

〈研究論文〉

学校数学における証明の構想の過程

—— argumentation を視点として ——

辻 山 洋 介

学校数学における証明の構想の過程

—— argumentation を視点として ——

辻 山 洋 介

1. 研究の目的と方法

(1) 問題の所在及び研究の目的

学校数学における証明の学習に困難を抱える生徒が多いこと、とりわけ、証明の記述の問題に無解答の生徒が多いことは、長く数学教育の課題とされてきた。この現状を打開するために、証明の構想に焦点を当てた指導が必要であると指摘されるようになった(清水, 1994; 国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2006)⁽¹⁾。これらの指摘を背景として、これまでに、証明の構想の意義及び方法に関する研究がなされている(宮崎, 2007; 辻山, 2008, 2010)。

証明の構想 (devising a plan to prove) が学習指導において意義あるものとして実現されるためには、証明の構想の方法に加えて、証明の構想の過程を明らかにする必要がある。なぜなら、いかなる方法で証明の構想に取り組んだとしても、生徒は最終的な証明の所産を知らないゆえに、誤りや不十分さを含む推論をみつける可能性を避けられないからである。誤りや不十分さに直面した生徒に対する指導の方法を考えるためには、まずもって、誤りや不十分さが証明の構想の過程でどのように解消されていくのかを明らかにしなければならない。

先行研究において、証明の構想の過程は演繹という論理の型に着目して分析されてきた。Heinze ら (2008) は、証明の構成に至る過程には、仮定に着目した順向きの推論あるいは結論に着目した逆向きの推論に加えて、それらによって得られた推論の中から適切なものを選択することなどが含まれると指摘し、「調整」という

視点を導入した (Heinze ら, 2008, p. 446)。同様の着眼点による実証的な考察もなされており、仮定あるいは結論に着目して得られた演繹的な推論の不十分さに生徒が気づき、その不十分さを補う過程が分析されてきた (牧野, 2007)。このように、証明の構想の過程は演繹的な側面から捉えられてきた一方で、蓋然的な側面からは捉えられてこなかった。

生徒は証明の構想の過程において、純粋な論理にもとづく推論ばかりでなく、蓋然的な推論をも用いることが予想される。このことを考慮して証明の構想の過程を捉えるためには、証明の所産に現れる演繹的な推論の型を考慮しながらも、それよりも広い視点を導入する必要がある。その視点として、蓋然性を含む理由の説明とその吟味を含む概念である argumentation への着目が有効であると期待される。

以上から、本研究は、学校数学における証明の構想の過程を、argumentation を視点として考察することを目的とする。

(2) 研究の方法

この目的を達成するために、本研究は次の理論的考察を行う。まず、argumentation に関する先行研究の検討にもとづいて、証明の構想の過程を捉える視点を得る。次に、その視点を設定することにより、証明の構想の過程をどのように捉えることが可能になるのかを、想定上の例に即して説明する。例示する過程は、実際の生徒によるものではなく、筆者の想定によるものを用いる。最後に、本研究の視点によって捉えられる証明の構想の過程を、先行研究で指摘されてきた過程との比較によって特定する。

このうち、証明の構想の過程を捉える視点を得るために、本研究は主に Toulmin (1958/2003) に依拠して argumentation の特性を整理する。その理由は以下の通りである。

(1)で述べたように、証明の構想あるいはそれに相当する局面に特化し、その過程を蓋然的な側面から分析する研究は、これまでになされていない。他方、推測から証明へと向かう一連の過程の蓋然的な側面を、argumentation に着目して分析する先行研究がある。この種の先行研究の分析の視点及び結果のうち、証明の構想に特徴的な部分を同定することにより、証明の構想の過程を捉える視点に関する示唆が得られると期待される。

先行研究の焦点は、推測や証明に関する生徒の活動が、証明の所産にどのようにつながりうるのかに当てられている。それゆえ、証明の所産に現れない過程を捉える視点は十分に検討されていない。他方、Toulmin (1958/2003) によれば、argumentation は論の吟味を含む概念である。そのため、この概念の特性に着目することにより、吟味を通じて論が棄却される過程にも焦点を当てることが可能なはずである。したがって、本研究は、Toulmin に依拠して argumentation の特性を抽出し、その特性に上述の先行研究の知見を合わせて整理することによって、証明の構想の過程を捉える視点を得る。

以上の理由から、次節では、まず、証明活動における証明の構想の位置を確認する。次に、推測と証明の活動を argumentation に着目して分析している先行研究の視点及び知見のうち、特に証明の構想の過程に特徴的な部分を同定し、その意義と限界を検討する。そして、Toulmin に依拠して argumentation の特性を整理し、その特性を先行研究の視点と合わせて検討することにより、証明の構想の過程を捉える視点を得る。

以下では、海外の先行研究と同様に、所産としての証明 (proof) と過程としての証明 (proving) を区別するために、前者を単に証明、後者を証明活動と表す。

2. 証明の構想の過程を捉える視点

(1) 証明活動における証明の構想の位置

問題解決に関する Polya (1957/2004) の研究に依拠することにより、証明活動は、問題の理解、証明の構想、証明の構成、振り返りという四つの相から捉えられる (辻山, 2008)。証明問題の解決には、ある事柄が「真であるか偽であるか」という問いに答えること」が求められる (Polya, 1957/2004, p. 154)。それゆえ、問題の理解において、真偽が問われている事柄の仮定と結論を明らかにし、意味を把握し、真偽を予想する必要がある。証明問題の解決は、証明の構成、すなわち、根拠を明らかにして演繹的な推論の連鎖によって事柄の真であること (または偽であること) を確立する行為によって実行される。

証明の構想とは、証明の構成のための構想を練る行為、すなわち、「事柄の真であること (または偽であること) を確立するために、その事柄と他の事柄との間に演繹的なつながりをみつける行為」である。振り返りには、証明の所産の誤りや不十分さを確認する行為に加えて、得られた結果やそれを得た方法の他の問題への適用を検討する行為など、証明や証明活動を他の問題の解決に活用しようとする行為が含まれる (Polya, 1957/2004, pp. 14-16)。

問題の理解、証明の構想、証明の構成、振り返りという四つの相はこの順で進むとは限らず、これらの相にかかわる活動は一連の過程において繰り返し現れる。例えば、証明の構成の所産を振り返って不十分さを明らかにして、その不十分さを解消するために再び証明を構想し構成することや、証明の構想の過程を振り返って疑問を明らかにして、その疑問を新たな問題と捉え直して解決することなどが、証明活動には含まれる。

(2) 証明、証明活動及び argumentation に関する先行研究

① 先行研究の概観

形式的証明の所産とは異なり、証明にかかわる数学者の研究の営みには非形式的な側面が

備わっており、その側面こそが数学者にとって重要であるという指摘がある (Lakatos, 1976; Thurston, 1994)。これらの指摘を背景として、学校数学においても、生徒の証明や証明活動の非形式的な側面が注目されるようになった。その中でも、argumentation 概念への着目によって、脱文脈化以前の生徒の活動を、演繹的な推論だけでなく蓋然的な推論にも焦点を当てて分析している一連の研究がある^②。その主な焦点は論の「内容」に当てられており、近年では、論の構成要素のつながりにも当てられるようになった (Pedemonte, 2007)。

argumentation とは、「論 (argument) 及びその連鎖を立てて吟味する行為、及びその所産」である。「論」とは「主張の成立する理由を示す (演繹的、形式的とは限らない) 論理的につながった推論」であり^③、「論理的につながった推論」には、演繹的な推論に加えて帰納的な推論やアブダクティブな推論が含まれる。

②蓋然的な内容を含む論

論の「内容」とは、論が何を参照して立てられるのかを意味する。代表的な研究として、Douek (1999) は、「参照物」を、数学的な理論だけでなく図などの視覚的効果を含めた広いものとして捉えた (Douek, 1999, p. 275)。すなわち、定理、公理や定義など、証明の所産に現れる理論に加えて、図や数の例などにもとづく蓋然的な推論を含めて推測や証明の活動を捉えたのである。例えば、事柄ア「平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる」の場合、図 1 の参照にもとづく「 $\triangle ADO$ と $\triangle CBO$ は合同になりそうである」という蓋然的な推論に相当する。

Douek らの分析を証明の構想の過程に制限すると、蓋然的な推論と、その推論の内容の不確かさの解消を視点としていっていると考えられる。実

際、Douek らが実証的に指摘した証明活動の過程の特徴のうち、次の二つは証明の構想の過程に関するものと捉えられる。第一は、蓋然的な内容を含む論を立て、その蓋然性を解消する過程が証明の構成の鍵になることであり、第二は、蓋然性の解消の結果、「合同な三角形において対応する辺は等しい」などの根拠が証明の所産において明示されない場合があることである (前掲書, pp. 278-279)。

③蓋然的なつながりを含む論

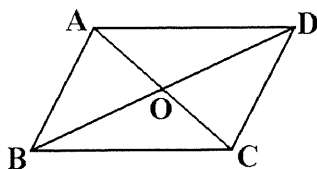
論の内容に加えて、近年、論の構成要素のつながりにも焦点が当てられるようになった。その先駆者である Pedemonte (2007) は、分析の道具として Toulmin (1958/2003) の「論のレイアウト」の一部分を制限的に用いて、推測を正当化する過程で立てられる論がどのようなつながりを持ち、それが証明の所産にどのように反映するのかを分析した。図形領域においては、アブダクティブな推論、すなわち「観察された事実からはじめて主張を構成することを許す推論」に着目した (Pedemonte, 2007, p. 29)。上の事柄アの場合を例にすれば、「結論 $OA=OC$ は成立するに違いない」と考え、「合同な三角形において対応する辺は等しいことを用いれば結論を導けそうである」とする蓋然的な推論である。

Pedemonte らの分析を証明の構想の過程に制限すると、蓋然的な推論と、その推論のつながりの飛躍の解消を視点としていっていると考えられる。実際、Pedemonte は、過程における帰納的あるいはアブダクティブな推論を、演繹的な推論へと整理して証明を構成する際の困難を実証的に指摘している。

以上の先行研究の知見にもとづいて、証明の構想の過程を捉える視点「蓋然的な内容とつながりを含む立論、及び、内容とつながりの蓋然性の解消」が得られる。

④先行研究の限界

上の視点を設定することによって、蓋然的な推論の活用と蓋然性の解消にかかわる過程を捉えられることが期待される。上述の先行研究の焦点は、妥当な証明を構成するために、推測や



〔図 1 事柄アの図〕

証明の活動の過程において生徒は何をすればよいのかを実証的に分析することである。それゆえ、証明の所産に特に関連する部分の蓋然的な推論が分析されている一方で、過程で棄却されて所産に現れない論や、誤りや不十分さの解消されない論は分析されていない。本来、蓋然的な推論は、その蓋然性ゆえに予想しやすい反面、誤りや不十分さを含む可能性を避けられないはずである。したがって、誤りや不十分さを考慮して、蓋然的な推論の活用過程を捉える視点が必要である。

argumentation 理論において、argumentation は修正や棄却を含む概念であり、argumentation の過程において論争 (controversy) を一つひとつ乗り越えることで、所産の合意が得られると捉えられている (Krummheuer, 1995, p. 232)。したがって、argumentation の特性を確認することによって、誤りや不十分さを考慮した視点を得られると期待される。そのために、本研究は、Toulmin (1958/2003) に依拠する。

(3) argumentation の特性

Toulmin (1958/2003) の「論のレイアウト」は、集団的な発話の分析ツールとして広く用いられており、数学教育研究においても、証明の学習以前の小学生が合意を形成する過程や、証明の学習以後の生徒が推測し証明する過程やその所産などを記述するために、近年多く使われている (Krummheuer, 1995; Inglis ら, 2007; Pedemonte, 2007)。「論のレイアウト」は、「主張」、「論拠」、「データ」の三要素によって演繹的な推論を捉えることが可能であり、同時に、

「様相限定子 (以下では限定と表す)」、「反証」、「裏づけ」の三要素によって不確実性や相対性を捉えることが可能である。それゆえ、証明の構想の過程における蓋然的な推論の活用という本研究の焦点に合致する。

argumentation は、立論と吟味という二つの行為によって特徴づけられる。立論に関して、Toulmin は、「論のレイアウト」の構成要素の中で、何よりも述べたい主張が先行すると捉えている (Toulmin, 1958/2003, p. 90)。そして、大衆の日常的な行為への着目から、入手可能な要素にもとづいて主張を正当化するという立論の特徴をあげている (前掲書, pp. 90-91)。この特徴ゆえに、数学における形式的証明の所産とは対照的に、論は蓋然性をもつのである。

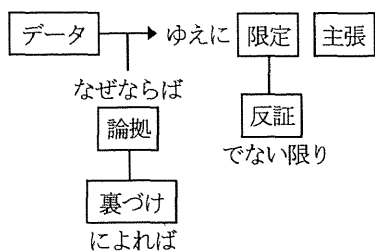
それと同時に、立論に関する Toulmin の議論は、論の吟味を前提としている。実際、「論のレイアウト」の各要素の必要性を説明する際に、Toulmin は、論が他者からの挑戦や批判を受けることに言及している。このように、入手可能な要素にもとづく蓋然的な立論と、その論の吟味による蓋然性の解消という両面が、argumentation には備わっている。以下ではこの両面を前提として、argumentation の特性を整理する。まず、立論にかかわって、データ、論拠、主張の間のつながり及び限定という論全体にかかわる特性を、次に、反証と裏づけにかかわる特性を、最後に、吟味にかかわる特性をあげる。

①構成要素のつながり

Toulmin は、入手可能な限られたデータや論拠にもとづく立論を前提として、データ、論拠及び主張の間のつながりに曖昧さが含まれてもよいこと、さらには、それらの要素すべてが明らかである必要はないとした (Toulmin, 1958/2003, pp. 92-93)。このことから、argumentation の特性①として「飛躍を含みうる立論」があげられる。

②限定

限定は、「おそらく」など、論に置かれる信頼の強さを表す要素である。Toulmin がこの要素を必要としたのは、データ、論拠、主張が演繹的、形式的でない限り、反証される可能性を避



[図2 論のレイアウト
(Toulmin, 1958/2003)]

けられないからである (Toulmin, 1958/2003, p. 93)。このことから, argumentation の特性②として「不確実さを含みうる立論」があげられる。

③反証

Toulmin は, 論が飛躍や不確実さを含みうるという前提の下で, 論が意義あるものになるために必要な要素の一つとして反証をあげている。反証は「例外の条件」を表す要素であり, データと論拠を用いても一般に主張を導けない際に, 論が妥当性をもつ範囲を制限するために必要である (Toulmin, 1958/2003, p. 93)。反証を示すためには主張が成立しない特殊の場合を特定する必要がある, そのためには, データの意味を様々な条件下で検討する必要がある。このことから, argumentation の特性③として「条件の変更」があげられる。

以下では, 図2の「論のレイアウト」における「反証」と「でない限り」を, 肯定的な形にも用いやすいように, それぞれ「条件」と「の下で」と表すことにする。

④裏づけ

裏づけは, 「論拠がなぜ成立するのか」という拠り所を示す要素である (Toulmin, 1958/2003, p. 96)。この要素が必要である理由は, 論拠に相当する一般法則が認められるかどうかは「場(field)」に依存すること, すなわち, 論の真理性が相対的であることからである (前掲書, pp. 14-15)。Toulmin は, 論の性質を場に依存するものとししないものに分けて考察し, そのうち場に依存しない形式を「論のレイアウト」として示した。その要素のうち, 論拠の場への依存性を表すはたらきをもつ要素が, 裏づけである (前掲書, p. 96)。このことから, argumentation の特性④として「論拠の妥当性の裏づけ」があげられる。

⑤蓋然性の解消と明示

以上の四点によって, 論は蓋然性をもつ。論の蓋然性に関して, 蓋然性の解消だけでなく, 蓋然性の明示に言及している点に Toulmin (1958/2003) の特徴を指摘することができる。例えばデータに関して, データが挑戦された場合に, そのデータを主張として捉え直しそれを

導く論を新たに立てること, 及び, そのデータを棄却してより適切なデータを選ぶこと (前掲書, pp. 90-91) によって, データの蓋然性を解消することが言及されている。これに加えて, 反証を明示することによって, データと論拠の適用範囲を制限しながら, 論を擁護すること (前掲書, p. 95) もが言及されている。後者は Toulmin の哲学的立場, すなわち, 形式論理への偏重を批判し, 実質的な論はそれ自体に意義があると捉える立場に直結する側面である⁴⁾。

このことから, argumentation の特性⑤-1「蓋然性の解消」及び⑤-2「蓋然性の明示」があげられる。

(4) 証明の構想の過程を捉える視点

以上の argumentation の特性のうち, ①, ②及び⑤-1, すなわち, 飛躍と不確実さを含みうる立論とそれらの解消は, Pedemonte (2007) や Inglis ら (2007) などの先行研究で頻繁に議論されている。また, Toulmin に依拠していない Douek (1999) や, argumentation の言葉を用いずに意味論的な証明の構成と統語論的な証明の構成に言及した Weber & Alcock (2004) も, 証明の構想に限れば同主旨の議論をしているものと捉えられる。他方, ③, ④, 及び⑤-2, すなわち, 条件と裏づけの明示による論の擁護を考慮した証明活動の過程の分析はされてこなかった。

(2)④で述べたように, 本研究は, 証明の構想の過程における, 所産には残らない論の活用にも焦点を当てる。このような論を活用するためには論の擁護が必要と考えられるため, 本研究は, argumentation の特性⑤-2にも焦点を当てる。

⑤-1と⑤-2の両者からみると, ①と②は先行研究で議論されているように, 特に⑤-1にかかわる側面である。他方, ③は論が成立する条件を示し, ④は, ある論拠をその場で用いてもよいことを示すことであるゆえに, ③と④は特に⑤-2にかかわる側面である。

以上を整理して, 本研究は, 証明の構想の過程を捉える視点として次の四点を設定する。1)

飛躍と不確実さを含みうる立論，2)論の飛躍と不確実さの解消，3)論の成立条件の明示，4)論拠の裏づけの明示。このうち，1)は2)～4)の前提となる論の蓋然性に，2)は蓋然性の解消に，3)と4)は論の擁護に対応している。

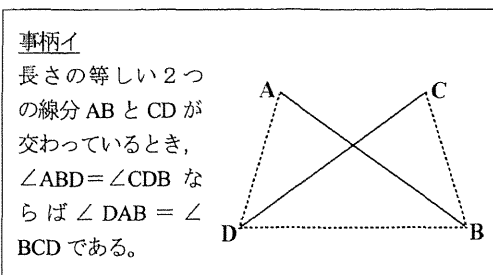
3. argumentation を視点とした証明の構想の過程の説明

上の視点1)～4)を設定することにより，証明の構想の過程をどのように捉えることが可能になるのかを，想定上の例に即して説明する。本節で例示する過程は，実際の生徒によるものではなく想定上のものであり，図5～11もまた，想定上の過程を筆者が「論のレイアウト」を用いて記述したものである。

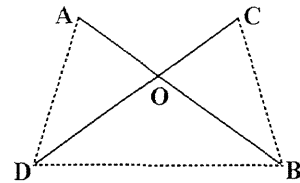
四つの視点のうち，1)は2)～4)のいずれにおいても前提となることであり，かつ，3)あるいは4)に相当する活動では，1)に加えて2)に相当する活動が合わせて行われると考えられる。また，前節で述べたように，1)及び2)を視点とした分析は先行研究において既になされている。以上を考慮して，本節では，3)及び4)を主たる視点とする。

例として，図3の事柄イを証明する問題を取り上げる。この問題は，中学校第二学年において，仮定や結論などの用語及び証明の意味の学習後に，証明の構想と構成の方法に関する学習の初期において取り組まれることが多い(例えば岡本他，2007)。結論「 $\angle DAB = \angle BCD$ 」を導く合同な三角形をみつけ，三角形の合同条件のうちどれを適用できるのかを検討することが中心となる。

事柄イの証明の主な方法は二通りである。一



[図3 事柄イ]



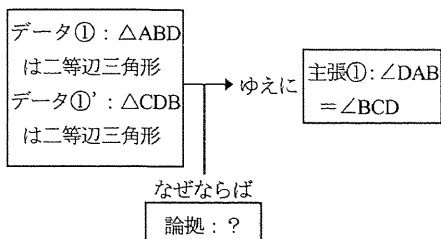
[図4 AB と CD の交点 O を付記した事柄イの図]

方は「 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ 」への着目によるものであり，他方は「 $\triangle ADO \equiv \triangle CBO$ 」への着目(図4のように，AB と CD の交点を O とする)によるものである。いずれによっても証明可能であるが，後者の証明の構想は前者に比べて複雑である上に，生徒にとって未知の事柄「二角の等しい三角形は二等辺三角形である」の真偽が問題となる。以下では，それぞれの証明に至るまでに想定される証明の構想の過程を説明する。

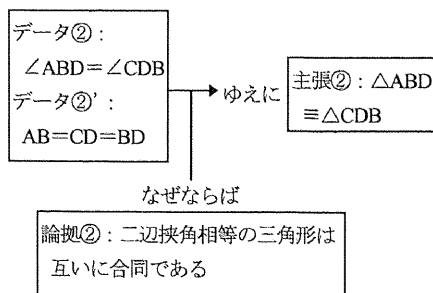
(1) 論の成立条件の明示

前者の証明を得るために，証明の構想の過程において必要なことは，主に，合同な三角形として「 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ 」に着目することと，それを導く合同条件として二辺挟角相等を選択することである。合同な三角形を探る際，事柄イの仮定，結論及び図から必要な情報を読み取れるならば，生徒は，「 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ 」と二辺挟角相等をみつけることが可能である。他方，生徒は，意図せずに特殊の条件を加えてしまう可能性がある⁶⁾。事柄イの場合， $\triangle ABD$ や $\triangle CDB$ が二等辺三角形であると考えてしまう「可能性」である。以下では，この考えにもとづいて証明を構想し， $\triangle ABD$ や $\triangle CDB$ が二等辺三角形でないことに気づき，証明を構想し直す際に想定される過程を，上述の1)，2)及び3)を視点として説明する。

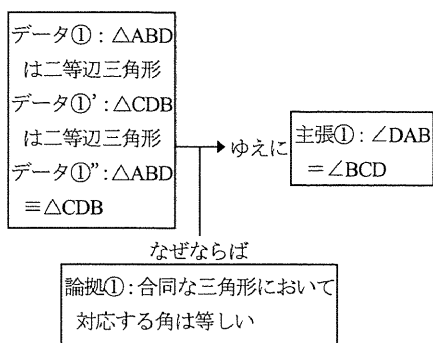
データ①「 $\triangle ABD$ は二等辺三角形である」及び①'「 $\triangle CDB$ は二等辺三角形である」が成立すると考えたとしても，これらは事柄イの結論に含まれる $\angle DAB$ と $\angle BCD$ をそれぞれ角にもつ。このことから，生徒は，データ①と①'にもとづいて主張①「 $\angle DAB = \angle BCD$ 」を導けそうであるという論を考える(図5)。



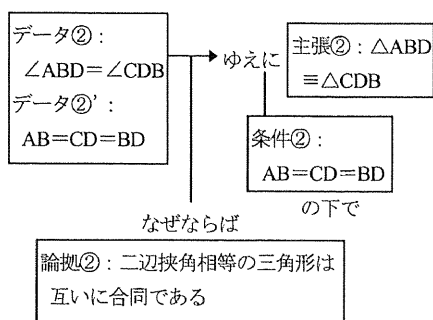
[図5 飛躍と不確実さを含む論①]



[図7 論② (論①の不確実さの解消)]



[図6 論①の飛躍の解消]



[図8 論②の成立条件の明示]

この論の吟味により、データ①及び①'と主張①の間に飛躍があることが明らかになる。この飛躍を解消するために、生徒は新たなデータと論拠を探り、データ①「 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ 」と論拠①「合同な三角形において対応する角は等しい」をみつける(図6)。

論の吟味により、データ①'は不確実であることが明らかになる。この不確実さを解消するために、生徒は、データ①'を主張②と捉え直し、それを導く論を探る。 $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において成立することを探ることにより、事柄イの仮定であるデータ②「 $\angle ABD = \angle CDB$ 」をみつける。このことに加えて、暗黙に条件に加えているデータ①と①'からデータ②'「 $AB = CD = BD$ 」が得られることから、生徒は、二辺挟角相等によって主張②を導くことができると考える(図7)。

論の吟味により、データ②'は事柄イで仮定されていないことが明らかになる。このことから、データ②'は一般には成立せず、その不確実さを

解消できないことが明らかになる。それゆえ、生徒は、論の成立条件②「 $AB = CD = BD$ 」を明示して一連の論を擁護する(図8)。

論の吟味によって、生徒は、条件②を除いた場合に、一連の論②と①のどの部分が成立しなくなるのかを探る。この吟味により、論②において、BDは共通する辺であるため「 $BD = DB$ 」が成立すること、それゆえ主張②は導かれることが明らかになる。同様に、論①において、データ①及び①'が成立しないこと、その反面、主張①「 $\angle DAB = \angle BCD$ 」は依然として導かれることが明らかになる。以上を整理し、生徒は、「 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ 」を中心とした証明の構成へと向かう。

(2) 論拠の裏づけの明示

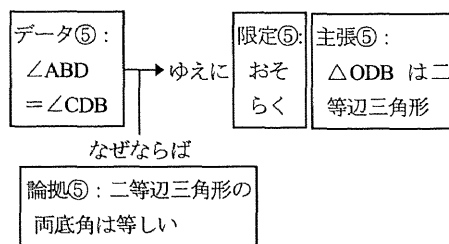
「 $\triangle ADO \equiv \triangle CBO$ 」への着目によって事柄イの証明を得るために、証明の構想の過程において必要なことは、主に「 $\triangle ODB$ が二等辺三角形である」を示すことである。「 $\triangle ODB$ が二等辺

三角形である」への着目に至る過程には、「 $\triangle ADO \equiv \triangle CBO$ 」を導く合同条件の選択，仮定「 $\angle AOD = \angle COB$ 」及び「 $AB = CD$ 」から二辺挟角相等への着目，「 $OD = OB$ 」と「 $OA = OC$ 」のいずれかを示せばよいことの確認などが行われる。以下では，「 $OD = OB$ 」を示そうと考え，仮定と結論の論理関係を誤った結果，未知の性質「二角の等しい三角形は二等辺三角形である」に着目する際に想定される証明の構想の過程を，上述の1)，2)及び4)を視点として説明する。

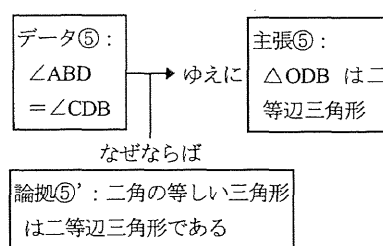
不確実なデータ「 $OD = OB$ 」を導くために，データを主張④と捉え直し，これを導く論を探る。このことから，生徒は，データ④「 $\triangle ODB$ は二等辺三角形である」が成立しそうであると予想する。そして，論の吟味により，データ④の不確実さを解消するために，これを主張⑤と捉え直す。

主張⑤を導く論を探ることにより，生徒は，仮定からデータ⑤「 $\angle ABD = \angle CDB$ 」が成立すること，及び，未証明ではあるが既知の事柄「二等辺三角形の両底角は等しい」を論拠⑤として使えそうであると予想する(図9)。

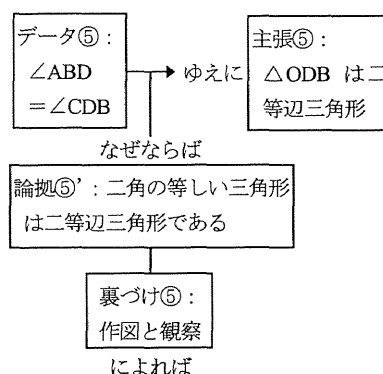
論⑤の吟味によって，論の飛躍が明らかになる。この飛躍を解消するために，生徒は，論拠⑤ではなく⑤'「二角の等しい三角形は二等辺三角形である」を論拠とする必要があることに気づく(図10)。論の吟味により，論拠⑤'は未知の事柄であることから，一連の論を擁護するためには論拠⑤'の裏づけが必要であることが明らかになる。このことから，生徒は，作図と観察によって論拠⑤'が成立しそうであることを確かめ，その裏づけ⑤「作図と観察」を明示して一連の論を擁護する(図11)。以上を整理し，生徒は，論拠⑤'を前提とした証明の構成へと向かう。



[図9 飛躍を含む論⑤]



[図10 論⑤の飛躍の解消]



[図11 論拠⑤'の裏づけの明示]

4. 証明の構想の過程を捉える視点の意義

蓋然的な推論の中には，証明の構想の過程において棄却され，所産に現れないものがある。本研究の視点を設定することにより，このような推論の活用過程を捉えることが可能になる。このことの意義を議論する。

(1) 論の成立条件の明示を視点とする意義

証明の構想の過程において，ある条件下において成立するが一般には成立しない論を予想することがある。特殊の論の意図的な利用について，Polya (1954) は，問題を単純な場合に特殊化し，特殊化した問題の解決をもとの問題の解決に利用するという「先導的特殊の場合 (leading special case)」の利用に言及した (Polya, 1954, p. 25)。このように特殊の場合を意図的に利用することに加えて，生徒が証明を構想する際に，データ①「 $\triangle ABD$ は二等辺三角形である」のように，意図せずに特殊の条件を考えてしまうこともあると思われる。

このように，特殊の論を用いた証明の構想の

過程は、演繹という論理を視点として捉えることはできない。さらに、argumentation を視点とした先行研究においても十分に分析されていない。例えば、参照物を数学的な理論よりも広く捉えた Douek は、数の例や図などの特殊の場合にもとづく飛躍を含む論に言及している (Douek, 1999, p. 278) が、その修正の過程は分析していない。

本研究の視点「論の成立条件の明示」の設定によって、意図的にせよそうでないにせよ、生徒が特殊の場合における論を活用する過程を捉えることが可能になる。例えば、3 (1) で述べたように、データ①「 $\triangle ABD$ は二等辺三角形である」を考えてからそれを棄却するまでの過程を、単にデータ①の誤りと捉えるのではなく、データ①にもとづく一連の論が条件②「 $AB = CD = BD$ 」の下で成立することの確認、及び、条件②を除いた場合に論のどの部分が成立するのかの検討を含む過程として捉えることが可能になる。

(2) 論拠の裏づけの明示を視点とする意義

証明の構想の過程において、成立すると予想されるが証明されていない事柄を前提として用いることがある。このような活動を通じて、生徒自身が前提を吟味し定めていくことは、数学における相対的な真理観を背景とした先駆的な研究において描写された (Fawcett, 1938)。近年では、ある現象をうまく説明できる事柄を探り、その事柄を前提として演繹的に推論するという活動を証明学習に取り入れることが、経験科学における「仮説演繹的な方法」を背景として提唱されている (Jahnke, 2007)。このように自覚的に前提を探ることに加えて、生徒は、蓋然的な推論の修正を通じて、論拠になりうる未知の事柄に着目することもあると思われる。上の例で言えば、予想された論拠⑤「二等辺三角形の両底角は等しい」の誤りの解消を通じて、論拠⑤'「二角の等しい三角形は二等辺三角形である」という未知の事柄を見つけることである。

これまでに、不確実なデータを含む立論、飛躍を含む立論、及び、論の飛躍と不確実さの解

消に関する分析は、論理を視点とした研究を含め、数多くなされてきた。他方、生徒が論拠の妥当性を問う過程は分析されてこなかった。例えば、推測や証明の活動の過程におけるアブダクティブな推論の利用に焦点を当てた Pedemonte (2007) は、妥当な証明の構成に至った生徒と至らなかった生徒の過程を、Toulmin (1958/2003) の「論のレイアウト」のうちデータ、論拠、主張の三要素を用いて分析した。分析の結果、過程でアブダクティブな推論を用いるゆえに、その推論を演繹的な推論へと構成し直すのが困難になりうるという、論理にかかわる生徒の困難が指摘されている (Pedemonte, 2007, pp. 38-39)。他方、いずれの生徒の活動に関しても、アブダクティブな推論のうち、証明の所産に現れないものは分析の対象とされていない。また、後の研究において、Pedemonte (2008) は、「論のレイアウト」のうち裏づけに焦点を当てているが、論拠の裏づけを生徒が考える過程を分析するのではなく、生徒の発話に表出したデータや論拠にもとづいて、算術あるいは代数のいずれの場においてその生徒が活動しているのかを分析している。

本研究の視点「論拠の裏づけの明示」の設定によって、成立の予想される事柄を論拠として活用する過程を捉えることが可能になる。例えば、3 (2) で述べたように、論拠⑤を予想してから論拠⑤'とその裏づけ⑤を提示するまでの過程を、単に論拠の誤りと捉えるのではなく、論拠⑤にもとづく一連の論が論拠⑤'を前提とすれば成立することの確認、及び、裏づけ⑤による、前提となる論拠⑤'の擁護を含む過程として捉えることが可能になる。

5. 研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は、学校数学における証明の構想の過程を、argumentation を視点として考察することであった。この目的を達成するために、本研究は、まず、argumentation に関する先行研究の検討にもとづいて、証明の構想の過程を捉える視点として次の四点を設定した：1) 飛躍と不確実さを含むうる立論、2) 論の飛躍と不確

実さの解消，3)論の成立条件の明示，4)論拠の裏づけの明示。次に，これらを視点とすることにより，証明の構想の過程をどのように捉えることが可能になるのかを，想定上の例に即して説明した。最後に，本研究の視点によって捉えることが可能になる証明の構想の過程と，先行研究で指摘されてきた過程とを比較することによって，本研究の視点を設定することの意義を議論した。

3で例示した証明の構想の過程は，実際の生徒によるものではなく，あくまで筆者の想定によるものである。したがって，本研究で設定した視点を用いて，生徒による実際の証明の構想の過程を分析し，蓋然的な推論の活用の可能性や限界を特定する必要がある。この分析のためには，表出されにくい蓋然的な推論を顕在化する方法の検討が必要である。これが第一の課題である。

第二の課題は，証明の構想の過程を，問題の理解，証明の構成及び振り返りという証明活動の他の相との関係において考察することである。例えば，3(2)で述べた論拠⑤「二角の等しい三角形は二等辺三角形である」を新たに証明すべき問題と捉えることは，振り返りに相当する活動である。同時に，この振り返りが実現されるためには，論拠⑤とその裏づけ⑤の明示による一連の論の擁護によって，振り返りの対象が明確になる必要があると考えられる。証明の構想と振り返りの関係を含め，証明活動全体へと考察を広げる必要がある。

謝辞

本論文の作成にあたり，貴重なご意見をいただいた査読者の方々，並びに，英文を校正していただいた Taro Fujita 先生（プリマス大学），Hannah Fujita さんに，深く感謝申し上げます。本研究は，日本学術振興会（特別研究員）の助成を受けて行われました。

注

(1) 近年の国内の大規模調査において，単に証明の記述を問う従来型の問題でなく，証明の所産

に至る局面をいくつかに分けて問う問題が出題されている。平成16年度に実施された「特定の課題に関する調査」の中学校第二学年Ⅱ8は，「中村さん」による証明の構想及びその構想にもとづく証明の構成の過程が提示され，それを参考に，似た事柄の証明を記述する問題であった。結果として，通過率は63.9%，無解答率は17.9%と，従来型の証明の記述の問題に比べて，通過率は高く，無解答率は低かった。この結果の分析にもとづいて，指導上の改善について次のことが指摘された。「証明の構想を練る段階を重視して，着目する要素を明らかにしたり，証明の方針を確認したりするなど，証明の過程をいくつかの部分に分けて指導することが有効である」（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2006, p. 24）。

(2) 1990年代にフランスやイタリアで行われた共同研究がきっかけとなり，推測から証明へと向かう一連の過程における生徒の活動とその所産が盛んに分析されるようになった。その共同研究の経過や成果の一部は，Boero (2007) によってまとめられている。

(3) Douek は，argumentation を「与えられた主題について，論理的につながった（演繹的，形式的とは限らない）ディスコースを生成する過程及びその所産」（Douek, 1999, p. 274）と規定した。本研究は，証明の所産でなく証明活動の過程を分析するという点で Douek と問題意識が共通するため，Douek と同様の立場を取っている。

(4) Toulmin は，同書が2003年に再版された際の序文において，「論のレイアウト」が予期に反してコミュニケーション学者たちに過程の分析に用いられてきた経緯と，それに対して自身の問題意識は，当時の哲学において「どんな意義深い論も，形式的な言葉で置き換えられる」と捉えられていたことに対する批判であったことを述べている（Toulmin, 1958/2003, p. vii）。

(5) 生徒の認知的な問題だけでなく，図形という領域の問題でもある。実際，現在の証明の原型とも言えるユークリッド『原論』においても，暗黙の前提を用いている証明や，一般の場合に

適用できない証明が数多く存在する。同時に、これらの不十分な証明にもとづいて、後の数学者や校訂者が探究を進めてきた (Heath, 1908/1956)。

引用・参考文献

- Boero, P. (Ed.) (2007). *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: analysis of some undergraduate mathematics students' performances. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol.2* (pp. 273-280). Haifa: University of Haifa.
- Fawcett, H. P. (1938). *The Nature of Proof: A Description and Evaluation of Certain Procedures Used in a Senior High School to Develop an Understanding of the Nature of Proof*. The Thirteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Teachers College, Columbia University.
- Heath, T. L. (1908/1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.3: Books X-XIII and Appendix*. (Translated from the text of Heiberg). New York: Dover Publications.
- Heinze, A., Cheng, Y-H., Ufer, S., Lin, F-L., Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40, 443-453.
- Inglis, M., Meija-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.
- Jahnke, H. N. (2007). Proofs and hypotheses. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 79-86.
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2006). 特定の課題に関する調査 (算数・数学) 調査結果 (小学校・中学校).
[http://www.nier.go.jp/kaiatsu/tokutei/index.](http://www.nier.go.jp/kaiatsu/tokutei/index.htm)

htm (2010年1月10日閲覧)

- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229-269). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- 牧野智彦 (2007). 中学生による証明の構成過程に関する研究: 証明の構成・記述のための条件の分析. 筑波数学教育研究, 26, 39-46.
- 宮崎樹夫 (2007). 学校数学における証明に関する研究: 証明の学習の諸相に着目して. 日本数学教育学会 第40回数学教育論文発表会論文集 (pp. 649-654). 千葉: 東京理科大学.
- 岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武ほか39名 (2005). 未来へひろがる数学2. 大阪: 啓林館.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 385-400.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning Vol.1 Induction and Analogy in Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.
- Polya, G. (1957/2004). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (Second Edition)*. New Jersey: Princeton University Press.
- 清水静海 (1994). 論証. 中学校数学科教育実践講座刊行会 (編), *CRECER 中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証* (pp. 204-236). 東京: ニチブン.
- Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.
- Toulmin, S. (1958/2003). *The Uses of Argument (Updated Edition)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- 辻山洋介 (2008). 学校数学における証明の構想の意義に関する一考察. 日本数学教育学会 第41回

- 数学教育論文発表会論文集 (pp. 549–554). 茨城：筑波大学.
- 辻山洋介 (2010). argumentation を視点とした学校数学における証明の構想の方法. 日本数学教育学会 第43回数学教育論文発表会論文集 第二卷 (pp. 729–734). 宮崎：宮崎大学.
- Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209–234.

Processes of Devising a Plan to Prove in School Mathematics: Focusing on Argumentation

Yosuke TSUJIYAMA

The purpose of this study is to explore the argumentative processes involved in devising a plan to prove a statement in school mathematics, in order to provide us with a wider perspective on analyzing students' proving processes. First, this study summarizes existing literature concerning proof/proving and argumentation and outlines a framework, drawing on various viewpoints, for analyzing the processes students go through in devising a plan to prove. Next, a hypothetical process of devising a plan to prove is illustrated by considering this framework and the nature of argumentation. Finally, we analyze the processes identified from the framework by comparison with findings from existing related literature.

In mathematics education literature, processes of devising a plan to prove a statement have been analyzed in terms of students' logic, i.e. deductive reasoning. In addition, some studies analyze the wider aspects of the processes by looking at students' argumentation, but do not focus on the reasoning which does not appear explicitly in a product of proof, for example, reasoning students dismiss to reach a proof. To overcome this limited analysis, this study reexamines the nature of argumentation based on Toulmin's study (1958/2003) which takes into account thoughts which are dismissed and modified within a process. By synthesizing this broader understanding of argumentation and existing related literature, this study identifies the following four steps (not necessarily sequential) involved in the processes of devising a plan to prove:

- 1) making arguments which might include a leap and/or uncertainty;
- 2) removing the leap and/or uncertainty;
- 3) clarifying conditions under which the arguments hold; and
- 4) clarifying 'backings' for the 'warrant'.

Finally, a hypothetical process is considered to illustrate the four points, and this exemplified process is used to show that steps 3) and 4) have not been sufficiently studied in the existing related literature.