2008筑波大学附属駒場論集48集

微積分初歩の指導について

ー大学と高校数学の隙間ー

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
更科　元子

微積分初歩の指導について

－大学と高校数学の隙間－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科

更科　元子

要約

数学Ⅲは現在、理科系進学希望者を中心に高校３年生で指導されている。しかし、文科系進学希望者や大学に進学しない生徒にも勉強して欲しい内容がたくさん含まれている。大学への準備や先取りではなく、数学Ⅲ未履修者の高校数学の最後という意味での微積分初歩の指導を考察してみた。

ここ数年自分の受け持った授業の中で取り上げてきた教材・内容を研究していたところ、ちょうど筑波大学のリメディアル教育のチャンスをいただいたので、内容を整理して大学初年度の学生にも講義をさせてもらった。普段できない「大学生に教える」という経験は、高校における教育実習生の指導とは全く違い大変貴重なもので、高校と大学のつながりを考える上で素晴らしい経験になった。その実践についても報告する。

キーワード：超越関数の微積分、　（自然対数の底）、リメディアル教育、高大連携

1　はじめに

現行のカリキュラムになって，数学Ⅱの中の微積分の内容は実に少なくなった。語学を学ぶときに本文や単語を減らせば簡単になるわけではないように，数学でも内容を減らすことで内容がいびつになり，全体像がわかりにくくなることがよくある。高校の数学カリキュラムにおける微積分の扱いはその代表と思われる。

また，それが主に高校２年で学習するものであれば，そこが中等教育での数学の最後という生徒も多いということになる。実際，「文系だから e （自然対数の底）は高校で習っていない」という大学生がいるわけだが，これは円周率 π と同様大変意味のある，自然界でも社会現象でも統計学でも登場する定数である。ややこしい微分計算より，むしろ指数関数や三角関数のような超越関数の微積分の意味こそ高校で全員に学んで欲しい事柄だと私は考えている。高校２年生のうけもつ度に，この点を意識して授業をし、教材を工夫してやってきた。

2　筑波大学リメディアル教育について

筑波大学の初年次教育の充実を図るため，2008 度，全学的な体制の下「高校数学Ⅲ，高校数学Ｃ」の非履修学生を主な対象としたリメディアル教育を行うことになり，筑波大学附属高校（文京区）数学科および本校数学科の教員が授業を担当した。

具体的には５月から６月にかけて，全部で５回の講座を開講し，２つ（ベクトル・行列）を附属高校，３つ（統計・微積分初歩・微積分発展）を本校で分担した。すべて土曜日の 10 時～３時で，場所は大学の普通教室を使用した。高校の教員が大学初年度の講座を担当する試みは，昨年度理科で実施されていたが，数学では筑波大学で初めての試みである。大学への学びにつながる数学を目指す我々にとって，高大連携という意味で有用な取り組みであると感じた。

3　講義と教材

3.1 概要

私は 2008 年５月 31 日の『微積分初歩』を担当した。時間配分は、５月 10 日に行われた第１回「ベクトル」のアンケート回答や授業者の感想などをふまえて、通常の 75 分×３ではなく、50 分×２＋60 分×２という形で行った。内容は次の通り。

The basics of calculus（The gap of senior high school and the university）

Ⅰ極限　　10:00～10:50（50 分）
Ⅱ微分の意味・計算の基礎　　11:00～11:50（50 分）
Ⅲ指数関数および三角関数の微分・微分の利用
12:50～13:50（60 分）
Ⅳ積分の基礎　　14:00～15:00（60 分）

大学では通常１コマ 75 分といっても、それは連続授業ではないし、受講者が大学１年生ということで、高校の授業形態に近い時間割とした。授業者の方も高校の教師なので、50～60 分ぐらいでまとめることに慣れているという事情もあった。

毎回最後の５分ほどはその時間の確認小テストとし、次の時間の始めに解説、自己採点ということで計算問題などをやってもらった。授業者が採点することも考えたが、受講人数と小テスト回数を考えると返却も難しいと考え自己採点とした。きちんとできていた様子であった。

真面目な学生が多く、中には高校の数学の教科書を持参している者もいた。また、休み時間に質問に来てくれる学生もいた。希望者受講と言うこともあるが、参加者は意欲的で、説明を大変よく聞いてくれていた。つい板書が多くなってしまったが、学生はノートをとったり、配付資料に口頭の説明をメモしたりしていた。

3.2 教材（抜粋）

教材は2007年度に本校の高校２年生の数学Ⅱの授業で取り組んだものをもとに，整理・工夫して作成した。なにしろ講義は１日しかないので、題材は厳選した。

事前に大学の方で印刷してもらった資料は各時間にとりあげる課題としてＡ４サイズ１ページにしてもらい、合計４枚となった。当日、グラフ資料や書き込み用のシートや小テストを作成して持参した。

以下、教材の抜粋を掲載する。

1 次の循環小数を分数に直せ。$0.\dot{4}\dot{2}$

2 短い辺が１の直角二等辺三角形 ABC の直角の頂点 A から斜辺に垂線 AA_1 を下ろす。A_1 から AB に垂線 A_1A_2 を下ろす。以後同様に続ける。折れ線 $AA_1+A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+\cdots$ の長さはどんな長さに近づくか。

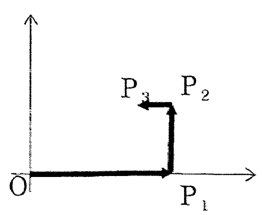
3 図のように原点Ｏからｘ軸正方向に出発し

$OP_1=1$

$P_1P_2=OP_1\times 0.5$

$P_2P_3=P_1P_2\times 0.5$

というふうに毎回距離を半分にしながら，角のたびに左折して進む。どこに近づいていくか。



4 『A：2を足す，B：正の平方根をとる』
１から出発して AB，AB，AB，…を繰り返すとどうなるか。

5 ｎが大きくなるとどうなるか

①$\dfrac{2n-1}{3n+4}$　　②$1+(-1)^n$

③$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$　　④$\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$

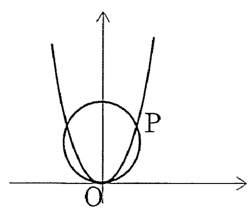
⑤$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

6 次の極限値を求めよ。

①$\displaystyle\lim_{x\to 5}x^3$　　②$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

③$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$　　④$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|(x+1)}{x}$

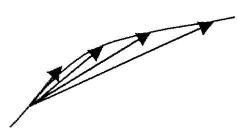
7 放物線 $y=x^2$ の上の点Ｐと原点Ｏを通り，かつｙ軸上に中心をもつ円を考える。Ｐが限りなく原点に近づくとき，円の中心はどうなるか、考察せよ。



8 関数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ とする。

（1）　グラフをかけ。

（2）　ｘの値が次のように変化するとき、平均変化率を求めよ。①１→４　　②１→３　③１→２　　④１→１＋ｈ



ｘ＝１における微分係数を求めよ。また，ｘ＝２における微分係数を求めよ。

（3） x＝aにおける微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

（4） $y=f(x)=\sqrt{x}$ について導関数 $f'(x)$ を求めよ。

$\boxed{9}$（1）$y=f(x)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ の定義をかきなさい。

（2）次の関数を定義にしたがって x で微分せよ。

①$f(x)=x^3$　②$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$\boxed{10}$次の関数を微分せよ。

①$f(x)=x^n$（n は自然数）②$f(x)=c$（c は定数）

③$f(x)=cx^n$　④$f(x)=A(x)+B(x)$

⑤$f(x)=A(x)B(x)$　⑥$f(x)=\{A(x)\}^n$

⑦$f(x)=\dfrac{1}{B(x)}$　⑧$f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$

$\boxed{11}$$x$ で微分せよ。

①$y=6x^3$　②$y=5x^2-7x+4$

③$y=(2x^4-3x)(x-4)$　④$y=(x^2+2)^3$

⑤$y=(3x^2+2x-5)^4$　⑥$y=\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

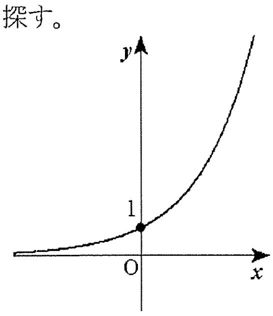
$\boxed{12}$微分しても変わらない関数を探す。

①$y=a^x$ のグラフはどのような性質があるか。

②ネイピア数 e とは何か。

③$y=e^x$　の微分

④$y=\log x$　の微分



$\boxed{13}$　x で微分せよ。①$y=3e^x$　②$y=5e^{-2x}$

③$y=x^3e^x$　④$y=x^2\log 3x$　⑤$y=a^x$

$\boxed{14}$　三角関数の微分を単位円で確認せよ。

①$(\sin x)'$　を $y=\sin x$ のグラフから考察せよ。

②$(\cos x)'$　を $y=\cos x$ グラフから考察せよ。

$\boxed{15}$$x$ で微分せよ。①$y=\tan x$　②$y=4\sin x$

②$y=x\sin x$　④$y=\sin x\cos^2 x$

$\boxed{16}$　微分を利用して問に答えよ。

①曲線 $y=e^x$　上の点（2，e^2）における接線の方程式を求めよ。

②曲線 $xy=1$（x、yは正）上の点 P における接線がx軸，y軸と交わる点をA，Bとする。△OAB の面積は一定であることを示せ。

$\boxed{17}$　次の関数の第2次導関数を求めよ。

①$y=ax^2+bx+c$　②$y=e^x$

③$y=\sin 2x$　④$y=e^{-x}\cos x$

$\boxed{18}$　増減･凹凸を調べ，グラフをかけ。

①$y=x^4-4x^3$　②$y=xe^{-x}$

$\boxed{19}$曲線 $y=f(x)$（$y\geqq 0$）と x 軸ではさまれた部分で x 座標が a から b までの図形の面積をSとする。

(1)　$S=\int_a^b f(x)dx$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

(3)　$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

２０　①図形的意味から　$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$　を求めよ。

②微積分を利用して求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)$$

２１　次の不定積分を求めよ。積分定数はＣとせよ。

（1）① $\int e^x dx$　　② $\int \frac{dx}{x}$

③ $\int \sin x dx$　　④ $\int \cos x dx$

（2）① $\int (2x^5+4x-7)dx$　　② $\int (2x-1)^3 dx$

③ $\int 5e^{2x}dx$　　④ $\int \sin 4x dx$

２２　次の定積分を求めよ。

① $\int_1^4 6x^2 dx$　　② $\int_0^2 e^{3x}dx$

③ $\int_0^{\pi} \cos x dx$　　④ $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

２３　①曲線 $y=e^x$ とｘ軸，ｙ軸，直線ｘ＝２とで囲まれた部分の面積を求めよ。

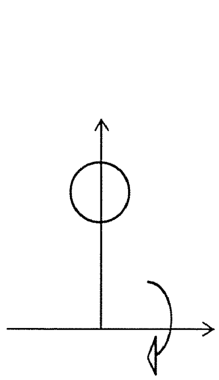
②曲線 $y=\sin x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$ と　x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

２４　①放物線 $y = x^2$ とｘ軸およびｘ＝２で囲まれた図形をｘ軸の周りに１回転してできる立体の体積Ｖを求めよ。

②$0 < a < b$ とし，

円 $x^2+(y-b)^2=a^2$

をｘ軸の周りに１回転してできるドーナツ型の体積Ｖを求めよ。



3.3　講義の実際

上の１～２４の教材に加え，指数関数や三角関数のグラフをプリントしたものを配布した。そこにグラフの傾きを記入したりしながら，説明していった。

７では円の中心は$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$に近づいていく。現行の数Ⅱでは極限も殆ど登場しないため極限の不思議を感じてもらおうと考え取り上げた。

８では微分係数の意味を確認した。

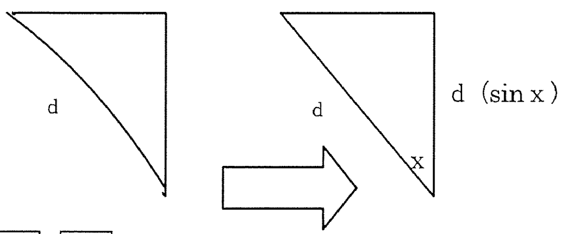
１０では数学Ⅱで扱わない積の微分，商の微分，合成関数の微分を説明した。

１２で e を紹介した。e^x は展開した形

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$ にも触れた。

１４では視覚的に三角関数の意味をとらえた。

ｙ＝sin ｘの微分はまず「ｘが少し増えると、sin ｘはどれだけ増えるか？」を考えた。



１７，１８は第２次導関数の意味と凹凸について話した。ここも数学Ⅱではとりあげないが、是非知っておいて欲しい部分である。

１９以降の積分のところは長時間の疲れもあり、受講者も辛かったようだ。ただ、定積分の意味と区分求積，体積については是非話したかった。部分積分や置換積分については取り上げられなかった。

結果的にかなりのハイスピードになってしまい，詰め込み式となってしまったという感触は否めない。

3.4　アンケートを読んで

29名の受講者にはアンケートに回答してもらった。「大変役だった」「役だった」という回答を多数もらい嬉しかったが、「後半はあまりわかりませんでした。数Ⅱをわかっている前提でと言われるとちょっと辛いです」という意見があった。

やはり１日で微積分初歩ひと通りというのは無理があると感じた。せめて，４回（４日間）あれば，Ⅰ極限，Ⅱ微分の意味・計算の基礎，Ⅲ指数関数および三角関数の微分・微分の利用，Ⅳ積分の基礎という配分で微積分の初歩の概要に触れることができると思う。

なお，受講者のうち何人かは次の微積分発展にも参加した。

4　おわりに

微積分の伝統的教材構成は極限と連続から入り，続いて微分法，積分法と進んでいくが、理論をきちんと学ぶにはそれらを時間をかけてきちんと理解していく，それが正しいルートである。また、高校の数学Ⅲでは厳密な扱いはできないまでも，指数関数・三角関数を含む基本計算はかなり分量がある。したがって，文系進学希望する高校３年生が数学Ⅲを履修し学習するには難しい現実がある。が，正確さ厳密さにこだわって指数関数三角関数のような超越関数の微積分に全く触れない現行の数学Ⅱのカリキュラムだけでは、せっかくの微積分の魅力を感じることはできない。必要になったときに微積分の基本事項を自分で学べるように概要にざっと触れて、微積分に「おもしろそうだな」「不思議だな」というイメージをもってくれれば、それは意味があるのではないかと思う。時期が高校の最後か大学の始めかはどちらでもよいだろう。今回は大学での講義のチャンスがあったが，高校の授業内、特に非理系進学希望者を対象に考えた上で，いかに取り込んでいくかを今後も検討していきたい。

【参考文献】

・　『大学生の微積分』江川博康　（東京図書 2005）
・　『大学・高専生のための微分積分Ⅰ』
糸岐宣昭・三ツ廣孝　（森北出版 2003）
・　『数学の基本ノート〔微分積分編〕』湯浅弘一
（中経出版 2004）
・　『オイラーの贈物』吉田武　（海鳴社　1993）