研究論文

小学校算数科における乗除法の問題場面を表す記号表現についての分析
―― G.Vergnaud の概念野理論を枠組みとして ――

渡　会　陽　平※

An Analysis of Symbolic Representations Expressing Situations of Multiplication and Division in Elementary School Mathematics

Yohei WATARAI

１．研究意図
１．１．研究目的

小学校算数科の第５学年では，乗数が小数になる問題場面において，乗法の意味を同数累加から「(基準量)×(割合)」へと拡張する必要があるが，児童が拡張された乗法の意味を理解することは困難であるため，「言葉の式」を用いて立式するという指導が伝統的に行われてきた。しかし，このような立式するための方法の指導だけで済まされてしまうと，演算そのものの意味が指導されていないため，問題場面に応じて判断するための根拠を失い，適切に立式することができなくなってしまうことが指摘されている（杉山，1986)。

この問題点に対して，これまでにも先行研究において小数の乗除法の意味指導についての指導改善が検討されてきた。例えば，田端（1989, 1990, 2007, 2008）は，乗除法の問題解決場面を比例的推論の力を伸ばす場と捉え直すことで乗除法の意味指導を改善できると主張し，１あたりの大きさが示されていない問題場面で比例関係を顕在化する指導を提案している。また，中村（1996, 2007）は，「(基準量)×(割合)」の意味を理解するために必要な「１とみる」見方の困難性は乗法の問題場面に起因するとして，まず整数で解決できる１あたりの大きさを示さない問題場面で乗法の意味を累加から割合へと拡張させてから，「×小数」と立

※筑波大学大学院人間総合科学研究科学校教育学専攻（数学教育学）

式する必要がある問題場面で乗法の意味を整数倍から小数倍へと拡張する指導を提案している。

このように，先行研究において様々な観点から指導改善について検討されてきたが，これらの指導を通して児童の持つ乗除法に関する概念がどのように変わるのかについては十分に検討されていない。児童が乗除法に関する概念を獲得し，発達させるためにより有効な指導内容の構成や，意味指導の設計を可能にするためには，児童の乗除法に関わる学習過程をたどり，学習段階ごとでの児童の持つ乗除法に関する概念を精緻に明らかにするとともに，先行研究で提案されている指導による乗除法に関する概念の変容を明らかにする必要がある。

そこで，筆者は，子どもの持つ数学的概念を問題場面の構造に基づいて捉えようとしたフランスの数学教育学者 G. Vergnaud が提唱する概念野理論を枠組みとして理論的考察を進めてきた。なぜなら，算数科において児童は具体的な問題場面と関係づけて数学的概念を獲得し，発達させていくという事実と照らし合わせて，問題場面の構造に基づいて子どもの思考を捉えるという Vergnaud の主張は妥当であると考えるからであり，数学的な構造と子どもの学習の双方を視野に入れた概念野理論を枠組みとして子どもの思考を捉えることで，子どもの持つ数学的概念とその変容を明らかにできると考えるからである。

概念野理論において数学的概念は，①概念を意味づける問題場面の集合，②問題場面を扱うための不変項（数学的な性質や関係）の集合，③不変項や問題場面・手続きを表す記号表現の集合の三つ組で捉えられる。そして，概念野理論では，子どもが問題を解決するために用いた手続きを，その問題場面に内在する構造と用いられた不変項の観点から数学的に記述することで子どもの思考を捉え，子どもがより複雑な問題場面に対して不変項を適用できるようにするための道具として記号表現を位置づける（Vergnaud，1988）。

筆者はこれまでに，概念野理論を枠組みとして，現行の算数科のカリキュラムに沿って学習した場合には，乗数が小数の乗法を学習する際に複合的な困難性があることを明らかにし，その解消のために整数の乗除法で解決できる問題場面で予め「“2つの大きさの倍関係”と“比例関係”を認識し，それを用いる考え方」である乗法的な見方を習得することを提案した（渡会，2009）。さらに，児童が整数の乗除法の意味に基づいて問題を解決していく場合には，整数の乗除法で解決できる1あたりの大きさを示した問題場面及び1あたりの大きさを示さない問

題場面のいずれを指導で扱ったとしても，乗法的な見方が必然的になされるわけではないことを指摘した（渡会，2010）。しかし，上記の分析結果は，問題場面の構造と，そこで用いられる不変項から導かれた帰結であり，記号表現は考慮されていない。不変項という概念的なものだけでは乗法的な見方を用いることは困難であるが，記号表現という視覚的な媒体の助けによって，乗法的な見方を用いることができる可能性がある。従って，児童の問題解決過程において乗法的な見方を生じさせるために，乗除法の問題場面において用いられる記号表現がどれだけ有効であるのかを明らかにする必要がある。

以上の問題意識から，本稿は，乗法的な見方の生じる可能性の観点から，小学校算数科における乗除法の問題場面を表す記号表現の有効性を評価することを目的とする。

1．2．研究方法

1．1．で述べた目的を達成するために，本稿では，概念野理論を枠組みとして，記号表現を用いて乗除法の各問題場面を表すとともに，整数の乗除法は既習で，小数の乗除法は未習の児童に，その表現された問題場面が提示された場合に想定される記号表現に基づいた解決の手続きを示す。そして，その手続きにおいて立式の根拠となっているTIAを記述する。

上記の分析方法により，児童が乗除法の意味に基づいて問題を解決する場合には用いる必然性のなかった乗法的な性質が，記号表現を媒介することによって用いられる可能性があるのかを明らかにできる。また，記号表現を媒介として児童が乗法的な性質を用いて問題を解決できるならば，概念野理論の記号表現の有効性の観点からみて，問題場面の構造から乗法的な性質を導き出して解決できるようにするために有効な記号表現と言える。

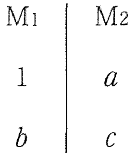
2．分析の枠組み

2．1．G.Vergnaud の概念野理論の枠組み

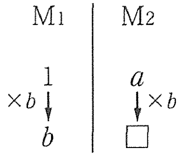
(1) 問題場面の構造

概念野理論において，乗法・除法の問題場面は，「解決に乗法・除法が関わる問題場面全体の集合」と定義される乗法的構造に属し，小学校算数科で扱われる乗法・除法の問題場面は，正比例の関係にある2つの測度空間 M_1，M_2 で構成される「単比例」の構造を持つ（図2．1）。図2．1において，1と b は M_1 に属す測

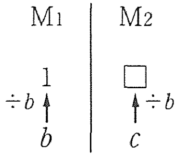
定値であり，a と c は M_2 に属す測定値である。



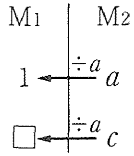
【図２．１】



【図２．２】



【図２．３】



【図２．４】

c が未知数の場合には乗法の構造を表す（図２．２）。「$\times b$」は M_1 において１を b に対応させるスカラー演算子であり，この「$\times b$」を M_2 の a に適用することで $a \times b$ となる。

a が未知数の場合には等分除の構造を表す（図２．３）。「$\div b$」は M_1 において b を１に対応させるスカラー演算子であり，この「$\div b$」を M_2 の c に適用することで $c \div b$ となる。

b が未知数の場合には包含除の構造を表す（図２．４）。「$\div a$」は上行において a を１に対応させる関数演算子であり，この「$\div a$」を下行の c に適用することで $c \div a$ となる。

乗法及び等分除のスカラー演算子「$\times b$」及び「$\div b$」の b はスカラー比（M_1 における b の１に対する割合）であり，包含除の関数演算子「$\div a$」の a は関数比（正比例 $f : M_1 \rightarrow M_2$，$f(x) = a\,x$ の比例定数）である。

Vergnaud は，乗法・除法の問題場面における子どもの思考の分析を，上記のような乗法的構造に基づいてのみ行っている（Vergnaud，1988）。しかし，小学校算数科において児童が最初に学習する乗除法の意味は，例えば乗法が同数累加で意味づけられるように，比例関係に基づいた乗法的な状況ではなく，加法的な状況と結びつけられている。そこで，本研究では，乗法的構造に基づいた乗除法の意味の解釈だけではなく，「解決に加法・減法が関わる問題場面全体の集合」と定義される加法的構造に基づいた乗除法の意味の解釈も行う。

加法的構造において，乗除法の問題場面に関わるのは「測定値の合成」の構造である。「測定値の合成」の構造は，部分の測定値を全て合成すると全体の測定値になる問題場面に内在する構造である（例えば，図２．５）。図２．５において，□は測定値を表し，記号 ｝ は同じ性質

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{b}\\ \boxed{c}\end{array}\right\}\boxed{s}$$

【図２．５】

を持つ要素の合成を表す。つまり，部分の測定値$\boxed{a}$，$\boxed{b}$，$\boxed{c}$を合成すると全体の測定値$\boxed{s}$になる状況（$a+b+c=s$）を表している。そして，この構造において，部分の測定値が全て等しい場合には，例えば図２．５において$a=b=c$ならば，$a+a+a=s$という同数累加の状況になる。

（２）theorem-in-action の定義

概念野理論には，子どもの思考を捉えるための不変項として，「児童が問題を解決するために“操作”または“操作の順序”を選ぶときに，児童によって考慮される数学的な関係」と定義される theorem-in-action（以下，TIA と略記する）の概念がある（Vergnaud, 1988）。TIA は，子どもが活動するときに行動を決定するための根拠として働いている数学的な関係であるが，児童は必ずしも TIA を意識して行動を決定しているわけではない。大抵は TIA が暗黙的に働いて児童の行動は決定される。

例えば，小学校第２学年で乗法を学習したばかりの児童が，「１個80円のリンゴを３個買ったときの代金を求めましょう。」という問題において，「80円の３つ分だから，80×３」と立式した場合には，児童は同数累加の状況に対して乗法を用いる学習をしているから，「$\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ について，$a+\cdots+a$（n個）$=a\times n$」と表される TIA が働いたと見なせる。

theorem-in-action を直訳すれば，「（問題を解決する際に）働いている定理」であるが，数学における定理は「証明された性質」である。一方，子どもの思考の中でTIA として働くのは，児童によって証明された数学的な性質ではなく，それにつながる萌芽のような数学的な性質である。また，TIA は定義によれば「数学的な関係」であるが，上記のように数学における「関係」とは別の意味で用いている。そこで，本研究では，数学で用いる用語との混同を避けるとともに，本研究における TIA の意味をより明確にするために，TIA を「子どもが問題を解決するために“操作”または“操作の順序”を選ぶときに，意識的に，もしくは暗黙的にでも，子どもの思考の中で働いている数学的な性質」と定義して用いる。

（３）記号表現の有効性

概念野理論において，記号表現は，子どもがより複雑な問題場面に対して不変項（TIA）を適用できるようにするために，問題場面やそこで用いられる不変項（TIA）を具現化するための道具として位置づけられる。その前提として，Vergnaud は，数学教育における記号表現の有効性を評価するために次の２つの

基準を提案している（Vergnaud, 1982）。

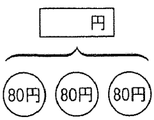
> 基準１：記号表現は，子どもが記号表現を用いなかったら解決することができない問題を解決することを助けるべきである。
> 基準２：記号表現は，子どもが様々な問題場面の構造を見分けることを助けるべきである。

上記の基準はそれぞれ独立したものではない。困難な問題を数学的な根拠に基づいて解決するためには，問題場面を記号表現を用いて表すことで問題場面の構造を見分け，その構造から問題場面に内在する不変項を導出することが解決の手掛かりとなる。従って，概念野理論における記号表現の有効性の基準からみると，小数の乗除法の指導において伝統的に用いられてきた「言葉の式」は，数値を代入して解答を求めることはできるが，問題場面や不変項を表現することはできていないため，算数教育において有効な記号表現とは言えないと結論づけられる。

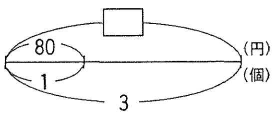
２．２．概念野理論を枠組みとした記号表現についての分析の方法

２．２．１．分析対象とする記号表現

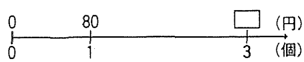
記号表現には，数字，演算記号，数式といった言語的なものだけではなく，図やグラフといった非言語的なものがある。その中から，問題場面の状況や数量の関係を視覚的に捉えやすい記号表現として，本稿では図に焦点をあてる。さらに，小学校算数科で扱われる図には，面積図やベン図，樹形図など様々あるが，乗法的な見方の生じる可能性について議論するために，本稿では，離散図，線分図，数直線図の３種を分析対象とする。



【図２．６】



【図２．７】



【図２．８】

（ａ）離散図

図２．６のような○を並べた図及びそれに類似する図の総称を本稿では離散図と定義する。例えば，第２学年で指導される乗法の意味が「一つ分の大きさが決まっているときに，その幾つ分かに当たる大きさを求める演算」であるように，児童はまず「一つ分の大きさ」を要素とした乗除法の意味を学習する。従って，「一つ

分の大きさ」を１つのまとまりを表す記号を用いて問題場面を表すことで，児童が問題場面と乗除法を関連付けやすいと考えられるから，離散図を分析対象とした。

（ｂ）線分図

線分図は，問題の中の数量を長さで表し，未知の数量も含めて，数量と数量の関係を視覚を通して捉えやすくした図である（図２．７）。数量の大きさを線分の長さで表わす図は他にもテープ図（帯図）があるが，数量の大きさを線分の長さで表わす図の代表として本稿では線分図を扱う。線分図は離散図をより抽象化した図とみることができ，その抽象性によって離散図とは異なった見方が必要になると考えられるから，線分図を分析対象とした。

（ｃ）数直線図

数直線図は，一定の長さを単位として測った数を直線上に目盛ったものである（図２．８）。乗除法の意味指導において数直線図を用いる場合には，数量の大きさを直線上の位置で表わす。数直線図は乗法構造を構成する測度空間のモデルとみなすことができる。よって，数直線図上で（もしくは２本の数直線図の並列で）２種の量の大きさを表すことで，単比例の構造図に類似した表現をすることができるから，数直線図を分析対象とした。

２．２．２．分析において記号表現を用いる乗法的構造の問題場面

筆者はこれまでに，児童が小数の乗法を学習する際の複合的な困難性を解消するために，整数の乗除法で解決できる問題場面における乗法的な見方の習得について議論してきた（渡会，2010）。そこで，本稿も整数の乗除法で解決できる問題場面に焦点を当てて問題場面を表す記号表現について分析する。

分析において記号表現を用いる問題場面は，乗法的構造の単比例の構造の分類に基づき，(1) 乗法の問題場面，(2) 等分除の問題場面，(3) 包含除の問題場面，rule-of-three 問題の問題場面（１あたりの大きさが示されていない問題場面）の４種である。

また，rule-of-three 問題は，問題場面の数値の関係によって用いることができる手続きが変わる。そこで，整数の乗除法で解決できる rule-of-three 問題を，２つの数値の比と商の観点から分類したものが表２．１である。渡会（2010）では，表２．１の分類により，rule-of-three 問題は，(4) 既知数のスカラー比が整数の場合，(5) 既知数の関数比が整数の場合，(6) 既知数のスカラー比・関数比がともに整数ではない場合によって用いられうる解決の手続きが異なることを示した。

そこで，本稿では，上記の3通りの場合について rule-of-three 問題における分析をする。

さらに，それぞれの問題場面において，スカラー比・関数比の数値が1桁の数の場合と2桁の数の場合の両方について検討する。なぜなら，スカラー比・関数比の数値が1桁の数の場合とそうでない場合では，記号表現からスカラー比や関数比を求めるための思考が変わると予想されるからである。

表2．1：rule-of-three 問題の分類

$a,b,c,d,m,n\in\mathbb{N}$、$a\neq 1$、$a<c$ であり、b か d のどちらか一方が未知数である。

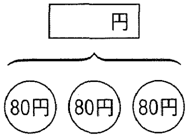
<table>
<tr><td rowspan="2">M_1　M_2
a　b
c　d</td><td colspan="2">$a<b$</td><td colspan="2">$a>b$</td></tr>
<tr><td>$a:b=1:n$
$b\div a\in\mathbb{N}$</td><td>$a:b\neq 1:n$
$b\div a\notin\mathbb{N}$</td><td>$a:b=n:1$
$b\div a\notin\mathbb{N}$</td><td>$a:b\neq n:1$
$b\div a\notin\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>$a:c=1:m$
$c\div a\in\mathbb{N}$</td><td>M_1　M_2
2　$\boxed{4}$
6　$\boxed{12}$</td><td>M_1　M_2
3　$\boxed{5}$
9　$\boxed{15}$</td><td>M_1　M_2
6　$\boxed{2}$
18　$\boxed{6}$</td><td>M_1　M_2
3　$\boxed{2}$
9　$\boxed{6}$</td></tr>
<tr><td>$a:c\neq 1:m$
$c\div a\notin\mathbb{N}$</td><td>M_1　M_2
3　$\boxed{6}$
4　$\boxed{8}$</td><td>M_1　M_2
9　$\boxed{15}$
12　$\boxed{20}$</td><td>M_1　M_2
9　$\boxed{3}$
12　$\boxed{4}$</td><td>M_1　M_2
9　$\boxed{6}$
12　$\boxed{8}$</td></tr>
</table>

3．乗除法の問題場面を表す記号表現についての分析

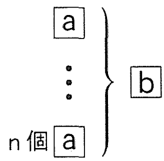
3．1．離散図についての分析

（1）乗法の問題場面

例えば，「1個80円のリンゴを3個買ったときの代金を求めましょう。」という乗法の問題場面の離散図は図3．1のように表せる。この図から，児童は，「80円が3つあるから，80×3」と立式することができる。この場合，児童は，「1つ分の大きさが決まっているときに，そのいくつ分かに当たる大きさを求める演算」という乗法の意味に基づいて立式したと見なせるから，立式の根拠として働いているのは次の TIA. 1 である。TIA. 1 は図3．2で表わされる加法的構造の性質であり，乗法的な性質ではない。



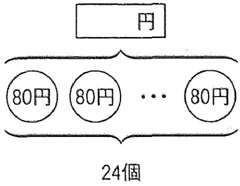
【図3．1】



【図3．2】

TIA. 1：同数累加の乗法
$\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ について，$a + \cdots + a$（n 個）$= a \times n$

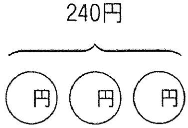
また，乗数の数値が大きくなった場合，例えば，24個の代金を求める問題になって，図３．３のように個数を省略する記号を用いたとしても，「同じ大きさがいくつあるのかを表した図」という点で本質的な違いはないから，立式の根拠として働くのは TIA. 1 である。



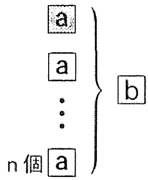
【図３．３】

（２）等分除の問題場面

例えば，「同じ値段のリンゴを３個買ったら代金が240円でした。リンゴ１個の値段はいくらでしょう。」という等分除の問題場面の離散図は図３．４のように表せる。この図から児童は，「同じ値段のものが３つで240円だから，240円を３つに分けた１つ分の大きさを求めればいい。よって，240÷３」と立式することができる。この場合，児童は，「ある数量を等分したときにできる１つ分の大きさを求める演算」という等分除の意味に基づいて立式したと見なせるから，立式の根拠として働いているのは次の TIA.2 である。TIA.2 は図３．５で表わされる加法的構造の性質であり，乗法的な性質ではない。



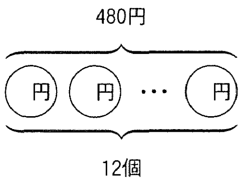
【図３．４】



【図３．５】

TIA. 2：n 等分した１つ分の大きさを求める等分除
$\forall n \in \mathbb{N}$ について，$b \times (1/n) = b \div n$

また，除数の数値が大きくなった場合，例えば，同じ値段のリンゴを12個買ったら代金が480円だったときに，リンゴ１個の値段を求める問題を図３．６のように表したとしても，乗法の問題の場合と同様に，「同じ大きさがいくつあるのかを表した図」という点で本質的な違いはないから，立式のために働くのは TIA. 2 である。

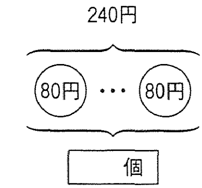


【図３．６】

（３）包含除の問題場面

例えば，「１個80円のリンゴをいくつか買ったら代金が240円でした。買ったリ

ンゴの個数を求めましょう。」という包含除の問題場面の離散図は図３．７のように表せる。この図から，児童は，「80円がいくつかで240円だから，240円の中に80円がいくつあるのかを求めればよい。よって，240÷80」と立式することができる。この場合，児童は，「ある数量がもう一方の数量のいくつ分であるかを求める演算」という包含除の意味に基づいて立式したと見なせるから，立式の根拠として働いているのは次のTIA.３である。TIA.３は図３．８で表わされる２つの加法的構造を結ぶ写像であり，乗法的な性質ではない。

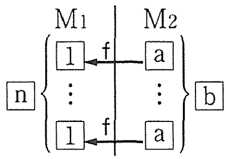


【図３．７】

TIA.３：「いくつ分」を求める包含除 f:$M_2 \to M_1$，$f(x)=x \div a$，$b=a+\cdots+a$について，$f(b)=b \div a$

前述の乗法及び等分除の離散図は，それぞれの問題場面だけでなく，TIA.1 やTIA.2 を表していると見ることできる。それに対して，包含除の離散図では，TIA.3 の持つ「１つ分の大きさ（a）を１に対応させる」という関数的な操作は表されていない。

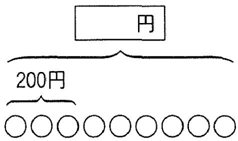
また，除数が大きくなった場合でも，図３．７と同様に表すことができるから，TIA.3 が立式の根拠として働く。



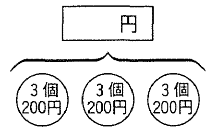
【図３．８】

（４）既知数のスカラー比が整数の問題場面

既知数のスカラー比が整数の問題場面は，表２．１で示した乗法構造図において，bが未知数の場合とdが未知数の場合で解決の手続きが変わる。例えば，「リンゴが３個で200円で売っている。このリンゴを９個買ったときの代金はいくらでしょう。」という既知数のスカラー比が整数で，dが未知数の場合の問題場面の離散図は図３．９のように表せる。この図から，児童は，「３個で200円だから，３個をそれぞれ１つのまとまりにする」という操作によって，図３．９を容易に図３．10のように表すことができる。これにより，乗法の問題場面に帰着される。

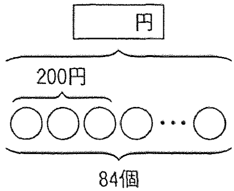


【図３．９】

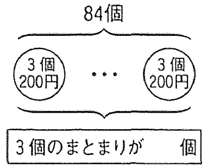


【図３．10】

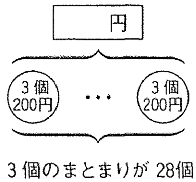
一方で，「このリンゴを84個買ったときの代金はいくらか（図３.11）」を問われた場合には，リンゴ３個のまとまりをいくつ作ることができるかを容易に判断することは難しい。そこで，図３.11のような問題場面から離れ，図３.12のような「84個の中に３個のまとまりはいくつあるか」を求める包含除の問題場面を想起する必要がある。そして，包含除によってリンゴ３個のまとまりがいくつあるのかを求められたら，最初の問題場面を図３.13のように表すことができ，乗法の問題場面に帰着される。



【図３.11】

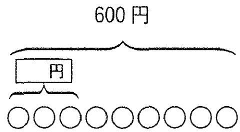


【図３.12】



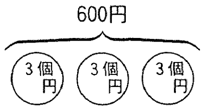
【図３.13】

また，「リンゴを９個買ったら600円だった。同じリンゴを３個買ったときの代金はいくらでしょう。」という既知数のスカラー比が整数で，b が未知数の場合の問題場面の離散図は図３.14のように表せる。d が未知数の場合と同様に，「３個をそれぞれ１つのまとまりにする」という操作によって，図３.14を容易に図３.15のように表すことができ，等分除の問題場面に帰着される。



【図３.14】

一方で，「リンゴを84個買ったら5600円だったときに，同じリンゴを３個買ったら代金はいくらか」を問われた場合には，リンゴ３個のまとまりをいくつ作ることができるかを容易に判断することは難しいため，d が未知数の場合と同様に包含除の問題場面を想起する必要がある。そして，包含除によりリンゴ３個のまとまりがいくつあるのかが求められたら，等分除の問題場面に帰着される。

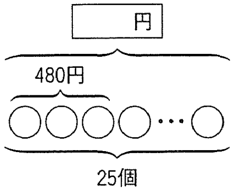


【図３.15】

（５）既知数の関数比が整数の問題場面

例えば，「同じ値段のリンゴを３個買ったら代金が480円だった。同じリンゴを25個買ったときの代金はいくらでしょう。」という既知数の関数比が整数の問題場面の離散図は図３.16のように表せる。この図において，○が３つで480円の部分に着目すると，その部分は等分除の問題場面であり，○１つ分の大きさを求めること

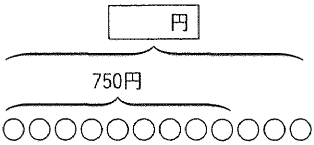
ができる。○1つ分の大きさを求めることができれば，乗法の問題場面に帰着される。上記の問題は乗法構造図において d が未知数の場合であるが，b が未知数の場合も同様の手続きで解決できる。



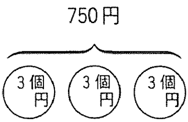
【図3.16】

（6）既知数のスカラー比と関数比がともに整数ではない問題場面

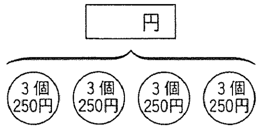
例えば，「同じ値段のリンゴを9個買ったら代金が750円だった。同じリンゴを12個買ったときの代金はいくらでしょう。」という既知数のスカラー比と関数比がともに整数ではない問題場面の離散図は図3.17のように表せる。この図において，9個で750円の部分に着目し，○3個を1つのまとまりと見れば，9個で750円の部分は図3.18のように等分除の問題場面に帰着することができる。そして，等分除によって3個分の代金を求められたら，図3.17は図3.19のように乗法の問題場面に帰着することができる。



【図3.17】



【図3.18】

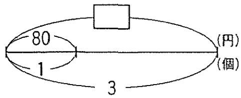


【図3.19】

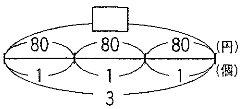
3．2．線分図についての分析

（1）乗法の問題場面

3．1．(1) の乗法の問題場面の線分図は図3.20または図3.21のように表せる。図3.21のように1単位の大きさで区切った線分図は，加法的構造の測定値の合成を視覚的に表しており，この図を加法的構造として捉えた場合には，離散図と同様の思考で解決することができる。これは乗法の問題場面に限らず，他の問題場面についても言える。そこで，本稿での線分図の分析は，線分図を加法的構造と捉えない場合を想定する。



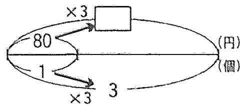
【図3.20】



【図3.21】

加法・減法の問題における線分図を用いた指導により，子どもは部分と全体を差で比較することを学習している。この問題を加法的構造として捉えず，乗法的

構造として捉える場合には，部分と全体を「倍」で比較する必要がある。つまり，個数の１と３に着目し，１と３の倍関係「$1 \xrightarrow{\times 3} 3$」を求める。そして，個数と代金の比例関係に基づいて，「×３」を代金の80に適用することで80×３と立式できる。この手続きは，図３.22のように線分図に矢印を書き加えることで表すことができる。



【図３.22】

上記の手続きは，同数累加の状況を参照して乗法が用いられているのではなく，線分図における数値の関係（同じ測度空間内の２つの大きさの倍関係と２つの測度空間の比例関係）に基づいて乗法が用いられているから，立式の根拠として次のTIA. 4 が働いたと見なせる。TIA. 4 は図３.23のように乗法的構造における乗法的な性質である。

> TIA. 4：乗法に関する同型性
> $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ について，$f(1 \times n) = f(1) \times n$

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & f(1) \\ \times n \downarrow & \downarrow \times n \\ n & f(n) \end{array}$$

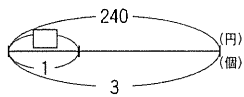
【図３.23】

また，乗数が大きくなった場合も，図は３.20のように表せる。

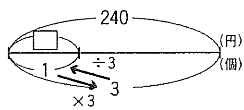
乗数の数値が大きい場合には，離散図では全て書き表す場合には手間がかかり，省略して書き表す場合には省略の記号「…」を用いた。それに対して線分図は，数値の大小に関わらず同じ形式で書き表すことができる。また，線分図を乗法的構造として捉えた場合の解決の手続きは，数値の関係に着目するため，数値の大小に関わらず同じ手続きを用いることができる。これは乗法の問題に限らず，他の問題についても言える。よって，以降の分析では数値の大きい場合の分析は省略する。

（２）等分除の問題場面

３.１.(2) の等分除の問題場面の線分図は図３.24のように表せる。乗法の問題の場合と同様に，まず倍関係を求める。さらに乗法と除法の逆演算の性質「$a \xrightarrow{\times n} b \Rightarrow b \xrightarrow{\div n} a$」を用いることにより，図３.25のように表すことができる。そして，比例関係に基づき，「÷３」を代金の240に適用することで240÷３と立式できる（図３.26)。

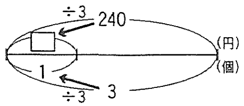


【図３.24】

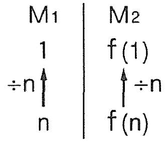


【図３.25】

上記の240÷３の立式は，３等分するという状況を参照して等分除が用いられているのではなく，線分図における数値の関係（同じ測度空間内の２つの大きさの倍関係の逆と２つの測度空間の比例関係）に基づいて除法が用いられている。従って，この場合の除法の立式の根拠として，次の TIA. 5 が働いたと見なせる。TIA.5 は図３.27のように乗法的構造における乗法的な性質である。



【図３.26】

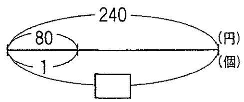


【図３.27】

TIA. 5：乗法（除法）に関する同型性
$\forall n \in \mathbb{N}$ について，$f(n \div n) = f(n) \div n$

（３）包含除の問題場面

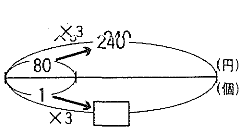
３.１.(3) の包含除の問題場面の線分図は図３.28のように表せる。包含除の問題の場合も乗法・等分除の問題と同様に同じ測度空間内の２つの大きさの倍関係に着目する必要があるが，乗法・等分除の問題の場合は記号表現から倍関係を表すスカラー比を容易に読みとれたのに対して，包含除の問題の場合は容易に読みとることができない。そこで，代金の測度空間における80と240の倍関係を求めるために，包含除240÷80を立式する。既習の整数倍の意味は「いくつ分の大きさ」であるから，何倍を求める場合には「240の中に80がいくつあるのかを求める」という包含除の意味を用いる。よって，何倍かを求める包含除の立式の根拠となる TIA. 3′は，TIA. 3 と同じ性質である。



【図３.28】

TIA. 3′：何倍かを求める包含除の TIA ＝ TIA. 3

さらに，包含除によって求められた「×３」を，個数の１に適用することで１×３と立式できる（図３.29)。この乗法は，比例関係に基づいて立式されているから，立式の根拠として TIA. 4 が働いている。



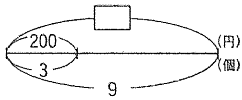
【図３.29】

乗法的構造の枠組みにおいて，包含除は関数演算子を用いる演算である。つまり，図３.28ならば，代金の測度空間における80を個数の測度空間における１に対応させる関数演算子「÷80」を，代金の測度空間における240に適用すること

で240÷80となる。しかし，上記の手続きで用いた包含除は，代金の測度空間における80と240の倍関係に着目して包含除が用いられており，記号表現における80と１の対応が考慮されているわけではない。

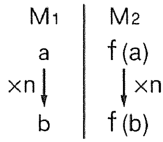
（４）既知数のスカラー比が整数の問題場面

３．１.(4) の未知数が d の問題場面の線分図は図３．30のように表せる。この図において，個数の測度空間内の２つの大きさの倍関係に着目すれば，TIA. 3′ によって包含除を立式してスカラー比「３」を求めることができる。そして，個数と代金の比例関係に基づいて，「×３」を代金の200に適用することで200×３と立式できる。この乗法の立式は，線分図における数値の関係（同じ測度空間内の２つの大きさの倍関係と２つの測度空間の比例関係）に基づいて乗法が用いられているから，立式の根拠として次の TIA. 4′ が働いたと見なせる（図３.31)。



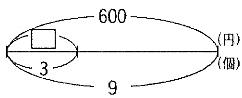
【図３.30】

TIA. 4′：乗法に関する同型性
$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ について，$f(a \times n) = f(a) \times n$

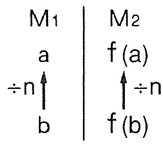


【図３.31】

また，３．１.(4) の未知数が b の問題場面の線分図は図３.32のように表せる。d が未知数の場合と同様に，個数の測度空間内の２つの大きさの倍関係に着目すれば，TIA. 3′ によって包含除を立式してスカラー比「３」を求めることができる。そして，乗法と除法の逆演算の性質「$a \xrightarrow{\times n} b \Rightarrow b \xrightarrow{\div n} a$」により，スカラー演算子を反転させ，個数と代金の比例関係に基づいて，「÷３」を代金の600に適用することで600÷３と立式できる。この除法の立式は，線分図における数値の関係（同じ測度空間内の２つの大きさの倍関係の逆と２つの測度空間の比例関係）に基づいて除法が用いられているから，立式の根拠として次の TIA. 5′ が働いたと見なせる（図３.33)。



【図３.32】

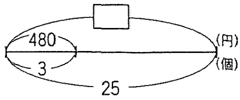


【図３.33】

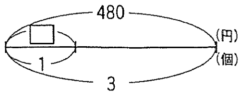
TIA. 5′：乗法（除法）に関する同型性
$\forall n \in \mathbb{N}$ について，$f(b \div n) = f(b) \div n$

（5）既知数の関数比が整数の問題場面

3．1．(5) の問題場面の線分図は図3．34のように表せる。この問題場面は，既知数の倍関係に着目しても整数値でスカラー比を求められないが，3個で480円の部分に着目すれば，等分除の問題場面を想起することができる（図3．35)。そして，等分除によって1個分の代金が求められれば，乗法の問題場面に帰着される。乗法構造図において b が未知数の場合も同様の手続きで解決できる。



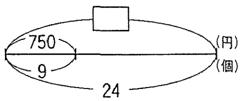
【図3．34】



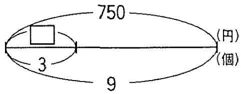
【図3．35】

（6）既知数のスカラー比と関数比がともに整数ではない問題場面

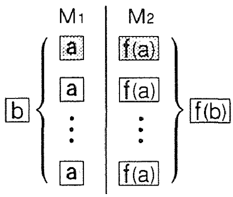
3．1．(6) の問題場面の線分図は図3．36のように表せる。この問題場面は，既知数の倍関係に着目しても整数値でスカラー比を求められない。また，9個で750円の部分に着目しても，既知数の関数比が整数の場合のように，等分除の問題場面に帰着できない。そこで，9個で750円の部分に着目して，等分割を試みる。9個を2等分すると4.5個となってしまうが，3等分すれば3個になる。よって，図3．37の問題場面を想起できる。このとき，図3．37の問題場面の想起には,「個数を n 等分すれば，代金も n 等分される」という比例関係に基づいた性質が使われている。しかし,「n 等分する」という操作は加法的構造における操作であるから，問題場面の想起の根拠となっているのは次の TIA. 6 である（図3．38)。TIA. 6 は比例関係に基づいた加法的な性質であり，乗法的な性質ではない。



【図3．36】



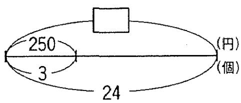
【図3．37】



【図3．38】

> TIA. 6：n 等分に関する同型性
> $$f(b\times(1/n))=f(b)\times(1/n)$$

図3．37は既知数のスカラー比が整数で，b が未知数の問題場面である。この問題場面において，3個分の代金を求められれば，図3．39の既知数のスカラー



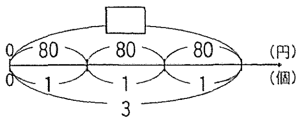
【図3．39】

比が整数で，d が未知数の問題場面に帰着できる。

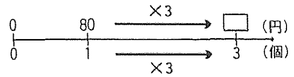
3．3．数直線図についての分析

3．1．(1) の乗法の問題場面の数直線図は図3．40のように表せる。図3．40を図3．41のように1単位の大きさで区切って解釈した場合には，線分図と同様に離散図に帰着される。

【図3．40】



【図3．41】



【図3．42】

図3．41のように加法的構造として解釈しない場合には，線分図の場合と同様に，同一測度空間内における2つの大きさの倍関係に着目し，それをもう一方の測度空間に適用することで解決することができる（図3．42)。

しかし，この数直線図における数値の関係に着目した手続きは，線分図の場合と全く同じわけではなく，倍関係に着目するための思考が線分図の場合とは異なっている。つまり，線分図の場合は部分と全体の関係に着目することで2つの大きさの倍関係を比較したが，数直線図ではそれぞれの大きさは点で表わされており，2つの大きさに部分と全体の関係はない。そのため，数直線図で倍関係を見るためには，線分図に帰着するか，純粋に数の関係として1と3の間に「$1 \xrightarrow{\times 3} 3$」という関係があることを見つけ出す必要がある。

数値の関係への着目以降の手続きは，線分図を乗法的構造としてみた場合と同様の思考で解決できる。これは，他の問題場面についても言える。よって，以降の分析は省略する。

4．分析結果についての考察

4．1．記号表現に基づいた解決の手続きにおいて働く theorem-in-action

3．1．において示したように，離散図に基づいた解決を想定した場合には，整数の乗除法で解決できる単比例のどんな問題場面であったとしても，既習の乗除法の意味がTIAとして働くことで乗除法の立式をすることができた。概念野理論を枠組みとすると，算数科の第2・3学年で指導される乗除法の意味は乗法的構造ではなく加法的構造によって適切に説明されることから，児童が離散図に基づ

いて解決する場合には児童の思考は加法的な見方の使用に止まり，乗法的な見方は用いられない。このことは，線分図，数直線図を加法的に解釈した場合についても同様に言える。

一方で，３．２．で示したように，線分図に基づいた解決を想定した場合には，線分図を加法的構造として解釈することから離れて，２つの大きさの部分と全体の関係を「倍」で比較することに着目することで，整数の乗除法で解決できる単比例のどんな問題場面であったとしても，乗法的構造において説明される性質がTIA として働いて，乗除法の立式をすることができた。この見方は，数直線図にも適用できる。

このように，問題場面の数学的な構造を前提とすると，離散図に基づいて解決する場合には乗法的な性質が用いられないが，線分図・数直線図に基づき，２つの大きさの部分と全体の関係を「倍」で比較することに着目した場合には乗法的な性質を必然的に用いることができた。離散図についても乗法的な見方をすることは可能であるが，「記号表現は，問題場面の中にある必要のない特徴を無視させ，関わる要素と関係に集中させる（Vergnaud, 1988)」という観点からみると，離散図は問題場面の視覚的状況を端的に表しているため，問題場面の加法的な側面が優先して捉えられてしまうと考える。それに対して，線分図・数直線図は，問題場面の数量の対応関係を端的に表しているため，２つの大きさの関係に着目することを通して，問題場面に伴う乗法的な性質を暗黙的にでも認識し，解決のために用いることができると考える。

４．２．乗法的な見方の生じる可能性に関する記号表現の有効性

既習の乗除法の意味に基づく問題の解決を想定した場合には，整数の乗除法で解決できるどんな問題場面であっても乗法的な見方を用いる必然性はなかった(渡会，2010)。従って，乗法的な見方をする必然性のない問題解決場面では児童が自発的に乗法的な見方を用いることは困難であるし，例え乗法的な見方を指導したとしても，児童は加法的な見方で解決できてしまうため，乗法的な見方の必要性を実感することができない。同様に，離散図に基づいて解決する場合も，既習の乗除法の意味がTIA として働くことで問題を解決できてしまうため，児童が乗法的な見方を用いる必然性はなく，乗法的な見方の必要性を実感することができない。

それに対して，線分図・数直線図に基づき，２つの大きさの部分と全体の関係

を「倍」で比較することに着目した場合には，整数の乗除法で解決できるどんな問題場面であっても，図を媒介として乗法的な性質を認識し，暗黙的にでも必然的にその性質を用いることができる。従って，乗除法の立式の根拠となる「一方が何倍になれば，もう一方も何倍になる」という比例の性質を顕在化する指導場面において線分図や数直線図に基づいた解決の手続きを扱うことで，児童は自分が暗黙的にでも使った性質として必要性を実感して乗法的な見方を学習できると推察する。

以上のように，児童が乗法的な見方の必要性を実感して学習できるようにするためには，問題解決の過程において乗法的な見方が必然的に生じる必要があり，そのためには指導において線分図，数直線図を用いた解決の手続きを扱い，２つの大きさの部分と全体の関係を「倍」で比較することに着目することが必須である。

５．まとめと今後の課題

本稿の目的は，乗法的な見方の生じる可能性の観点から，小学校算数科における乗除法の問題場面を表す記号表現の有効性を評価することであった。そのために，概念野理論を枠組みとして，記号表現に基づいた児童の想定される解決の手続きを分析した結果，離散図に基づいて解決する場合には，児童の思考は加法的な見方の使用に止まるのに対して，線分図・数直線図に基づいて解決する場合には，同一測度空間内の２つの大きさの倍関係に着目することによって，暗黙的にでも乗法的な見方が必然的に用いられることが示された。

今後の課題は，整数の乗除法で解決できる単比例の各問題場面の児童にとっての困難性と，問題解決場面において児童が記号表現を用いる必然性の双方を考慮して，整数の乗除法で解決できる問題場面において乗法的な見方を指導するために適した問題場面について検討することである。

引用・参考文献

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective,* Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum Associate, 39–59.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures, In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes,* New York; Tokyo: Academic Press, 127–175.

Vergnaud, G. (1984). Problem-solving and symbolism in the development of mathematical concepts, In B. Southwell et al. (eds.), *Proceedings of the Eighth Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Sydney: International Group for the Psychology of Mathematics Education, 27–38.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades,* New York: Lawrence Erlbaun Associates, National Council of Teachers of Mathematics, 141–161.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields, In P. Leslie (ed.), *Theories of mathematical learning,* LEA, 219–239.

杉山吉茂（1986）『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東洋館出版社.

田端輝彦（1989）「乗法の意味指導の一考察　比例的推論の力を伸ばす場としての乗法の意味指導」，第22回数学教育論文発表会論文集，297－300，日本数学教育学会.

田端輝彦（1990）「小数・分数の除法の指導の一考察　比例的推論の立場からみた除法指導」，第23回数学教育論文発表会論文集，335－338，日本数学教育学会.

田端輝彦（2007）「整数の乗法における比例関係の顕在化に関する一考察 割合（比）の三用法の類型と１あたり量を示さない問題の分析を中心として」，第40回数学教育論文発表会論文集，325－330，日本数学教育学会.

田端輝彦（2008）「整数の乗法における比例関係の顕在化に関する授業の考察　１あたり量を示さない問題を数直線図を書く指導を通して」，第41回数学教育論文発表会論文集，339－344，日本数学教育学会.

中村享史（1996）「小数の乗法の割合による意味づけ」，日本数学教育学会誌 第78巻　第10号，7－13，日本数学教育学会.

中村享史（2007）「小数の乗法に関する記述表現の分析―乗法の意味づけの児童のノート記述を中心に―」，第40回数学教育論文発表会論文集，361－366，日本数学教育学会.

日本数学教育学会（2004）『算数教育指導用語辞典　第三版』教育出版.

渡会陽平（2009）「小学校算数科における乗除法の意味の学習過程の分析― G. Vergnaud の「乗法的構造」を手がかりに―」，第42回数学教育論文発表会論文集，549－554，日本数学教育学会.

渡会陽平（2010）「小学校算数科における乗法の意味の拡張についての分析― G. Vergnaud の Conceptual Fields 理論を枠組みとして―」，第43回数学教育論文発表会論文集 第1巻，145－150，日本数学教育学会.

An Analysis of Symbolic Representations Expressing Situations of Multiplication and Division in Elementary School Mathematics

Yohei WATARAI

The purpose of this study is to assess the effectiveness of symbolic representations expressing situations of multiplication and division in elementary school mathematics for acquiring multiplicative properties.

In order to accomplish the above purpose, this study analyzed the assumed student's procedure for problem-solving based on symbolic representations in situations of multiplication and division by applying the framework "The Theory of Conceptual Fields" (G.Vergnaud, 1982, 1983, 1984, 1988, 1996), as follows. First, this study expressed multiplicative situations with symbolic representations.

Multiplicative situations are classified into six kinds; multiplication of whole numbers, partition of whole numbers, quotition of whole numbers, rule-of-three problems that the scalar ratio is a whole number, rule-of-three problems that the function ratio is a whole number, and rule-of-three problems that neither the scalar ratio nor the function ratio are whole numbers. Three kinds of symbolic representations were selected; a discrete figure, a line segment figure, and a proportional number line figure. Second, this study clarified theorems-in-action for writing expressions of multiplication and division, which are mathematical properties used by students when writing those expressions, in the assumed student's procedure for problem-solving based on symbolic representations.

The results of analysis reveal that (1) only additive properties are used in the procedure for problem-solving based on a discrete figure. In contrast, (2) multiplicative properties are used spontaneously, although it may be implicit, by focusing on the relationship of two measures in a measure-space in the procedure for problem-solving based on a line segment figure and a proportional number line figure.