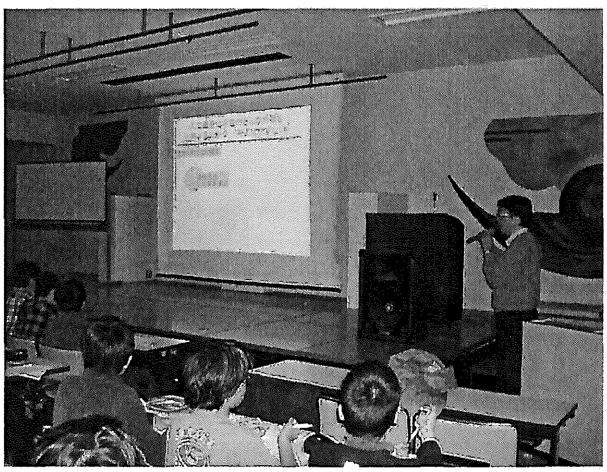
SSH 事業として，魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生や卒業生に実施していただいている。この講座の目的は，中学高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。なお，これらの内容も授業に取り込める教材として研究する必要があると考えている。

本年度は次の講座を実施した。
（詳細は本校 SSH 報告書，特別講座講義録参照）

・「数学を経済学からみつめてみよう」
講師　吉川洋東京大学大学院経済学研究科教授
実施日　2010 年 7 月 12 日
参加生徒　中 1 から高 3 までの希望者 39 名



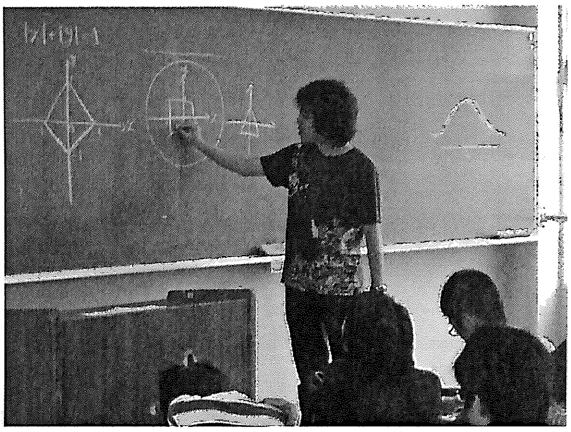
・「宇宙工学を支える数学」
講師　中須賀真一東京大学大学院工学研究科教授
実施日　2010 年 7 月 12 日
参加生徒　中 1 から高 3 までの希望者 63 名



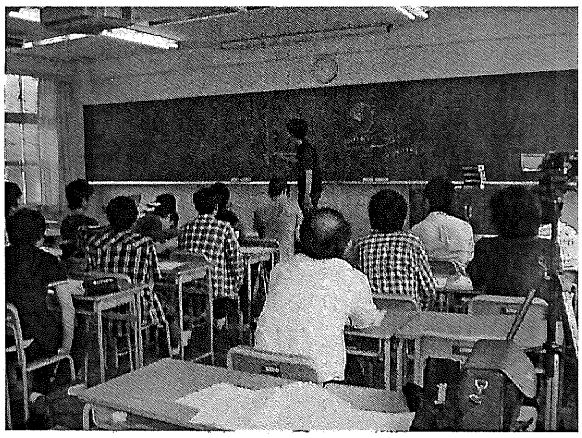
2.3. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校 2 年生の総合学習「ゼミナール」を，本校他学年の生徒や筑波大学大学院生も参加する形で実施している。これは筑波大学大学院数理物質科学研究科(DC)の講座「数学インターンシップ」（1 単位）と連動したものであり，高校 3 年生の総合学習（テーマ研究）につながる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに，本校テーマ研究発表会，SSH 生徒研究発表会などで発表している。

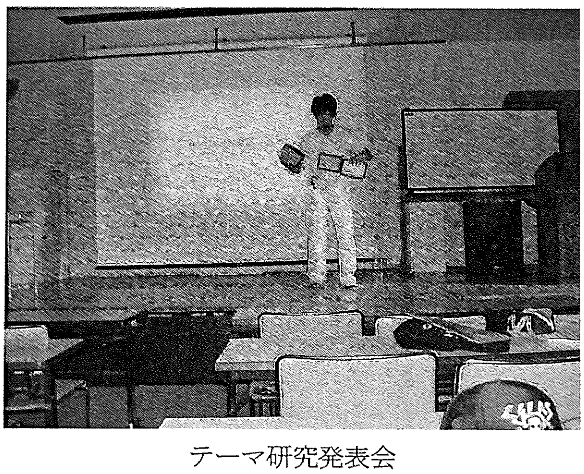
本年度ゼミナールへの大学院生の参加は４名で，高校３年生３名の発表，中学３年生も参加しての高２生徒のプレ発表，大学院生の講義などを行った。参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることが窺え，効果的な取り組みであると考えている。また，生徒は様々な研究発表会に参加し，発表しており，全国SSH生徒研究発表会優秀賞（ポスター発表），全国SSH数学系研究レポートコンテスト（明治学園主催）最優秀賞および優良賞などを受賞した。



ゼミでの高校３年生の発表



ゼミでの高２生徒の中間発表



テーマ研究発表会

全国SSH生徒研究発表会での発表

2.4. 生徒の数学的活動の支援

特別講座同様，生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック（JMO）・数学ジュニアオリンピック（JJMO）への参加を募っている。今回もJMOに94名，JJMOに205名（09年度はj59名、jj184名）が応募した。

また，数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行う部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。本年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに、研究レポート集を発行した。

2.5. 筑波大学リメディアル教育

筑波大学が2008年度から実施しているリメディアル教育は，高校の「数学」科目非履修学生を主な対象としたもので，本校数学科および筑波大学附属高校（文京区）数学科の教員が授業を担当している。

本年度も５月と６月の土曜日10時～15時に，大学の普通教室で，統計・微積分初歩・微積分発展の３講座を本校，ベクトル・行列の２講座を附属高校が担当して実施した。

大学への学びにつながる数学を目指す我々にとって，高大連携という意味でも有用な取り組みである。来年度は「統計」の内容について，自由科目として単位化されて実施することになっている。

3. おわりに

本校数学科では専任７名がそれぞれ同じ生徒をできるだけ継続して担当し，中高６年間さらに大学をも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標は『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる』ことである。入学直後の中学一年生の多くは，答えが求まればよい，速く答えを出す方が良いと考えている。そのような生徒に「なぜ？」「どうしてそうなるの？」と問いかけ，その説明に他の生徒が「なるほど，そんな風にも考えられるのか」「へー，うまい考え方だなー」と理解を深めていくことは大切なことである。たとえ「答え」は同じでも，そこに至る考えは多様にあり，それらを知り理解することは，様々な人の個性を認めることと同様，とても重要なことである。そして自分の考えを発表し，また色々な考え方を知ることは，その中に潜む仕組みを一層はっきりと認識させてくれる。

中・高一貫の良さは，生徒達が，ゆとりある学校生活を過ごしながら，自分を見つけ出し，何かに熱中し，自分の個性を伸ばすことにある。生徒は教科の勉強だけでなく，学校行事や校外学習，部活動，水田学習などいろいろなものを通して成長していく。数学においても，教科書の内容や授業の宿題だけでなく，自分で見つけた自分の課題を大切にして納得いくまで個人で研究したり，数学研究のクラブ活動で友人らと「こんな証明はどうなんだろう」などとわいわい議論して楽しんだり，数学オリンピック・情報オリンピックなどに積極的に挑戦したり，いうなれば“数学の特別活動”が大切であろう。以前数学オリンピックに出た生徒は「世界が広がった。多くの友人が出来た」と言っていた。人生が豊かになるために，成長していくために，数学は大きく貢献できるのである。

SSH 研究に連動した様々な取り組みを本冊子で報告した。これらは我々が日々議論し，教科会を重ねてまとめたものであるが，まだまだ研究中のものもあり，考察が不十分であるものもある。教師も生徒もわくわくする授業を毎日行えるよう今後も研究を継続していく。内容について，忌憚のない御意見をお寄せいただければ幸いである。

（数学科共同執筆、取り纏め文責　鈴木）