創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー
（３年計画の１年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
更科　元子・駒野　　誠・鈴木　清夫・須田　　学
牧下　英世・町田多加志・三井田裕樹
松嵜　昭雄（10月より鳴門教育大学　大学院学校教育研究科）
深瀬　幹雄（元筑波大学附属駒場中高等学校　数学科）

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー
（３年計画の１年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
更科　元子・駒野　　誠・鈴木　清夫
須田　　学・牧下　英世・町田多加志
三井田裕樹
松嵜　昭雄（10月より鳴門教育大学
大学院学校教育研究科）
深瀬　幹雄(元筑波大学附属駒場中高等学校
数学科)

要約

一昨年度まで指定を受けていたSSH研究『大学での学びにつながる数学』で，卒業生対象のアンケート結果から「統計」と「微分方程式」が重要であることが浮かび上がり，教材・カリキュラムを作成したが，統計や微分方程式以外の分野においても魅力的で有用な題材を開発する必要を感じた。

そこで，今年度から３年計画で，今までの研究に加え，様々な数学の分野で，生徒も教師も興味を持って取り組めるような題材をできるだけ多く開発し，中高６年間の更に充実したカリキュラム作成を目指していくことにした。

また，昨年度より新規指定を受けたSSH研究では，これまでの取り組みを継続しつつ，サイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組みもおこなっている。さらに，今年度から筑波大学で「数学」の非履修学生を主な対象としたリメディアル教育を行うことになり，筑波大学附属高校（文京区）数学科および本校数学科の教員が実施した。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1　はじめに

本校数学科では，筑波大学の数学関係者や他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の検討をおこなっている。一昨年度まで指定を受けていた第１回目の「スーパーサイエンスハイスクール(以下SSHと略)」研究の中で，卒業生対象のアンケートの分析から，大学で学ぶ数学をスムーズに理解するには，高校までにある程度，「統計」と「微分方程式」の学習が必要であるという結果を得た。そこで，「統計」では「集団に潜む特徴をつかむ」，「微分方程式」では「関数の微小な変化をとらえる」という教材開発方針のもと，指導に関連する項目を策定し，教材開発と実際に授業実践を行った。それらを本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置し，昨年までの３年計画の研究のまとめとした。

新たな３年計画の１年次にあたる本年度は，昨年度新規指定を受けた第2回目SSH事業と連動し，これまでの取り組みを継続しつつ，より広い分野での教材開発や，サイエンスコミュニケーション能力の育成を図る取り組みも引き続きおこなっている。生徒が自ら学び，そして学びあう場として，大学院生のインターンシップや，本校生徒による近隣小学校におけるワークショップを実践している。また，今年度から筑波大学１年生の中の「数学Ⅲ・C」の非履修学生を主な対象としたリメディアル教育を行うことになり，本校数学科の教員が実施した。

以下，本年度の取り組みについて紹介する。

<Project research>Creative Teaching Materials,Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

2　今年度の研究

2.1. 教材の開発

3年計画の初年次にあたる今年度は,『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発～中高6カ年から大学へ』のいうタイトルに,中高一貫校である本校の特色を活かしたいという願いをこめた。

本校に入学してくる多くの生徒は,受験勉強の影響で,答えを早く正確に出す能力を持っており,特に中学の新入生の殆どは算数に熟達している。しかし,計算・理解は速いけれども,中学以降の数学で理解が深まらない場合や,数学的思考・論理的思考になじめない場合や,一般化・公式にとらわれ思考が発展しないケースなども見受けられる。

中学の数学で文字に出会い,方程式を使えるようになると,それまでの算数的思考を節約して課題が解けてしまう。微積分や複素数などでも一歩高い手段を学び,一気に見晴らしが良くなる飛躍があるのは誰もが実感できるところだ。このような感激は実に大きい。また逆に,眺望のよい高いところでは小さい木々や花は見えない。一般性を追求すると課題に固有の意味や特殊性は見えにくくなるが,自然科学・社会現象に数学を応用するときには,より原始的な位置まで戻る場合もありうる。要するに普遍性も個別性も必要なのであって,数学の勉強は一般性･普遍性を追求しながらも,個別性･特殊性を味わうことも大切なのである。そのことは中高から大学への流れのなかで意識しておきたい。それには,適切な教材が欠かせない。当然これまで開発してきた「統計」と「微分方程式」の教材もその一例であると考えている。

そのためには昨年度までの統計・微分方程式を中心とした教材だけでなく,様々な分野において,大学での学びにつながる数学教材,魅力的で有用な題材を開発する必要がある。そこで今年度から,さまざまな場面の教材をどんどん探していくことにした。充実したカリキュラム作成のために,生徒も教師もわくわくして取り組めるような題材をできるだけたくさん取り込み,魅力的な学びを目指していく。

今年度新たに我々が研究し開発している教材は次の通りである。詳細は別掲する。(5ページ～)

- 整数 (昨年度からの継続)
- 数と方程式
- 1次変換の線形性
- 四角形の合同条件
- 四面体の幾何
- 正17角形の作図
- 無限集合の確率
- 正規分布の平均の推定
- 関数のグラフの描画法
- 曲線と面積

なお,昨年までの開発教材はタイトルのみ掲載した。詳しくは『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発―大学での学びにつながる数学教材の完成と普及―(2007)』を参照されたい。

2.2. その他のSSHの取り組み

昨年度より新規採択されたSSHの研究テーマは,「国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発－中高大院の連携を生かしたサイエンスコミュニケーション能力育成の研究－」となっている。数学科では,教材開発の他に, SSHの研究のキーワードとなっている「サイエンスコミュニケーション」の能力育成に対する取り組みとして,2008年8月28日に近隣の目黒区立駒場小学校の「サマースクール」の講座に「高校LEGO同好会」の生徒が参加し,小学生の児童に対してワークショップを開いた。これは昨年に引き続き2回目の取り組みである。講座「レゴで数学」には,10名の児童が参加し,同好会の生徒が指導にあたった。ワークショップの前に,生徒はレゴを使った絵を描く仕組み(機構)を作成し,教材作成ならびに指導案の検討をおこなった。

2.3. 大学院生インターンシップ

筑波大学大学院数理物質科学研究科(DC)の講座「数学インターンシップ」(1単位)を履修している修士課程の大学院生が,高校2年生の総合学習「ゼミナール」に参加し,生徒とともにディスカッションをおこなっている。これも昨年度に続き2回目の取り組みである。数学の研究が専門である大学院生とともに学び合いを通じて,サイエンスコミュニケーション能力育成と向上が期待される。

2.4. 筑波大学リメディアル教育

筑波大学の初年次教育の充実を図るため,今年度から全学的な体制の下「数学」の非履修学生を主な対象としたリメディアル教育を行うことになり,筑波大学附属高校(文京区)数学科および本校数学科の教員が授業を実施した。以下は受講生募集の案内の中の一文である。

「数学は,理系分野においては,あらゆる科目の基礎と

なるものです。現在はあまり必要性を感じなくとも将来必ず必要となってきます。必要と感じたときはこのような授業の履修ができないかも知れません。積極的に受講をすることを望みます。」

具体的には５月から６月にかけて，全部で５回の講座を開講し，２つ（ベクトル・行列）を附属高校，３つ（統計・微積分初歩・微積分発展）を本校で担当した。すべて土曜日の１０時～３時で，場所は大学の普通教室を使用した。高校の教員が大学初年度の講座を担当する試みは，昨年度理科で実施されていたが，数学では筑波大学で初めての試みである。大学への学びにつながる数学を目指す我々にとって，高大連携という意味で有用な取り組みであると感じた。

３　開発教材一覧

★　印は今年度開発中のもの。「代数(Algebra)」　「An. 解析(Analysis)」「G. 幾何(Geometry)」「P. 確率(Probability)」「S. 統計(Statistics)」「D. 微分方程式(Differential Equation)」「O. その他(Others)」各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。

（例）　g 1.　**四角形の合同条件**　中学１年の「幾何」
An3−2.　**曲線と面積**　高校３年の「解析」その２

a1−1.	整数　★（昨年度から継続）
a1−2.	有理数
A1	数と方程式　★
A3−1.	置換と正多面体群
A3−2.	１次変換の線形性★
an1.	2元1次方程式とその応用
An1.	2次関数
An2.	円周率の近似
g1	四角形の合同条件　★
g2.	チェバ・メネラウスの定理
g3-1.	立方体の切断
g3-2.	反転法
G1	四面体の幾何　★
G2.	正１７角形の作図　★
Pf−1.	組合せの確率モデル
Pf−2.	EBI と確率・統計
Pf−3.	無限集合の確率　★
s1.	統計の基本
s2.	近似直線
s3.	正規分布と標準化
S1.	回帰直線，相関係数
S2.	残差分析によるデータ系列の関係分析
S3−1.	主成分分析入門
S3−2.	正規分布の平均の推定　★
d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和
d2.	グラフや図形の移動・変形
d3.	錘体の体積，球の体積・表面積，放物線と面積
D1.	包絡線
D2.	グラフ描画の方法 −テクノロジーへの挑戦−
D3−1	微分方程式の応用
D３-2	関数のグラフの描画法　★
D３-3.	曲線と面積　★
Of.	４元数を高校数学へ
O2.	有限世界の数学

以下★の教材を記載する。（ただし，Pf-3 を除く）

4　今年度の開発教材

a1－1. 整数

関連分野	代数分野
高等数学	整数論
対象学年	中学１年生
関連単元	数と式
教 材 名	整数・方程式・不等式

≪文字式の活用に繋がる整数の教材≫

『文字』を活用することによって数の世界は無限に広がっていく。また，整数の性質は簡明なものから奥深いものまで多岐にわたっており，生徒にとって興味深いものがある。

整数の指導を通して，文字の有用性を認識させ，それを活用できるようにする。

a1－1.1. 素因数分解

(1) 約数，倍数

例１．１２の約数は，1,2,3,4,6,12

　　１２の倍数は，12,24,36,……

　　　　$\rightarrow 12n$　(nは自然数)

例２．２の倍数（偶数）は　$2n$　(nは自然数)

　　奇数は　$2n-1$ (nは自然数)

(2) 素数

１より大きい整数で，１とその数以外に約数を持たないものを素数という。また，１より大きい整数で素数以外のものを合成数という。

例３．（エラトステネスのふるい）100 以下の素数は 25 個

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

例 4.（エラトステネスのふるい）

６の倍数で並べなおすと，素数のふるいが平易に行うことができる。２の倍数，３の倍数，４の倍数，６の倍数が縦にすべて並ぶようになり，その列の２，３を除くすべての合成数を縦に見ると，除くことができる．

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~
~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~
67	~~68~~	~~68~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~
79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~
103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~
109	~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~
~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~
127	~~128~~	~~129~~	~~130~~	131	~~132~~
~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~
139	~~140~~	~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~
~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

例４より，すべての素数を６で割ると余りが必ず１か５になること，つまりすべての素数は６の倍数の隣に存在する．従って，６以上のすべての素数は，

$$\boxed{6m+1 \text{ または } 6m+5}$$

とあらわすことができる．

問１．100 以下の素数を求めるには，2,3,5,7 の倍数を除けばよいのはなぜか？

解）a が 100 以下の合成数とすると，$a=b\times c$ となる１より大きい整数 b,c（$b\leqq c$）がある。$b>10$ とすると，$c>10$ だから，$b\times c>100$ となり条件に反するので，$b\leqq 10$。
よって 100 以下の合成数は，10 以下の数の倍数。従って，10 以下の素数は 2,3,5,7 だから，これらの倍数を除けば，100 以下の全ての合成数が除かれる。

さて，問１と同様に，自然数 x が素数か否かに関して，$x<a\times a$ となる自然数 a を考えると，x が a より小さい素数の倍数でないなら，x は素数であることがわかる。

問２．次の数が素数か否かを調べよ。
(1) 247　　(2) 337

解）(1) $247<17^2=289$ より，13 以下の素数で割ってみると，$247=13\times 19$　よって，247 は合成数。
(2) $337<19^2=361$ より，17 以下の素数で割ってみると，いずれも割り切れないので，337 は素数。

(3)素因数分解

自然数 a の n 個の積を a^n と表す。ここの n を指数という。

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個の積}}=a^n$$

自然数を素数の積の形で表すことを素因数分解という。

例４．$12=2\times 2\times 3=2^2\times 3$
$72=2\times 2\times 2\times 3\times 3=2^3\times 3^2$

発展：約数の個数と総和）
12 の約数の個数は，$3\times 2=6$ 個
約数の総和は，$(1+2+4)(1+3)=28$
72 の約数の個数は，$4\times 3=12$ 個
約数の総和は，$(1+2+4+8)(1+3+9)=195$

問３．次の数が素数かどうか調べ，合成数については素因数分解せよ。（電卓利用可）
(1) 76　(2) 113　(3) 667　(4) 797
(5) 962　(6) 1764　(7) 1960　(8) 3463

解）(1) $76=2^2\cdot 19$
(2) 113 :（7以下の素数の倍数ではないので）素数
(3) $667=23\cdot 29$
(4) 797 :（30未満の素数の倍数ではないので）素数
(5) $962=2\cdot 13\cdot 37$
(6) $1764=4\cdot 21^2$
(7) $1960=2^3\cdot 5\cdot 7^2$
(8) 3463 :（60未満の素数の倍数ではないので）素数

発展：指数法則と 0^0）

$a>0$，m,n が自然数の時，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　(*)

$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$　が成り立つ。

また，$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n\text{ のとき})\\ 1 & (m=n\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n\text{ のとき})\end{cases}$　である。

そこで，$\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$　と定義すれば，m,n の大小に関わらず，$a^m\div a^n=a^{m-n}$　となる。
上の式で，$m=n$ のときを考えて，$a^0=1$　と定める。

さらに，m,n が自然数でないときも(*)が成り立つと考えると，たとえば，

$a^{0.5}\cdot a^{0.5}=a^{0.5+0.5}=a^1=a$　となるので，

$a^{0.5}$ は２乗すると a になる数と考えられる。

同様に，$(0.5)^{0.5}$ は２乗すると 0.5 になる数

$(0.4)^{0.4}$ は５乗すると $(0.4)^2=0.16$　になる数

$(0.2)^{0.2}$ は５乗すると 0.2 になる数

$(0.1)^{0.1}$ は１０乗すると 0.1 になる数　であり，指数計算が出来る電卓では，計算して，上の値を表示している。

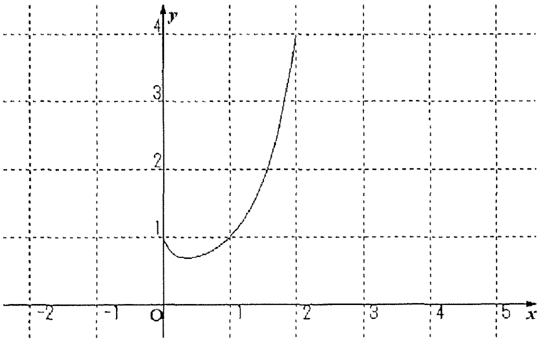
0^0 について，関数的には次の３通りの場合で，x を０に近づけたときの値から考えることが出来る。

①　0^x　　②　x^0　　③　x^x

①の立場では $0^0=0$，②の立場では $0^0=1$　である。

また③では，x がいろいろな値の時の　x^x の値を求めて，グラフをかくと次のようになるので，$0^0=1$ と考えられる。

$y=x^x$ のグラフ



(3) 公約数，公倍数

何個かの自然数について，全ての数に共通する約数を公約数，共通する倍数を公倍数という。公約数の中で最も大きい数を最大公約数，公倍数の中で最も小さい数を最小公倍数という。

２つの自然数の最大公約数が１であるとき，それらは互いに素であるという。

例５．24 の約数は，1,2,3,4,6,8,12,24

32 の約数は，1,2,4,8,16,32

24 と 32 の公約数は，1,2,4,8

24 倍数は，24,48,72,96,120,144,168,192,⋯

32 の倍数は，32,64,96,128,160,192，⋯

24 と 32 の公倍数は，96,192，⋯

問４．次の各組の数の，最大公約数Ｇと最小公倍数Ｌを求めよ。

(1) 12,18　(2) 60,72　(3) 72,108

(4) 12,30,42　(5) 45,50,105

解)

(1) $12=2^2\cdot 3, 18=2\cdot 3^2$ より

$G=2\cdot 3=6, L=2^2\cdot 3^2=36$

(2) $60=2^2\cdot 3\cdot 5, 72=2^3\cdot 3^2$ より

$G=2^2\cdot 3=12, L=2^2\cdot 3^2\cdot 5=360$

(3) $72=2^3\cdot 3^2, 108=2^2\cdot 3^3$ より

$G=2^2\cdot 3^2=36, L=2^3\cdot 3^3=216$

(4) $12=2^2\cdot 3, 30=2\cdot 3\cdot 5, 42=2\cdot 3\cdot 7$ より

$G=2\cdot 3=6, L=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420$

(5) $45=3^2\cdot 4, 50=2\cdot 5^2, 105=3\cdot 5\cdot 7$ より

$G=3\cdot 5=15, L=2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7=3150$

２つの自然数 A,B の最大公約数を G とするとき，$A=a\cdot G$，$B=b\cdot G$（a,b は互いに素)と表せる。a,b には１以外の公約数がないので，A,B の公約数は最大公約数 G の約数である。

また，A,B の最小公倍数を L とすると，$L=abG$ であり，A,B の公倍数は L の倍数である。

また，このとき　$AB=GL$　である。

問５．(ユークリッドの互除法の原理)

２つの自然数 A,B (A>B)に対して，A÷Ｂの余りをＣとする。

A,B の最大公約数と，B,C の最大公約数が等しいことを示せ。

証明) A÷Ｂの商をＱとすると，

A=B×Q＋C　・・・①

①より，B,C の公約数は，A の約数でもあるので，A,B の公約数である。

また，①より，C=A－B×Q　・・・②

②より，A,B の公約数は，Ｃの約数でもあるので，B,C の公約数である。

したがって，A,B の公約数と B,C の公約数は全て一致し，最大公約数も等しい。

問６．次の２数の最大公約数を求めよ。

11137,11063

解) 11137÷11063 の余りは 74

11063÷74 の余りは 37

$74=37\cdot 2$

したがって，２数の最大公約数は 37

a1-1.2. 整数の剰余

いろいろな整数について,

「A÷Bの商をQ , 余りをRとすると,
A=B×Q+R と表せる。ただし0≦R<B」

と考えて, 様々な問題を考える.

問1. ある数の2乗を3で割った余りは0か1であることを示せ。

解)

ある数をMとする。すべての整数を3で割った時の余りは, 0か1か2のいずれかであるので

$$M = 3k, 3k+1, 3k+2$$

と表すことができる。従って,

$$M^2 = (3k)^2, (3k+1)^2, (3k+2)^2$$
$$= 9k^2, 9k^2+6k+1, 9k^2+12k+4,$$
$$= 3\times 3k^2, 3\times(3k^2+2k)+1, 3(3k^2+4k+1)+1$$

となり, 余りは必ず0または1となる ■

このような考え方は, 大学での数学にも繋がり, さらに合同式や, 不定方程式の解法などにも応用が可能である。そこで, 生徒からいろいろな解法が出た次の問題を紹介する。

問2. (百五減算)

3で割ると2余り, 5で割ると3余り, 7で割ると4余るような正の整数を求めよ。

解1) 3と5の公倍数の中で, 7で割ると4余る数をP, 3と7の公倍数の中で, 5で割ると3余る数をQ, 5と7の公倍数のなかで, 3で割ると2余る数をRとしたとき, P+Q+Rは題意を満たしている。

(7で割った余りは, Pを7割った余りになり, 5で割った余りは, Qを5で割った余り, 3で割った余りは, Rを3で割った余りとなる。)

まず, 3と5の公倍数を並べる。

15, 30, 45, 60, ・・・

この中で, 7で割ると, 4余る数を考えると, 60が最小の数とわかる。

すなわち, 60=8×7+4・・・①

次に3と7の公倍数の公倍数を並べる。

21, 42, 63, 84, ・・・

この中で, 5で割ると3余る数を考えると, 63が最小の数とわかる。

すなわち, 63=5×12+3・・・②

同様に, 5と7の公倍数の中で, 3で割ると2余る数を考えると, 35が最小の数であるとわかる。

すなわち, 35=3×11+2・・・③

ここで, ①+②+③を考えると,

60+63+35=(8×7+4)+(5×12+3)+(3×11+2)
⇔158=60+63+35

これは, 題意を満たす整数となる。

ここから, 3と5と7の最小公倍数105を引いた数である, 53も, やはり題意を満たすので, 求める整数は,

$$105\mathrm{n}+53 \cdots(答)$$

となる。

解2) **法則性を考えた解答**

5で割ると3余る数は,

8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58…

と1の位に着目すると必ず, 3または8となる。

そして, 7で割ると4余る数で, 1の位が3または8となるような数を考えると,

11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 60…

と並べれば,

18, 53, 88,

とわかる。

18は, 3の倍数となり, 題意を満たさない。

53は3で割ると2余る数なので, 題意を満たす。

ここから3と5と7の最小公倍数105を足していけば, その数は必ず題意を満たす。

従って, 求める整数は,

$$105\mathrm{n}+53 \cdots(答)$$

である。

解3) **生徒から出た文字式を用いた解答**

求める数を, Mとする。

条件より,

$$M = 7a+4$$
$$M = 5b+3$$
$$M = 3c+2$$

それぞれ, 辺々を2倍すると,

$$2M = 14a + 8 = 7(2a+1)+1$$
$$2M = 10b + 6 = 5(2b+1)+1$$
$$2M = 6c + 4 = 3(2c+1)+1$$
となり，辺々から１を引くと，
$$2M - 1 = 7(2a+1)$$
$$2M - 1 = 5(2b+1)$$
$$2M - 1 = 3(2c+1)$$
より，$2M-1$ は，３と５と７の公倍数となる。
従って
$$2M - 1 = 3\cdot 5\cdot 7k \quad \cdot\cdot\cdot ①$$
と書ける。
ここで，左辺が奇数なので，k は奇数。
ゆえに，
$$k = 2n+1$$
と置けるので，①に代入して，
$$\begin{aligned} 2M-1 &= 3\cdot 5\cdot 7(2n+1) \\ &= 105\cdot 2n + 105 \\ \Leftrightarrow 2M &= 105\cdot 2n + 106 \\ M &= 105n + 53 \ \ldots(\text{答}) \end{aligned}$$

上記の整数の剰余についての議論は，簡単に剰余類の合同式に置き換えることができる。

合同式の定義
ある数 a を c で割った余りと，b を c で割った余りが等しいとき，
$$a \equiv b \pmod{c}$$
と表す。

＜解３で，合同式に書き換えた解答＞
求める数を M とする.
$$\begin{cases} M \equiv 2 \pmod 3 \\ M \equiv 3 \pmod 5 \\ M \equiv 4 \pmod 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2M \equiv 1 \pmod{105}$$
$$\Leftrightarrow 2M \equiv 106 \pmod{105}$$
$$\Leftrightarrow M \equiv 53 \pmod{105}$$
従って，M は 105 で割ると 53 余る数となるので，
$M = 105n + 53 \ldots(\text{答})$
となる。

この解法の場合，合同式の両辺を２で割ることになるが，合同式の両辺をある数で割ることを考えるときは，
「法と割る数が互いに素である」
ことに留意して割らなければならない。

誤りの例

$3x \equiv 36 \pmod 6$ ・・・①

$\Rightarrow x \equiv 12 \pmod 6$・・・②

と両辺を３で割るような変形であるが，$x = 20$ を①に代入すると成立するが，②に代入すると成立しない。(ただし② ⇒ ① の逆は成り立つ)

a1-1.3. 倍数判定法

自然数が２の倍数かどうかは，１の位の数が偶数か奇数かで決まり，５，４，８の倍数かどうかも，この順に平易である。このことを確認した後，様々な数の倍数判定法を考えさせるとともに，それらを発表させ，文字の活用をはかる。

文字計算の基本（簡単な加法，減法，乗法）を指導した後，上記を確認し，次の例題を扱う。

例題１．自然数が３の倍数かどうかは，各位の数の和が３の倍数か否かで判定できる。このことを証明せよ。
（証明は生徒の実状に合わせて行うが，以下は４桁の
場合で示す。）

証明）もとの数が４桁の場合で示す。
もとの数 x の各位の数を，一の位から順に a,b,c,d とすると，
$$\begin{aligned} x &= a + 10b + 100c + 1000d \\ &= (a+b+c+d) + (9b + 99c + 999d) \end{aligned}$$
上の式で，$9b + 99c + 999d$ は３の倍数であるから，x が３の倍数かどうかは各位の数の和 $a+b+c+d$ が３の倍数か否かで決まる。
もとの数が５桁以上の場合も同様に示すことが出来る。

証明）**生徒が考えた合同式による証明**
$$x \equiv a + 10b + 100c + 1000d \pmod 3$$
$$\Leftrightarrow x \equiv a + b + c + d \pmod 3$$
従って，題意は示された。

合同式の性質，すなわち３の倍数を引くことは，剰

余の値に影響がない為，9の倍数の判定でも同様の証明が可能である。

続いて，自然数が８，６の倍数かどうかの判定法を作り，その理由をそれぞれ説明させたのち，７及び１１以上の数についての判定法を考えさせ，発表させる。

以下は，生徒が考えた判定法を纏めたものである。すべて，合同式による証明が平易に行われる．

なお，もとの自然数はxであり，

$\underline{\underline{x=a+10b+100c+1000d+\cdots}}$

は，xの各位の数が，一の位から順に　$a,b,c,d,\cdots$であることを表し，

また，$\underline{\underline{x=a+10p}}$　は，xの１桁目（一の位）の数がa，２桁目以降の数全体でできる数がp（即ち，$p=\dfrac{x-a}{10}$），$\underline{\underline{x=p+100q}}$は，$x$の下２桁の数が$p$，３桁目以降の数全体でできる数が$q$（即ち，$q=\dfrac{x-p}{100}$），であることを表しているものとし，他も同様とする。

判定法：以下の$\boxed{}$が割り切れるか否かで，
xが割り切れるか否かが判定できる。

＜７の倍数判定法＞

７－①：$x=p+1000q$のとき，$\boxed{p-q}$

（注：この判定法は１１及び，１３にも使える。
また，これを繰り返し用いると，
$x=p+10^3q+10^6r+10^9s+10^{12}t+\cdots$
のとき，$\boxed{p-q+r-s+t-\cdots}$　を得る。
以下，繰り返し用いた場合については，省略する。）

７－①’：$x=a+10b+10^2c+10^3q$　のとき，
$\boxed{a+3b+2c-q}$

７－②：$x=p+100q$　のとき，$\boxed{p+2q}$

７－③：$x=a+10p$　のとき，$\boxed{-2a+p}$

７－④：$x=p+10^6q$のとき，$\boxed{p+q}$
さらに，$p+q=u+10^2v+10^4w$
として，$\boxed{(10v+u)-(10w+v)}$

＜１１の倍数判定法＞

１１－①：$x=a+10p$　のとき，$\boxed{a-p}$

１１－②：$x=p+100q$のとき，$\boxed{p+q}$

＜１３の倍数判定法＞

１３－①：$x=a+10p$　のとき，$\boxed{4a+p}$

１３－②：$x=p+100q$のとき，$\boxed{p+9q}$

＜１７の倍数判定法＞

１７－①：　$x=p+100q$　のとき，$\boxed{p-2q}$

１７－①’：　$x=a+10b+100q$のとき，
$\boxed{a-7b-2q}$

１７－②：$x=a+10p$のとき，$\boxed{-5a+p}$

１７－②：
$x=a+10p+100q+1000r+10000s+\cdots$　のとき，$\boxed{a-2p+4r-8r+16s-\cdots}$
（各項の係数に注目）

＜１９の倍数判定法＞

１９－①：　$x=p+100q$のとき，$\boxed{p+5q}$

１９－②：
$x=p+100q+100^2r+100^3s+100^4t+\cdots$
のとき，$\boxed{p+5q+6r+11s+17t+\cdots}$
（各項の係数に注目）

１９－③：　$x=p+20q$　のとき，$\boxed{p+q}$
（繰り返すと，÷20 を商について繰り返し行ったときの，余りの和となる）

＜２３の倍数判定法＞

２３－①：　$x=p+100q$　のとき，$\boxed{p+8q}$

＜２７の倍数判定法＞

２７－①：　$x=p+1000q$のとき，$\boxed{p+q}$

＜２９の倍数判定法＞

２９－①：　$x=p+10000q$　のとき，$\boxed{p-5q}$

２９－②：　$x=p+30q$のとき，$\boxed{p+q}$
（繰り返すと，÷30 を商について繰り返し行ったときの，余りの和となる）

＜３７の倍数判定法＞

３７－①：　$x=p+1000q$　のとき，$\boxed{p+q}$

＜４７の倍数判定法＞

４７－①：　$x = p + 100q$　のとき，$\boxed{p + 6q}$

＜４９の倍数判定法＞

４９－①：　$x = p + 100q$　のとき，$\boxed{p + 2q}$

＜９７の倍数判定法＞

９７－①：　$x = p + 100q$　のとき，$\boxed{p + 3q}$

＜１０１の倍数判定法＞

１０１－①：　$x = p + 100q$　のとき，$\boxed{p - q}$

a1-1.4. 不定方程式

未知変数が２つの不定方程式も，整数を当てはめて考えることで，解の法則性をつかむことができる。そして，合同式を用いていろいろな不定方程式を解くことを試みる。単純な方程式も，ここまでの議論のように，倍数および，剰余について着目させて指導をしていく。

例１．　３で割ると２余り，５で割ると，３余るような，ある自然数を15で割ったときの余りを求めよ。

解1）ある自然数を x とする。このとき，

$x = 3k + 2$

$x = 5l + 3$

より，両辺それぞれ５倍，３倍すると，

$5x = 15k + 10$

$3x = 15l + 9$

辺々差をとると，

$2x = 15(k - l) + 1$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 15(k - l)$

左辺が奇数なので，$k - l = 2n + 1$

と置けるから，

$2x - 1 = 15(2n + 1)$

$\Leftrightarrow 2x = 30n + 16$

$\Leftrightarrow x = 15n + 8$

従って，15で割った余りは，８…(答)

解２）**合同式を用いた解答**

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x \equiv 10 \pmod{15} \cdots ① \\ 3x \equiv 9 \pmod{15} \cdots ② \end{cases}$$

①－②より，

$2x \equiv 1 \pmod{15} \cdots ③$

②－③より，

$x \equiv 8 \pmod{15}$

従って，15で割った余りは８…(答)

解３）**合同式を用いた解答(生徒から多く出た解答)**

ある自然数を x とする。このとき，

$x = 3k + 2 = 5l + 3$

$\Leftrightarrow 3k = 5l + 1$

$\Leftrightarrow 5l + 1 \equiv 0 \pmod 3$

$\Leftrightarrow 5l - 5 \equiv 0 \pmod 3$

$\Leftrightarrow l \equiv 1 \pmod 3$ (∵ 3と5は互いに素)

従って $l = 3n + 1$　であるから，

$x = 5(3n + 1) + 3 = 15n + 8$

よって，15で割った余りは８…(答)

例２．　x, y を整数とするとき，方程式

$3x + 5y = 1 \cdots ①$

を解け。

解１）　$x = 2, y = -1$ という解が見つかるので，

①から $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$　を両辺から引くと，

$3(x - 2) + 5(y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x - 2) = 5(1 - y)$

より，$x - 2$　は５の倍数。

従って，$x - 2 = 5k$ とかけるので，

$x = 5k + 2$

これを①に代入すると，

$y = 1 - 3k$

以上より，$(x, y) = (5k + 2, 1 - 3k) \cdots$ (答)

解2）**合同式を用いた解答**

$$3x+5y=1 \cdots ①$$

より，

$3x+5y \equiv 1 \pmod 5$

$\Leftrightarrow 3x \equiv 1 \pmod 5 \cdots ②$

ここで，$5x \equiv 0 \pmod 5 \cdots ③$

より，②−③から，

$-2x \equiv 1 \pmod 5 \cdots ④$

②＋④より，

$x \equiv 2 \pmod 5$

従って，$x=5k+2$

これを①に代入すると，

$y=1-3k$

以上より，$(x,y)=(5k+2,1-3k) \cdots$（答）

この解法は，「ひとつの式を変形する」ことに慣れている生徒にとってはなかなか浮かばない解法のようだった。ただし，合同式のルールを考えれば，この解法のほうが平易であることは間違いないだろう。

解3）**合同式を用いた解答（生徒から多く出た解答）**

①$\Leftrightarrow 5y=1-3x$ より，

$1-3x \equiv 0 \pmod 5$

$\Leftrightarrow 1 \equiv 3x \pmod 5$

$\Leftrightarrow 6 \equiv 3x \pmod 5$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 5$（$\because$ 3と5は互いに素）

$\therefore x=5k+2$ となり，①より $y=1-3k$

以上より，$(x,y)=(5k+2,1-3k) \cdots$（答）

生徒の合同式を使った解法を見てみると，解3において，

$6 \equiv 3x \pmod 5$
$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 5$　（$\because$ 3と5は互いに素）

と変形するところで，

$6 \equiv 3x \pmod 5$

$\Leftrightarrow 3x-6 \equiv 0 \pmod 5$

$\Leftrightarrow 3(x-2) \equiv 0 \pmod 5$

と変形し，3と5が互いに素なので，

$(x-2)$ が5の倍数であることから，

$x-2 \equiv 0 \pmod 5$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 5$

と考える生徒が非常に多いのが印象的であった。やはり，慣れていないせいなのか，複数の文字式を見る力がまだ養われていないと言える。

合同式を使うと，このような不定方程式において，どんな大きな数にも対応することができる。

問1．x, y を整数とするとき，方程式

$$37x+43y=75 \cdots ①$$

を解け

解1）**合同式を用いた解答**

①$\Leftrightarrow 37x+43y \equiv 1 \pmod{37}$

$\Leftrightarrow 6y \equiv 1 \pmod{37}$

$\Leftrightarrow 36y \equiv 6 \pmod{37} \cdots ②$

ここで，

$37y \equiv 0 \pmod{37} \cdots ③$

より，③−②から，

$y \equiv -6 \pmod{37} \cdots ③$

$\therefore y=37k-6$ となり，①より

$37x=333-43 \cdot 37k$

$\Leftrightarrow x=9-43k$

以上より，$(x,y)=(9-43k,37k-6) \cdots$（答）

解2）**合同式を用いた解答（生徒から多く出た解答）**

①$\Leftrightarrow 37x=75-43y$ より，

$75-43y \equiv 0 \pmod{37}$

$\Leftrightarrow 75 \equiv 43y \pmod{37}$

$\Leftrightarrow 1 \equiv 6y \pmod{37}$

$\Leftrightarrow -36 \equiv 6y \pmod{37}$

$\Leftrightarrow -6 \equiv y \pmod{37}$（$\because$ 6と37は互いに素）

$\therefore y=37k-6$ となり，①より

$37x=333-43 \cdot 37k$

$\Leftrightarrow x=9-43k$

以上より，$(x,y)=(9-43k,37k-6) \cdots$（答）

A1-1. 数と方程式

関連分野：代数 高等数学：解析幾何，複素関数論 対象学年：高校１年生 関連単元：数と式，方程式 教 材 名：複素数，３次方程式

≪数の拡張と方程式の解≫

方程式の解を求めて数は拡張されてきたともいえる。3 次方程式を解くために数を複素数に拡張し，方程式の解を求めることに関しては複素数で完結することを知らせる。(『代数学の基本定理』複素数の範囲で n 次方程式は n 個の解を持つ)

また複素数の演算に関連して，複素数平面でのその性質を確認すると共に，特に積の回転拡大を活用できるようにする。

３次方程式を解くことを目標に，複素数など必要なものを学習していく。ここで示したい教材は，複素数の積の回転拡大と３次方程式の解法であるが，扱う教材の流れといくつかの問題をあわせて記述する。

A1-1.1. 複素数

(1) 実数

有理数（有限小数＆循環小数），無理数（循環しない無限小数），平方根の計算などを通常通り扱う。
（詳細は省略）

(2) 実数から複素数へ

$ax^2+bx+c=0$（a,b,c は定数で, $a\neq 0$）の解は,

判別式 $D=b^2-4ac \geqq 0$ のとき,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$D<0$ のとき，実数解はない。

次に,3 次方程式の実数解について考えよう。
例えば, $x^3-3x+1=0$ …①について,
① の左辺を $f(x)$ とすると, $f(-10)<0,\ f(10)>0$ であり， $y=f(x)$ のグラフは連続なので，①は実数解を少なくとも 1 つ持つ。
ここで,

$$x^3+a^3+b^3-3abx$$
$$=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$

であることから， $a^3+b^3=1,\ ab=1$ …②となる

a,b を考えると，①は,

$$(x+a+b)\left\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\right\}=0$$

と因数分解でき，実数解 $x=-(a+b)$ を得る。

従って，②を満たす a,b を求めればよい。

②より， $a^3+b^3=1,\ a^3b^3=1$ …③

a^3, b^3 を解に持つ方程式は,

$$(y-a^3)(y-b^3)=0$$
$$y^2-(a^3+b^3)y+a^3b^3=0$$

すなわち， $y^2-y+1=0$ …④

④は, 判別式 $D=-3<0$ より, 実数解を持たない。
しかし，３次方程式①は実数解を持つ！

そこで，④のような２次方程式も解を持つように,数の範囲を拡張する。

【虚数単位 i 】

$x^2=-1$ を満たす数を１つ考え，それを i で表し，虚数単位という。従って， $i^2=-1$ である。

【虚数単位 i を含む数の演算】

虚数単位 i は数であり, i を含む数の計算は通常どおり行えるものとする。

例１.

$3i-i=2i$

$2i\times 2i=4i^2=-4$

$(1+i)+(3+i)=4+2i$

$(1+i)(3+i)=3+4i+i^2=2+4i$

$$\frac{1+i}{3+i}=\frac{(1+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3+2i-i^2}{9-i^2}=\frac{4+2i}{10}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

i と実数の加減乗除で出来る数は, 全て， $a+bi$（a,b は実数）の形で表すことができる。

【複素数】

$a+bi$ （a,b は実数）の形で表される数を複素数といい，a をこの複素数の実部，b を虚部という。

また，複素数 $a+bi$ で，$b=0$ のときは実数であるが，$b \neq 0$ のとき虚数という。

また特に，$a=0, b\neq 0$ のとき，純虚数　という。

【共役な複素数】

複素数 $z=a+bi$ に対して，$a-bi$ を，z と共役な複素数といい，$\overline{z}$ で表す。

例２．共役な複素数の和,積は実数である。

$z+\overline{z}=a+bi+a-bi=2a$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

問１．$z=p+qi$，$w=r+si$ （p,q,r,s は実数）とする。

(1) 次の式が成り立つことを示せ。

$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$，　$\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(2) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ （a,b,c,d は実数）とする。複素数 α について，$f(\alpha)=0$ 　ならば $f(\overline{\alpha})=0$ 　であることを示せ。

（証明略）

$i^2=-1$，$(-i)^2=i^2=-1$ 　であり，$x^2=-1$ の解は，$x=\pm i$ 　である。

一般に，$x^2=-a$ （ただし，$a>0$）の解は，$x=\pm\sqrt{a}\,i$ 　である。

【負の数の平方根】

$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ 　とする。

特に，$\sqrt{-1}=i$ 　である。

例３．

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ （a,b,c は実数，$a\neq 0$）において，判別式 $D=b^2-4ac<0$ のときの解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-b^2+4ac}\,i}{2a}$$

問２．次の２次方程式を解け。

(1) $x^2=i$ 　　(2) $x^2=-1+\sqrt{3}\,i$

(3) $x^2+(-1+3i)x-8+i=0$

解）

(1) $x=a+bi$ （a,b は実数）とすると，与式より，

$(a+bi)^2=i$，$a^2-b^2+2abi=i$

a,b は実数だから，$a^2-b^2=0, 2ab=1$

２式より，$a=b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 　よって，$x=\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

(2) (1) と同様に，$x=a+bi$ （a,b は実数）とすると，

与式より，$a^2-b^2+2abi=-1+\sqrt{3}\,i$

a,b は実数だから，$a^2-b^2=-1$, $2ab=\sqrt{3}$

２式より b を消去して，

$a^2-\dfrac{3}{4a^2}=-1$, $a^4+4a^2-3=0$

$(2a^2-1)(2a^2+3)=0$

$a^2\geqq 0$ であるから，$a^2=\dfrac{1}{2}$

よって，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ （複号同順）

従って，$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}$

(3) $t^2=p+qi$ （p,q は実数）の解の１つを $\sqrt{p+qi}$ で表すことにして，２次方程式の解の公式を利用する。

与式より，

$b^2-4ac=(-1+3i)^2-4(-8+i)=24-10i$ 　であるから，$x=\dfrac{(1-3i)\pm\sqrt{24-10i}}{2}$

ここで，$(a+bi)^2=24-10i$ とすると，

$a^2-b^2=24$, $2ab=-10$

２式より b を消去して，

$a^2-\dfrac{25}{a^2}=24$, $a^4-24a^2-25=0$

$(a^2-25)(a^2+1)=0$

$a^2\geqq 0$ であるから，$a^2=25$, $a=\pm 5$

よって，$a+bi=\pm(5-i)$

従って，$x=\dfrac{(1-3i)\pm(5-i)}{2}=3-2i,-2-i$

係数が虚数の２次方程式も，複素数の範囲で，２つの解を持つ。

(3) 複素数平面

次のものは，それぞれ，１対１に対応し，同一視することができる。

①複素数 $z=a+bi$ （a,b は実数）

②座標平面上の点Ｐ (a,b)

③座標平面で，原点Ｏから点 $\mathrm{P}(a,b)$ までの矢印 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

【複素数平面】

座標平面で，点Ｐ (a,b) に複素数 $z=a+bi$ を対応させたものを，複素数平面といい，その x 軸と y 軸を，それぞれ，実軸と虚軸ともいう。

またＰ (a,b) を，Ｐ $(a+bi)$，Ｐ (z)，点 z などと表すことがある。

例４． 複素数平面で，共役な複素数 z，$\overline{z}$ が表す点は，実軸について対称である。

問３． α,β を複素数，p を実数する。次の値又は点を表す複素数を，$\alpha,\overline{\alpha},\beta,\overline{\beta},p$ の式で表せ。

(1) α の実部及び虚部

(2) α と直線 $x=p$ について対称な点

(3) α と直線 $y=p$ について対称な点

(4) 線分 $\alpha\beta$ の中点

(5) $\triangle O\alpha\beta$ の重心

解)

(1) 実部 $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$，虚部 $\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i}$

(2) $-\overline{\alpha}+2p$　　(3) $\overline{\alpha}+2pi$

(4) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　　(5) $\dfrac{\alpha+\beta}{3}$

【複素数の絶対値】

複素数 $z=a+bi$ （a,b は実数）に対応する点を $\mathrm{P}(z)$

とするとき，点Ｐと原点Ｏとの距離を，z の絶対値といい，$|z|$ とかく。

$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$　である。

また，$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ であるから，

$|z|^2=z\cdot\overline{z}$　である。

問４． $z=p+qi$，$w=r+si$ （p,q,r,s は実数）とするとき，$|zw|=|z|\cdot|w|$　であることを示せ。

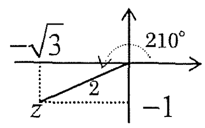
（証明略）

【複素数の偏角】

複素数 $z=a+bi$ （a,b は実数）に対応する点を $\mathrm{P}(z)$ とするとき，実軸の正の部分と線分 OP の作る角を，z　の偏角といい，$\arg(z)$ とかく。

ただし角は，実軸の正の部分を基準に，反時計回りの向きを正として表すものとする。

例５． $z=-\sqrt{3}-i$　のとき，



$|z|=2$

$\arg(z)=210^\circ$

注：偏角について，回転の向きや１回転以上の角を考えると，表し方は１通りではない。すなわち，

$\arg(z)=210^\circ,570^\circ,\cdots,-150^\circ,-510^\circ\cdots$

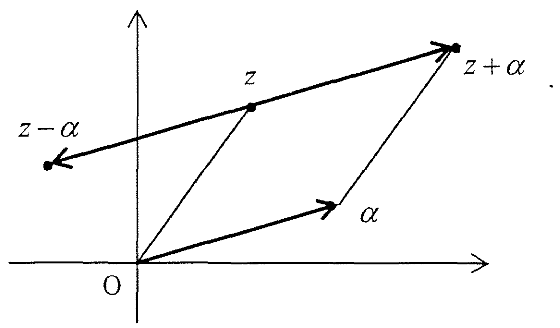
一般に，$\arg(z)=210^\circ+360^\circ\times n$ （n は整数）

である。

【和の性質】

複素数 α に対応する点を α とする。

α を加えると，複素数平面上で，矢印 $\overrightarrow{\mathrm{O}\alpha}$ だけ平行移動し，α を引くと矢印 $\overrightarrow{\alpha\mathrm{O}}$ だけ平行移動する。



問５． $z=2+2i$，$w=-1+3i$　とする。

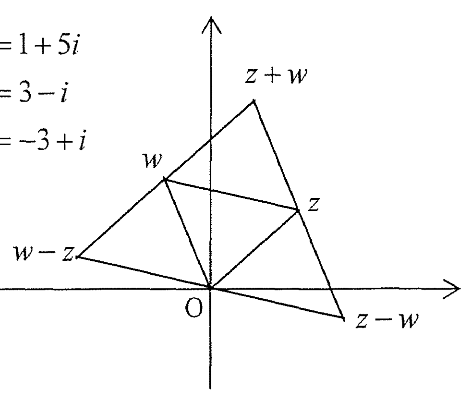
３点 O，z，w を頂点とする平行四辺形の，残りの頂点を表す複素数を求めよ。

解)

$z+w=1+5i$

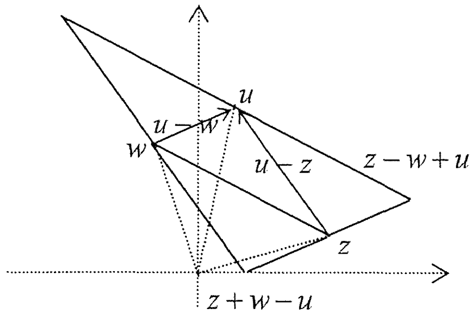
$z-w=3-i$

$w-z=-3+i$



問6． $z=3+i$，$w=-1+3i$，$u=1+4i$ とする。
３点 z，w，u を頂点とする平行四辺形の，
残りの頂点を表す複素数を求めよ

解）



$-z+w+u=-3+6i$

$z-w+u=5+2i$

$z+w-u=1$

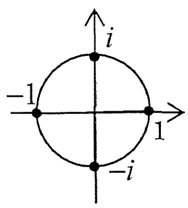
【積の性質Ⅰ】
虚数単位 i をかけると，複素数平面上で，原点を中心に 90° 回転する。
（証明略）

例6．

$i^2=-1$

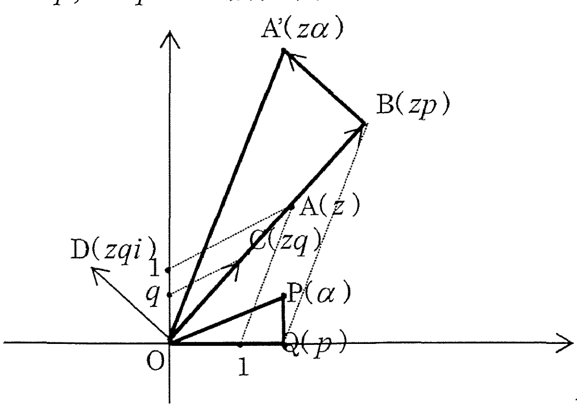
$i^3=-i$

$i^4=1$



【積の性質Ⅱ】
複素数 α をかけると，複素数平面上で，原点を中心に，$|\alpha|$ 倍に拡大し，$\arg(\alpha)$ だけ回転する。
（証明）
$\alpha=p+qi$（p,q は実数）とし，複素数平面上で，原点を O，また，P(α),Q(p),A(z),A'($z\alpha$)とする。

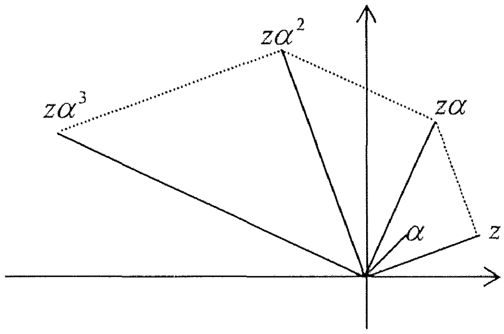
$1<p, 0<q<1$ の場合の図



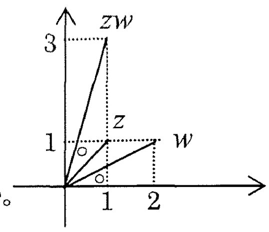
$z\alpha=zp+zqi\cdots$①であり，B(zp),C(zq)とすると，B,C は直線 OA 上にある。
また D(zqi)とすると，積の性質Ⅰより，OD は，OC を原点を中心に 90° 回転したものであり，
①より，BA'=OD=OC, BA'⊥OB
従って，△OPQ∽△O A'B　より，∠QOP=∠BOA'
また，$|\mathrm{OA'}|=|z\alpha|=|z||\alpha|=\mathrm{OA}\times|\alpha|$
よって示された。

例7． $z=3+i, \alpha=1+i$　　のとき，

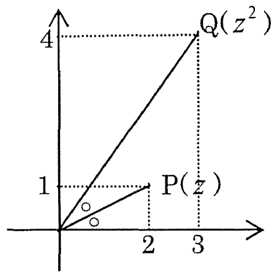
$$z\alpha=2+4i, z\alpha^2=-2+6i, z\alpha^3=-8+4i$$



例8．
$z=1+i$
$w=2+i$
のとき，
$zw=1+3i$ より，
右図の角は等しい。



例9．
$z=2+i$
のとき，
$z^2=3+4i$ より，
右図の角は等しく，
$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OQ}$

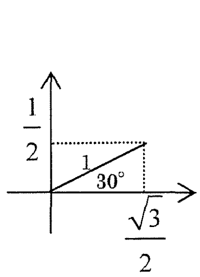


例10．
点$(4,2)$を，
原点を中心に
30° 回転した点は，

$$(4+2i)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$=(-1+2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i$
より，
$\left(-1+2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$

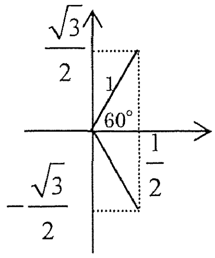
1



問7．座標平面上で，原点O，点$A(4,2)$とする。
$\triangle OAB$が正三角形となるような点Bを求めよ。

解)

$A(4,2)$を，
原点を中心に
$\pm 60°$ 回転した点は，



$(4+2i)\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=(2\mp\sqrt{3})+(1\pm 2\sqrt{3})i$

より，

$B\left(2\mp\sqrt{3}, 1\pm 2\sqrt{3}\right)$ （複号同順）

問8．座標平面上に点$A(4,2)$，$B(2,6)$及びCがある。$\triangle ABC$が正三角形のとき，Cの座標を求めよ。

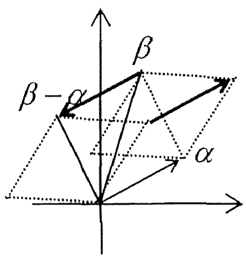
解)

$A(\alpha)$，$B(\beta)$とすると，

$\alpha=4+2i$

$\beta=2+6i$

Cを表す複素数は，



$(\beta-\alpha)\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\alpha$

$(-2+4i)\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4+2i$

$=(3\mp 2\sqrt{3})+(4\pm\sqrt{3})i$

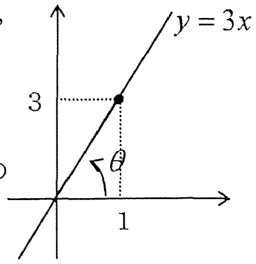
よって

$C\left(3\mp 2\sqrt{3},\ 4\pm\sqrt{3}\right)$ （複号同順）

問9．点$P(4,1)$と，直線$y=3x$について対称な点Qの座標を求めよ

解)

$y=3x$上の点$(1,3)$について，



$|1+3i|=\sqrt{10}$ であるから，

$y=3x$とx軸の正の部分との作る角をθとすると，

$\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}(3+i)$ をかけると原点を中心にθ回転し，

$\overline{\alpha}$ をかけると$-\theta$回転する。

$y=3x$を原点を中心に$-\theta$回転すると実軸に重なり，

共役な複素数は実軸について対称であるから，

$p=4+i$，$Q(q)$とすると，

$q=\overline{p\cdot\overline{\alpha}}\cdot\alpha$

$=\overline{p}\cdot\alpha^2$

$=(4-i)\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1+3i)\right\}^2$

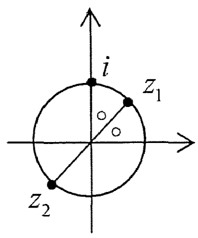
$=(4-i)\cdot\frac{1}{10}(-8+6i)$

$=\frac{1}{5}(-13+16i)$

よって，$Q(-\frac{13}{5},\frac{16}{5})$

例11.

$z^2=i$を満たすzは，
右図のz_1, z_2で，



$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$z_2=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

問10．次の方程式を解け。

(1) $z^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (2) $z^3=-i$ (3) $z^2=1+\sqrt{3}i$

(4) $z^4=-2+2\sqrt{3}i$ (5) $z^2=2+\sqrt{5}i$

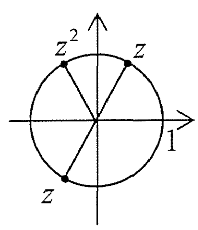
解)

(1) $|z^2|=|z|^2=1$より

$|z|=1$

$\arg(z^2)=120°$ より

$\arg(z)=60°, 240°$



よって，$z=\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

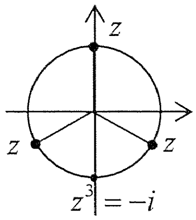
(2) $|z^3|=|z|^3=1$ より

$|z|=1$

$\arg(z^3)=270°$ より

$\arg(z)=90°, 210°, 330°$

よって，$z=i, \dfrac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$



(3) $|z^2|=|z|^2=2$ より

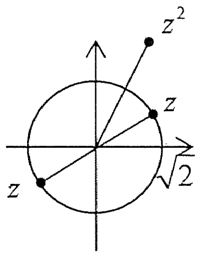
$|z|=\sqrt{2}$

$\arg(z^2)=60°$ より

$\arg(z)=30°, 210°$

よって，

$$z=\sqrt{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2}$$



(4) $|z^4|=|z|^4=4$ より $|z|=\sqrt{2}$

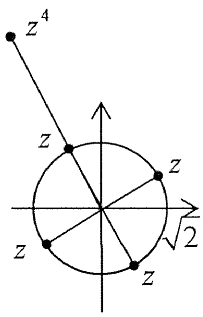
$\arg(z^4)=120°$ より

$\arg(z)=30°, 120°, 210°, 300°$

よって，

$$z=\sqrt{2}\times\left(\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right),$$

$$\sqrt{2}\times\left(\pm\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2}, \pm\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}$$



(5) $|z^2|=|z|^2=3$ より $|z|=\sqrt{3}$

また角の２等分線の性質より

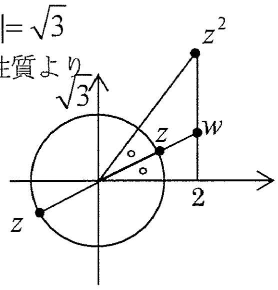
図の w について，

$$w=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}i$$

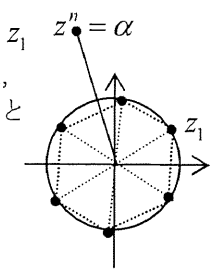
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+i\right)$$

よって，

$$z=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{5}+i\right)=\pm\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\,i}{2}$$



注：$z^n=\alpha \cdots$①の１つの解を z_1 とするとき，①の n 個の解は，複素数平面上で，原点を中心とする半径 $|z_1|$ の円に内接し，点 z_1 を１つの頂点に持つ正 n 角形の，頂点である。



A1-1.2.　方程式

(1) 因数定理と高次方程式

因数定理・剰余定理を通常通り扱い，高次方程式を因数分解によって解く。(詳細は省略)

(2) 方程式の諸性質

次のことを確認する。(詳細は省略)

① 実数係数の２次方程式の解の判別

② $f(x)$ が n 次の整式であるとき，n 次方程式 $f(x)=0$ は，複素数の範囲で，n 個の解を持つ。
また，$f(x)$ の係数がすべて実数の時，

$$f(\alpha)=0 \text{ ならば } f(\overline{\alpha})=0$$

同様に，$f(x)$ の係数がすべて有理数の時，

$$f(p+q\sqrt{2})=0 \text{ ならば } f(p-q\sqrt{2})=0$$

(ただし p, q は有理数)

③ 解と係数の関係

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が α, β

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解が α, β, γ

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha+\beta+\lambda=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の解が $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

$$=x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\frac{d}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}$$

(3) ３次方程式

【３乗根】

実数aに対して，$x^3 = a \ \cdots *$ を満たす実数xを$\sqrt[3]{a}$で表し『３乗根a』という。

注：$f(x) = x^3$が単調に増加する関数であることから，

$*$を満たす実数がただ１つ存在する。

例１．$x^3 = 2$を満たす実数xは，

$$x = \sqrt[3]{2} = 1.259921\cdots$$

また，$\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3 = -\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = -2$であるから，

$x^3 = -2$を満たす実数xは，

$$x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

（参考）n乗根の定義

一般に，実数aと自然数nに対して，

nが奇数の時，

$x^n = a$を満たす実数xが $\sqrt[n]{a}$

$a > 0$，nが偶数の時，

$x^n = a$を満たす正の実数xが $\sqrt[n]{a}$

なお，$a = 0$のとき，$\sqrt[n]{0} = 0$

【３次方程式$t^3 - 3abt + a^3 + b^3 = 0 \cdots$☆

（a, bは定数）の解】

☆より，

$$(t + a + b)\left\{t^2 - (a+b)t + a^2 - ab + b^2\right\} = 0$$

$t = -(a+b)$

または $t^2 - (a+b)t + a^2 - ab + b^2 = 0 \cdots$①

①の判別式をDとすると，

$$D = (a+b)^2 - 4(a^2 - ab + b^2) = -3(a-b)^2$$

$$= \left\{(a-b)\sqrt{3}\,i\right\}^2$$

したがって，☆の解は，

$$t = -(a+b),\quad \frac{a + b \pm (a-b)\sqrt{3}\,i}{2} \cdots ★$$

問１．次の３次方程式を解け。

（なお，(1),(2)とも有理数解を持たない。）

(1) $x^3 - 9x^2 + 18x - 12 = 0$

(2) $x^3 + 6x^2 + 6x - 6 = 0$

解）(1) $x = t + 3$とおくと，与方程式は，

$$(t+3)^3 - 9(t+3)^2 + 18(t+3) - 12 = 0$$

これより，$t^3 - 9t - 12 = 0 \quad \cdots$①

ここで，$a^3 + b^3 = -12,\ ab = 3 \cdots$②

となるa, bを考えると，①は☆となり，

解は★で表される。

②より，$a^3 + b^3 = -12,\ a^3b^3 = 27 \cdots$③

a^3, b^3は，$y^2 + 12y + 27 = 0$の解である。

この解は$y = -9, -3$より，$a^3 = -9, b^3 = -3$は③を満たし，$a = -\sqrt[3]{9},\ b = -\sqrt[3]{3}$ は，②を満たす。

従って，★及び$x = t + 3$より，与方程式の解は，

$x = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 3$,

$$\frac{-\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \pm (-\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3})\sqrt{3}\,i}{2} + 3$$

注：②を満たす複素数a, bは，$a = -\sqrt[3]{9},\ b = -\sqrt[3]{3}$以外にもあるが，この$a, b$に対して与３次方程式の３解が求められているので，他のa, bについて★を用いて解を求めても，同じものが求まる。

(2) $x = t - 2$とおくと，与方程式は，

$$(t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 6(t-2) - 6 = 0$$

これより，$t^3 - 6t - 2 = 0 \quad \cdots$④

ここで，$a^3 + b^3 = -2,\ ab = 2 \cdots$⑤

となるa, bを考えると，④の解は★で表される。

⑤より，$a^3 + b^3 = -2,\ a^3b^3 = 8 \cdots$⑥

a^3, b^3は，$y^2 + 2y + 8 = 0$の解である。

よって$y = -1 \pm \sqrt{7}\,i$であり，

$a^3 = -1 + \sqrt{7}\,i,\ b^3 = -1 - \sqrt{7}\,i$は⑥を満たす。

$|a^3| = |b^3| = 2\sqrt{2}$より，

$|a| = |b| = \sqrt{2}$

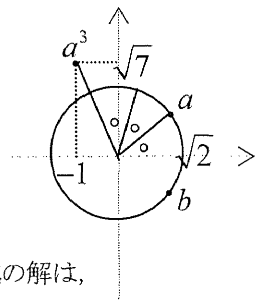
複素数平面で，

右図のようにa, bを定め，

$a = p + qi$（p, qは実数）

とすると，$b = p - qi$

であり，これらは⑤を満たす。



★及び$x = t - 2$より，与方程式の解は，

$$x = -2p - 2,\quad \frac{2p \pm 2qi\sqrt{3}\,i}{2} - 2$$

$$= -2p - 2,\quad p \mp q\sqrt{3} - 2$$

注：a, bは虚数であったが，３解とも実数である。

A3－2. １次変換の線形性

関連分野：代数分野 高等数学：線形代数 対象学年：高校３年生 関連単元：「行列」（数学 C） 教 材 名：「１次変換の線形性とその逆」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

高校で学ぶ行列の応用では，座標平面上において，２つの１次式によって定められる点から点への移動を１次変換という．一方，大学で学ぶ線形代数学では，有限次元ベクトル空間からそれ自身への写像で線形条件をみたすものを１次変換（または線形変換）という．これらは異なる定義のように見えるかもしれないが，実数体上の２次元ベクトル空間に限って考えれば同値となるので，このことを証明する．大学の数学における抽象的な内容を高校で扱うことによって，高校から大学へ円滑に学びを進めるための土台を築けることと期待する．

A3－2.1. 高校における１次変換の定義

座標平面上の各点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移す移動が，a,b,c,d を定数として，定数項のない x,y の１次式で

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$$

と表されるとき，この移動を**１次変換**という．この１次変換を f と書くことにすると，条件式が行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように表されるので，f を行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**表す１次変換**という．

A3－2.2. 大学における１次変換（線形変換）の定義

体 K 上の有限次元ベクトル空間 V において，写像 $f:V \to V$ が，次の線形条件

「すべての $v,w \in V$ とすべての $k \in K$ に対して

$$f(v+w) = f(v)+f(w),\ f(kv) = kf(v)」$$

をみたすとき，f を１次変換（または線形変換）という．以下では，特に，K を実数体 R として

$$V = R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x,y \in R \right\}$$

の場合を考える．ここで，R^2 の要素 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ は１対１に対応するので，２次元ベクトル空間 R^2 と座標平面は同一視できることに注意しておく．

A3－2.3. 高校における１次変換の定義の書き換え

高校における１次変換と大学における１次変換の繋がりを調べるために，高校における１次変換の定義を曖昧なものから厳密なものに書き換えておく．R^2 で座標平面を表すことにする．写像 $f:R^2 \to R^2$ が，2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in R)$ によって，すべての $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表されるとき，f を行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**表す１次変換**という．より簡潔に，写像 $f:R^2 \to R^2$ が，2×2 行列 A によって，すべての $v \in R^2$ に対して

$$f(v) = Av$$

と表される，とも書けることに注意しておく．

A3－2.4.　１次変換の線形性とその逆（授業実践）

１次変換が線形条件をみたすことは，行列の基本的な性質さえ分かっていれば,容易に示される．しかし，線形条件をみたす R^2 から R^2 への写像が１次変換となることは容易には示されない．しかし，適切なヒントを与えれば，高校生でも証明できる内容であると考える．数学Ｃを履修している本校の高校３年生に厳密な１次変換の定義を教え，さらに次の問題を出題してみた．

> 問題１　写像 $f: R^2 \to R^2$ に対して，次の２つの命題が同値であることを示せ．
>
> (1)　f は行列の表す１次変換である．つまり，ある 2×2 行列 A が存在して，すべての $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ に対して $f(v) = Av$ である．
>
> (2)　f がすべての $v, w \in R^2$ とすべての $k \in R$ に対して，
> $$f(v+w) = f(v) + f(w),\ f(kv) = kf(v)$$
> をみたす．

解　(i)　(1) $\Rightarrow$ (2) を示す．(1) を仮定すると，すべての $v, w \in R^2$ とすべての $k \in R$ に対して，

$$f(v+w) = A(v+w) = Av + Aw = f(v) + f(w),$$

$$f(kv) = A(kv) = k(Av) = kf(v)$$

であるから，(2) が成立する．

(ii)　(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，これらは R^2 の要素であり，f が R^2 から R^2 への写像であることから，$f(e_1), f(e_2)$ も R^2 の要素である．よって，

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in R^2$$

とおける．このとき，すべての $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ に対して，

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$$

なので，(2) より

$$\begin{aligned} f(v) &= f(xe_1 + ye_2) = f(xe_1) + f(ye_2) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa + yb \\ xc + yd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

である．よって，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば，すべての $v \in R^2$ に対して $f(v) = Av$ であり，(1) が成立する．

ゆえに，(i)，(ii) より (1) と (2) は同値である．□

(1) $\Rightarrow$ (2) は１次変換が線形性を持つことを意味する．この証明については，ほぼすべての生徒が容易に解答できた．問題文に $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書いておいたためか，

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように成分表示を使った解答が多かったが，行列の基本性質に注目して，本稿のような成分表示を使わない証明をした生徒もいた．

一方，(2) $\Rightarrow$ (1) は線形性を持つ R^2 から R^2 への写像が１次変換になることを意味する．この証明については，(2) が抽象的な表現のためか，ほとんどの生徒が手を出せずにいた．そこで，基本ベクトル e_1, e_2 を思い出させて，$f(e_1)=\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}\in R^2$ のようにおけることを確認した．すると，数名の生徒は証明できた．証明できない生徒は，仮定である (2) ばかり見ていて，示すべき (1) に注目できていなかったように思える．このような生徒には「(1) を示したいのだから，仮定である (2) はとりあえず置いておいて，$f(v)=f\left(\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\right)$ がどのようになるか調べてみよ」のようなヒントを与えるとよいかもしれない．

一見すると，(2) の方が弱い条件のように感じられるが，実際は (1) と同値であるのは，この事実を知らない生徒にとっては驚くべきことだろう．また，同値でありさえすれば，どちらを定義に採用してもよいという大学の数学ではよくある方法を教えることが，大学の数学への興味を引き出すことに繋がると期待する．

A3－2.5.　１次変換を表す行列の一意性

問題１の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明において，気になる点が１つ残る．(2) をみたす f に対して (1) における行列 A のとり方が一通りに定まるかどうかである．問題１ではそこまで言及していないが，もし一通りに定まるのであれば，単に存在すると言われるよりも明確になるので，このような素朴な疑問も考える意味があるだろう．一般に次のことが成立するので，結論は，一通りに定まるということになる．

> 問題２　f が行列 $A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ の表す１次変換であり，さらに行列 $A'=\begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}$ の表す１次変換でもあるならば，$A=A'$ であることを示せ．

解　すべての $v\in R^2$ に対して，$f(v)=Av$ であり，さらに $f(v)=A'v$ でもある．よって，すべての $v\in R^2$ に対して $Av=A'v$ が成立する．特に，$v=e_1$ とすれば

$$\begin{pmatrix}a \\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' \\ c'\end{pmatrix}$$

であり，$v=e_2$ とすれば

$$\begin{pmatrix}b \\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b' \\ d'\end{pmatrix}$$

である．よって，行列の成分を比較して

$$a=a',\ b=b',\ c=c',\ d=d'$$

を得るので，$A=A'$ である．□

本稿の解では，２つの行列 A, A' で表されることを仮定し，結果として $A=A'$ となることから一意性を示しているが，背理法を用いてもよいだろう．つまり，異なる２つの行列 A, A' で表されることを仮定して，矛盾を導く方法である．一意性の証明は高校ではあまり扱われないので，このような考え方に触れさせるのもよいだろう．

A3－2.6.　１次変換と行列の対応

問題１の (2) $\Rightarrow$ (1) と問題２の結果から，線形条件をみたす写像 $f: R^2\to R^2$ を１つ定めると，それに対して，ただ１つの 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix}f(e_1) & f(e_2)\end{pmatrix}$ が定まることが分かる．つまり，線形条件をみたす R^2 から R^2 への写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_R(R^2, R^2)$，2×2 行列全体の集合を $\mathrm{M}_2(R)$ と表すと，この対応は，すべての $f\in \mathrm{Hom}_R(R^2, R^2)$ に対して，

$F(f)=\big(f(e_1)\ f(e_2)\big)$ で定められる写像

$$F:\mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)\to \mathrm{M}_2(R)$$

である．これらの記号のもとで，すべての $v\in R^2$ に対して $f(v)=F(f)v$ であることに注意しておく．また，逆に写像

$$G:\mathrm{M}_2(R)\to \mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)$$

がすべての $A\in \mathrm{M}_2(R)$ に対して，A の表す１次変換を f_A と表すことにして，$G(A)=f_A$ で定められる．

問題３　上記の写像 F,G について，F の逆写像が G であることを示せ．

解　すべての $f\in \mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)$ に対して，すべての $v\in R^2$ で

$$[(G\circ F)(f)](v)=[G(F(f))](v)=f_{F(f)}(v)$$
$$=F(f)v=\big(f(e_1)\ f(e_2)\big)v=f(v)$$

なので，$(G\circ F)(f)=f$ を得る．また，すべての $A\in \mathrm{M}_2(R)$ に対して，

$$(F\circ G)(A)=F(f_A)=\big(f_A(e_1)\ f_A(e_2)\big)$$
$$=\big(Ae_1\ Ae_2\big)=A$$

である．ゆえに，F の逆写像は G である．□

問題３の結果から $F:\mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)\to \mathrm{M}_2(R)$ により，$\mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)$ の要素と $\mathrm{M}_2(R)$ の要素が一対一に対応することが分かる．つまり，F の対応により，１次変換と 2×2 行列を同一視できる．さらに，

１次変換における写像の合成と行列の積について次の関係がある．

問題４　$f,g\in \mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)$ に対して，次のことを示せ． (1)　$f\circ g\in \mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)$ (2)　$F(f\circ g)=F(f)F(g)$

解　(1)　すべての $v,w\in R^2$ とすべての $k\in R$ に対して

$$(f\circ g)(v+w)=f\big(g(v+w)\big)=f\big(g(v)+g(w)\big)$$
$$=f\big(g(v)\big)+f\big(g(w)\big)=(f\circ g)(v)+(f\circ g)(w),$$
$$(f\circ g)(kv)=f\big(g(kv)\big)=f(kg(v))$$
$$=kf\big(g(v)\big)=k(f\circ g)(v)$$

より，$f\circ g\in \mathrm{Hom}_R(R^2,R^2)$ である．

(2)　すべての $v\in R^2$ に対して，

$$F(f\circ g)v=(f\circ g)(v)=f\big(g(v)\big)=f\big(F(g)v\big)$$
$$=F(f)\big(F(g)v\big)=\big(F(f)F(g)\big)v$$

が成立するので，特に $v=e_1$ と $v=e_2$ のときを考えれば，$F(f\circ g)=F(f)F(g)$ を得る．□

問題４の(2)は，F により，２つの１次変換 f,g の写像の合成 $f\circ g$ が２つの行列 $F(f),F(g)$ の積 $F(f)F(g)$ と対応することを意味する．つまり，F は単に１次変換と 2×2 行列の対応を与えるだけでなく，写像の合成と行列の積についての関係を保つ性質を持つ．これらから，さらに，逆写像の存在性と行列の正

則性に関する次の性質が導かれる．

> <u>問題５</u>　$f \in \mathrm{Hom}_R(R^2, R^2)$ について，次の命題が同値であることを示せ．
>
> (1) f が逆写像 f^{-1} を持つ．
>
> (2) $F(f)$ が正則行列である．

<u>解</u>　(i) (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．写像 $1_V : R^2 \to R^2$ を，すべての $v \in R^2$ に対して $1_V(v) = v$ で定義すると，$1_V \in \mathrm{Hom}_R(R^2, R^2)$ である．(1) から

$$f \circ f^{-1} = 1_V = f^{-1} \circ f$$

であり，

$$F(f \circ f^{-1}) = F(1_V) = F(f^{-1} \circ f)$$

より，

$$F(1_V) = \left(1_V(e_1)\ 1_V(e_2)\right) = \left(e_1\ e_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と問題４の (2) に注意すれば，

$$F(f)F(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F(f^{-1})F(f)$$

より $F(f)$ は正則行列であり，$\left(F(f)\right)^{-1} = F(f^{-1})$ を得る．

(ii) (2) $\Rightarrow$ (1) を示す．g を $\left(F(f)\right)^{-1}$ の表す１次変換とすると，すべての $v \in R^2$ に対して，

$$\begin{aligned}(f \circ g)(v) &= f\left(g(v)\right) = f\left(\left(F(f)\right)^{-1} v\right) \\ &= F(f)\left(\left(F(f)\right)^{-1} v\right) = \left(F(f)\left(F(f)\right)^{-1}\right)v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(v) &= g\left(f(v)\right) = g\left(F(f)v\right) \\ &= \left(F(f)\right)^{-1}\left(F(f)v\right) = \left(\left(F(f)\right)^{-1} F(f)\right)v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = v\end{aligned}$$

が成立するので，$f \circ g = 1_V = g \circ f$ である．つまり，$f^{-1} = g$ である．□

A3－2.7.　まとめ

１次変換について，座標平面 R^2 での議論を進めてきたが，３次元空間 R^3 や，より一般の n 次元空間 R^n でも同様な性質が示される．特に，R^3 ではコンピュータ・グラフィックスでの応用があるので，その基礎となるような１次変換を考察するのも面白いだろう．

g1. 四角形の合同条件

関連分野：幾何分野
高等数学：平面幾何
対象学年：中学１年生
関連単元：「平行と合同」（中学２年）
教 材 名：「四角形の合同条件」

≪合同条件の発展≫

三角形の合同条件の学習後に，四角形の合同条件を考えることで，図形の性質に対してより深く考察する力を育てる。

g1.1.　三角形の合同条件

次のような三角形を作図する。

（ア）3 辺が 4 cm，　5 cm，　6 cm
（イ）3 つの角が　50°，60°，70°
（ウ）2 辺が 5 cm，　7 cm で，1 つの角が 50°
（エ）2 辺が 5 cm，　7 cm で，その間の角が 50°
（オ）1 辺が 6 cm で，2 つの角が　50°，60°
（カ）1 辺が 6 cm で，その両端の角が　50°，60°

（キ）AB＝8cm，AC＝5cm，∠ABC＝30°
（ク）AB＝8cm，AC＝13cm，∠ABC＝30°
（ケ）AB＝8cm，AC＝5cm，∠ABC＝120°
（コ）AB＝8cm，BC＝4cm，∠ACB＝90°
（サ）AB＝8cm，∠ABC＝60°，∠ACB＝90°

この中で，クラス全員が同じ図形を作図できる条件はどれかという発問によって，三角形の決定条件を意識させることができる。そして，合同条件に関して学習していく。

合同とは，図形の中の対応する要素でできる等式がすべて成り立つことであるから，合同の証明は，条件に与えられていない残りの要素の間に等式が成り立つことを示せばよい。

△ABC≡△A'B'C'では，対応する６つの要素でできる６つの等式は，３組の辺（AB＝A'B'，BC＝B'C'，CA＝C'A'）と３組の角（∠A＝∠A'，∠B＝∠B'，∠C＝∠C'）からなるもので，合同の証明は，条件に与えられていない残り３つの等式が成り立つことを示せばよい。

三角形の合同条件「2 つの辺とその間の角がそれぞれ等しい（二辺夾角相等）」と「1 つの辺とその両端の角がそれぞれ等しい（二角夾辺相等）」の証明は，△A'B'C'が△ABC の上に重ねられることを示し（重置法），「3 つの辺がそれぞれ等しい（三辺相等）」の証明は，図１のように△ABC を折り返して△A"B'C'を作り，△B'A'A"において，B'A'＝B'A"より∠B'A'A"＝∠B'A"A'，同様にして∠C'A'A"＝∠C'A"A'，よって∠A'＝∠A"から二辺夾角相等の合同に帰着させて，合同を示す。

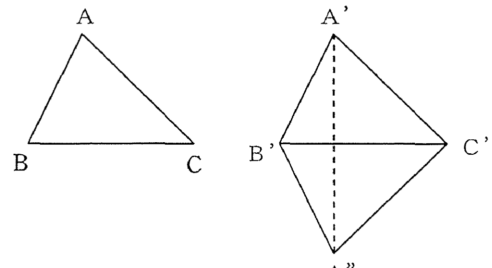


図１

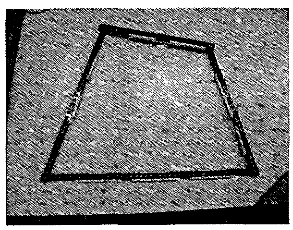
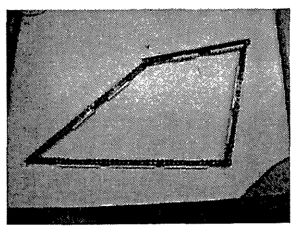
三角形の合同条件は，英語で辺を side，角を angle と表すことより，三辺相等を side - side - side (S. S. S)，二辺夾角相等を side - angle - side (S. A. S)，二角夾辺相等を angle - side - angle（A. S. A）と簡略して表現した。

g1.2.　四角形の合同条件

四角形の合同条件を考えてみると，生徒からいろいろな意見が出てくる。なかには，英語の表記を使って簡略形で表す者まで出てきた。

(1) 四辺相等（「辺−辺−辺−辺」「S. S. S. S」）

生徒からはすぐにだめだという反応が出る。反例として，正方形とひし形をあげる。そこで，４つの辺の長さが全て異なる四角形の場合はどうかときくと，数名は図形を想像できなかったので，レゴで作成した模型を提示してみることで，四角形をひとつに確定できないことを全員が納得できた。

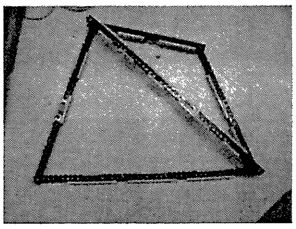



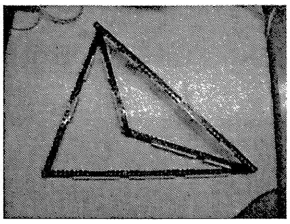
そこで，(1) の四辺相等の工夫として，条件に
「対角線を加える」「角を加える」
という意見が出る。

相等条件に対角線を加えた場合

(2) 四辺一対角線相等

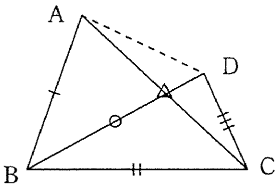
対角線をはさんで凸形の四角形と凹形の四角形ができるので合同条件ではない。





(3) 三辺二対角線相等

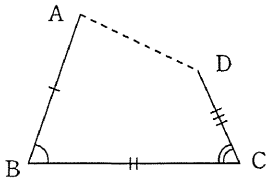
(2)の問題の解決策として，対角線２本にする。さらに，この条件は三角形の合同条件の三辺相等に帰着して考えると，４辺のうち３辺の値がわかるだけでよいことに気付き,「３つの辺と２つの対角線がそれぞれ等しい」という合同条件が出る。



相等条件に角の大きさを加えた場合

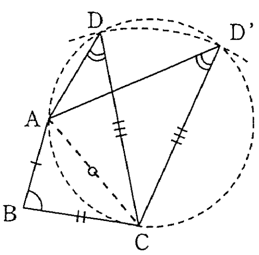
(4) 三辺二夾角相等（「辺-角-辺-角-辺」「S. A. S. A. S」）

三角形の合同条件の二辺夾角相等に帰着させると，合同条件となる。



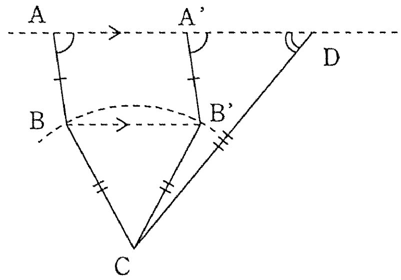
(5) 三辺二角相等①（「辺-角-辺-辺-角」「S. A. S. S. A」）

三角形の合同条件の二辺夾角相等で△ABC の AC が決まるが, △ACD は２辺と１つの角相等で合同条件でない。よって，三辺二角相等は四角形の合同条件ではない。また，円を学習した場合は，円周角の定理を用いて，二つの図形が考えられることが示せる。



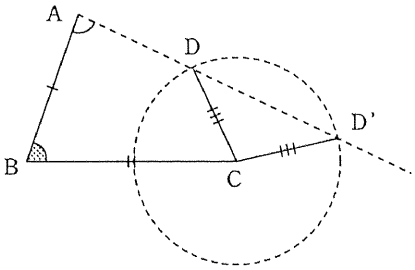
(6) 三辺二角相等②（「角-辺-辺-辺-角」A. S. S. S. A)

２つの図形が考えられるので，合同条件ではない。



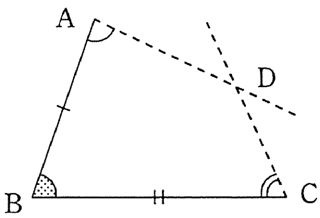
(7) 三辺二角相等③（「角-辺-角-辺-辺」「A. S. A. S. S」）

２つの図形が考えられるので，合同条件ではない。



(8) 三角二夾辺相等（「角-辺-角-辺-角」「A. S. A. S. A」）

三角形の合同条件の二辺夾角相等と二角夾辺相等に帰着させると，四角形の合同条件が示せる。これは，二夾辺でなくても，二辺と三つの角がそれぞれ等しいとわかれば，この条件となる。



以上より，四角形の合同条件は，(3)の「三辺二対角線相等」と(4)の「三辺二夾角相等(S. A. S. A. S)」と(8)の「三角二夾辺相等(A. S. A. S. A)」の３つとなる。

ここで，多角形の合同条件を「はじめの多角形の辺および角の相等によって合同を保障する命題」とすると，「三辺二夾角相等(S. A. S. A. S)」と「三角二夾辺相等(A. S. A. S. A)」の２つとなる。

そこで，五角形の合同条件やｎ角形の合同条件はどうなるだろうと発問すると，「S. A. S. …….A. S」と「A. S. A. ……. S. A」という発言が返ってきた。

g1.3. いろいろな四角形の合同条件

四角形の性質のまとめとして，三角形に直角三角形の合同条件があるように，正方形や長方形などの合同条件を考えさせてみると，次のような意見が出た。なお，このときは，条件を幅広くするために，対角線なども考えた。

正方形の合同条件：
- 一辺の長さが等しい。
- 対角線の長さが等しい。
- 面積が等しい。

長方形の合同条件：
- 隣り合う２辺の長さがそれぞれ等しい。
- 対角線の長さが等しく，その間のなす角が等しい。
- 一辺と対角線の長さがそれぞれ等しい。
- 一辺と面積が等しい。

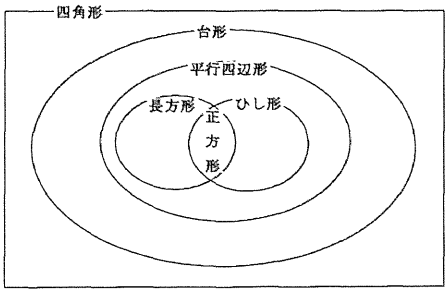
ひし形の合同条件：
- 一辺の長さと１つの角の大きさがそれぞれ等しい。
- 一辺と１つの対角線の長さがそれぞれ等しい。
- ２つの対角線の長さがそれぞれ等しい。

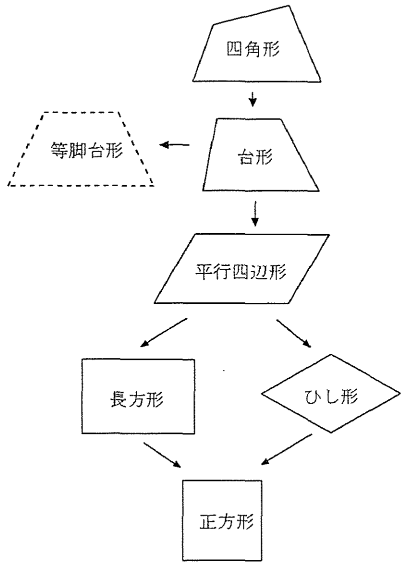
平行四辺形の合同条件：
- 隣り合う２辺の長さと１つの角の大きさがそれぞれ等しい。
- 一辺と２つの対角線の長さがそれぞれ等しい。
- 一辺と１つの対角線の長さがそれぞれ等しく，その間の角も等しい。
- ２つの対角線の長さと，その間のなす角がそれぞれ等しい。

これ以外にも，台形や等脚台形やたこ形の合同条件も考えてみる。

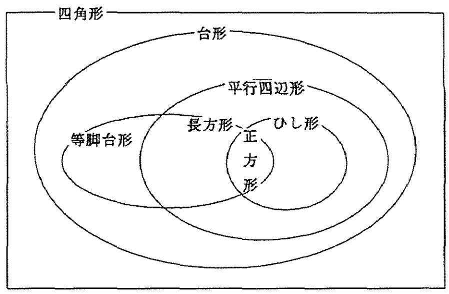
g1.4. 四角形の関係図

四角形の性質のまとめとして，四角形の合同条件とともに，いろいろな四角形の関係について，ベン図やチャートを使ってまとめる。このとき，これらの図に，等脚台形を書き加えることを考えた。





ベン図で表された四角形の関係の中に等脚台形を入れる場合，いろいろな意見が出てくるが，次のような形でまとまった。



【参考文献】

1. 大村平（1979）『図形のはなし』日科技連。
2. 増島高敬（2007）「四角形の合同条件を考える」『数学教育　2007.5.』明治図書。
3. 銀林浩，銀林純(2006)『図解　算数の英語』日興企画。

G1. 四面体の幾何

関連分野：幾何分野
高等数学：幾何学
対象学年：高校１年～
関連単元：平面幾何，ベクトル，図形と方程式
教 材 名：「三角形・四角形と四面体」

G1.1. はじめに

数を扱う代数分野では自然に「１，２，３…」と数えるところから始まり，段々複雑になっていく。これに対し幾何は自然科学の化学や生物などに近い面がある。化学では化合物は大昔から身の回りに存在していて，学問の発展とともに複合物から単純な要素に分析されてきた。生物では細胞は目に見えない。幾何でも図形の要素である直線や点はそのまま生活の中にあるのではなく，結合された形で存在している。複雑なものを分解して分析し，また結合して，という手法は，自然科学全体の普遍的なものである。

平面における細胞としては点・直線があり，基本図形として三角形・四角形があるように，空間においては四面体が基本である。つまり３次元空間の四面体は，平面幾何における三角形に近いものと考えられる。しかし同様に扱うことの出来る面と，性質が異なる面とがある。三角形と関連づけて性質を調べ，教材化したいと考えた。

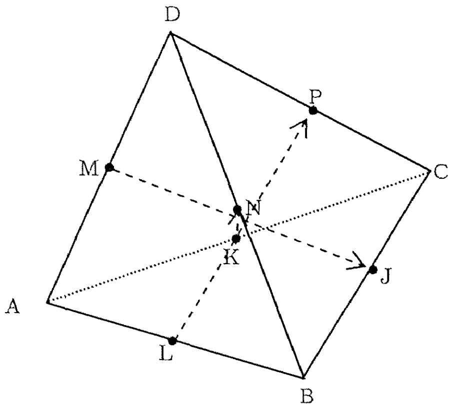
G1.2. 四面体の５心

１）重心G

四面体 ABCD の各辺の中点と，相対する辺の中点同士を結ぶ線分は，互いにその中点Ｇで交わる。

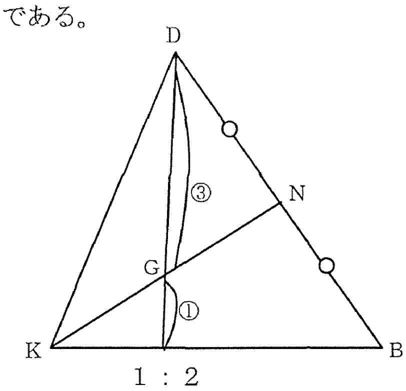
証明としてはベクトルを利用してＧの位置ベクトルが４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの位置ベクトルの平均であることを示せばよい。または，相対する辺の２組を取り出してねじれ四辺形を作り，各辺の中点を結んだ平行四辺形を考えてもよいだろう。

四面体の各辺 BC，CA，AB，DA，DB，DC の中点をそれぞれＪ，Ｋ，Ｌ，Ｍ，Ｎ，Ｐとする。



①AG，BG，CG，DG の延長が対面と交わる点はその面の三角形の重心であり，Ｇはそれら AG，BG，CG，DG を３：１に内分する。

三角形の重心が，頂点と重心を結ぶ線分を２：１に内分することとメネラウスの定理を利用すればすぐわかることである。



②四面体の重心は，４つの面の重心を結んだ四面体との相似の中心で，その相似比は（－３）：１である。

これは①より簡単に導かれる。

③Ａから対面の重心までの長さを g_1，Ｂから対辺の重心までの長さを g_2，Ｃから対辺の重心までの長さを g_3，Ｄから対辺の重心までの長さを g_4，とし，四面体の６つの辺の長さの和をｓとすると，

$$\frac{4}{9}s < \sum_{i=1}^{4} g_i < \frac{2}{3}s$$

これは，四面体の重心Ｇが相対する辺の中点同士を結ぶ線分の中点であることと，①を用いると導ける不等式である。

④４つの四面体 GBCD，GCDA，GDAB，GABC の体積は等しく，四面体 ABCD の $\dfrac{1}{4}$ である。

① より直接導かれる。
なお，位置ベクトルで表現すれば

$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$D(\vec{d})$ にたいし，四面体 ABCD の重心 G の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

２）外心O

四面体の各面の外心でその面に立てた垂線は１点Oで交わる。これは外接球の中心である。

Oが４頂点から等距離にあることは自明。
また，各稜の垂直２等分面もOで交わる。

３）内心Ｉ

四面体の４つの頂角の内軸は１点Ｉで交わる。これは内接球の中心である。

Ｉが４つの面から等距離にあることは自明。
また，６つの稜角の２等分面もＩで交わる。
ベクトルで考える。
原点Ｏと４点 A， B， C， D に対し

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} + w\overrightarrow{OD}$$
$$(x+y+z+w=1)$$

とすると，

$$x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OP}+z\overrightarrow{OP}+w\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}+w\overrightarrow{OD}$$

よって　$x\overrightarrow{AP}+y\overrightarrow{BP}+z\overrightarrow{CP}+w\overrightarrow{DP}=\vec{0}$

A を始点にすれば

$$x\overrightarrow{AP}+y\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right)+z\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}\right)+w\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$

つまり　$\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}+w\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AP}=(y+z+w)\frac{y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}+w\overrightarrow{AD}}{y+z+w}$$

とかける。

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}+w\overrightarrow{AD}}{y+z+w}$　とすると，

点 E は三角形 BCD の内心になっており．点 P は線分 AE を $(y+z+w):x$ に分けている。

$x:y:z:w$ が△BCD：△ACD：△ABD：△ABC のときに，P は四面体の内心になっている。

４）傍心 I_A，I_B，I_C，I_D

１頂点における内軸と他の頂点における傍軸とは，それぞれ１点 I_A，I_B，I_C，I_Dで交わる。これらは傍接球の中心である。

三角形の傍心が，角辺の外側に３つあることに対応し，四面体の傍心は各面の外側に存在している。

①四面体の内接球，傍接球の半径をｒ，r_A，r_B，r_C，r_Dとすると，

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}$$

A，B，C，Dの対面の三角形の面積をS_A，S_B，S_C，S_Dとし，$S_A+S_B+S_C+S_D=2S$　とする。
また，四面体の体積をＶとすれば

$3V=2rS$
$=2r_A(S-S_A)=2r_B(S-S_B)$
$=2r_C(S-S_C)=2r_D(S-S_D)$

だから

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_A}=\frac{2S_A}{3V}$$

よって

$$\frac{4}{r}-\sum\frac{1}{r_i}=\frac{2\sum S_i}{3V}=\frac{4S}{3V}=\frac{2}{r}$$

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}$$

②四面体の４つの面に接する球は，内接球，傍接球の他に多いときはさらに３個存在する。

四面体の面を無限に延長すれば，これらは空間を１５の領域に分ける。

- 四面体自身。これに接するのは内接球である。
- １つの面と他の３つの延長面で囲まれる部分。これに接するのは傍接球の４つである。
- ２面角と他の２面の延長とで囲まれた部分。６つあるが対になっており接する球は最大３個である。（4 面の面積によっては無限遠点となり消えることがある。等面四面体では３つとも消える。）
- ３面角で囲まれた部分。４つあるが接する球はない。

5）垂心H

四面体に対し，各頂点から対面に引いた垂線は一般にねじれの位置にあって，かならずしも交わらない。
交わる場合は次の場合である。

四面体ＡＢＣＤにおいて

① 相対する辺が直交（直辺四面体・直稜四面体・垂心四面体）
② 角頂点から対面に引いた垂線の足が，各面の垂心である。
③ 相対する辺の２乗の和が等しい
④ 向かい合う辺の中点をむすぶ３つの線分の長さが等しい
⑤ 菱形６面体の１つおきの頂点をむすんでできる
⑥ 各辺に対し，それ以外の頂点から引いた垂線の足が一致する。

①～⑥は互いに同値である。

①について

四面体ＡＢＣＤで，ＡＢ⊥ＣＤ，ＢＣ⊥ＡＤならばＡＣ⊥ＢＤである。これはAから対面に垂線を下ろして考えても良いし，ベクトルの内積を利用すれば簡単に示すことができる。また初等幾何的には，ひとつの面を合同な三角形３つを各辺にのせて４倍の三角形にして，三角形の垂心に帰着してもよい。

②について

三垂線の定理を利用する。

③ついて

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると，１）より

$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

よって

$$AB^2+CD^2=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}$$

したがって

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$$

④について

向かい合う辺が直交しているので，各辺の中点を結ぶと長方形ができる。長方形の対角線の長さは等しいから，３つの長方形の対角線の長さはすべて等しい。

⑤⑥もほぼ自明

6）モンジュ点　M

四面体の各辺の中点を通り，対辺に垂直な６つの平面は１点Mで交わる。この点をモンジュ点という。M，重心G，外心Oは同一直線上にあり，ＧはＭＯの中点になる。この直線を四面体のオイラー線という。

平面の三角形におけるオイラー線では，重心は，外心と垂心を結ぶ線分を１：２に内分しているが，四面体ではこれが１：１になっている。なお，四面体の垂心が存在する場合は，垂心HはMに一致する。

ベクトルで考える。ＡＢの中点をＰとし，Ｏを原点としたＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｐの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$ とする。$\vec{p}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ であるから，Ｐを通りＣＤに垂直な平面のベクトル方程式は次のようにかける。

$$\left(\vec{c}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{r}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$

ところで $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{d}\right|$ なので，

$\vec{r}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}$ はこの方程式を満たす。

他の辺に関しても同様。よってＧはＯＭの中点である。

G1.3.　特殊な四面体

１）３直角四面体

空間座標において，ｘｙ平面，ｙｚ平面，ｚｘ平面および平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ に囲まれた部分で作られる四面体である。

①直角三角形でない面は鋭角三角形で，直角が集まる頂点から鋭角三角形の面に垂線を下ろせば，その足は面の垂心を通る。

OA＝ａ，OB＝ｂ，OC＝ｃであるから，

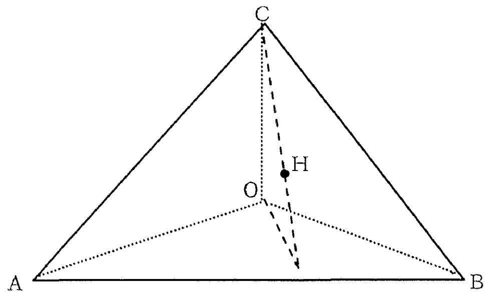
$$AB^2=a^2+b^2$$
$$BC^2=b^2+c^2$$
$$AC^2=a^2+c^2$$

よって $AB^2+AC^2>BC^2$

また，Ｏから平面ABCへ垂線ＯＨをおろせば

平面ＣＯＨ⊥ＡＢなので，ＡＢ⊥ＣＨ

同様に　ＡＣ⊥ＢＨなのでＨはABCの垂心である。



②３直角四面体の４頂点を原点Ｏ，Ａ (a, 0, 0)，Ｂ (0, b, 0)，Ｃ (0, 0, c) とし，Ｏから面ＡＢＣにおろした垂線の長さをｈとすると

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

原点Ｏから平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ におろした垂線の長さｈは

$$h=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$$ である。

③４つの面の面積について

$$(\Delta OBC)^2+(\Delta OCA)^2+(\Delta OAB)^2=(\Delta ABC)^2$$

②より

$$h^2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=a^2b^2c^2$$

ところで四面体の体積をＶとすれば，

３Ｖ＝ｈ×△ＡＢＣであり，６Ｖ＝ａｂｃであるから

$$(h\triangle ABC)^2=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{4}$$

$$=(\Delta OBC)^2+(\Delta OCA)^2+(\Delta OAB)^2$$

または，ＯＨとｙｚ平面のなす角を α とすれば

$(\Delta OBC)=\Delta ABC\cos\alpha$ であり，

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ を考えても良いだろう

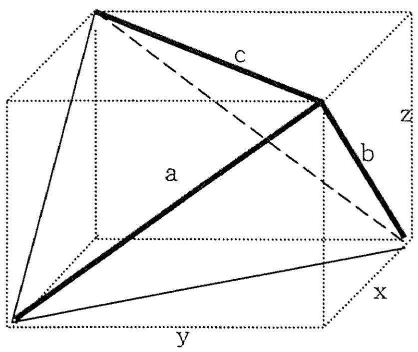
④３直角四面体ＯＡＢＣの底面ＡＢＣの重心をＰとすれば，ＯＰは四面体の外心を通り，ＯＰ＝$\dfrac{2}{3}R$

ただしＲは外接球の半径である。

ＯＡ，ＯＢ，ＯＣを辺とする直方体を考えればよい。

２）等面四面体（等積四面体）

各面が合同な四面体である。この四面体は，直方体の１つおきの頂点を結んでできるものととらえることができ，面の３辺の長さを知れば簡単に体積を求めることができる。また，広げた展開図は各面に相似な三角形になる。



① どの頂点からの高さも等しい

② 重心G，内心Ｉ，外心Oが一致

（少なくとも２つが一致すればもうひとつも一致する）

③ 各頂点における３つの角の和はπである

④ 向かい合う辺の共通垂線の足が辺の中点

⑤ 各頂点と向かい合う辺の重心を結ぶ線分の長さは等しい

①は自明であろう。すると，高さが等しいから，重心から各面への距離も等しくなり，内心と重心は一致する。重心と外心が一致すること②と④⑤は，立体の対称面を考えれば簡単である。③は展開図を考える。等面四面体の辺の長さをａ，ｂ，ｃ，とし，外接する直方体の辺の長さをｘ，ｙ，ｚとすると，

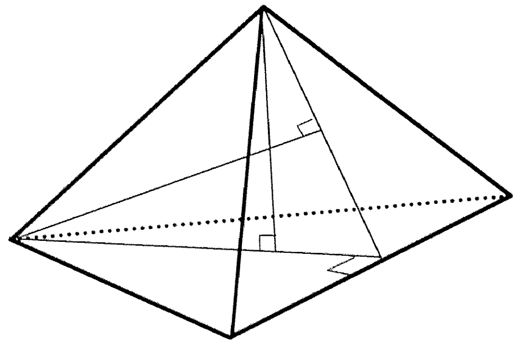
$$\begin{cases} y^2+z^2=a^2 \\ z^2+x^2=b^2 \\ x^2+y^2=c^2 \end{cases}$$

であるから，四面体の体積 $xyz\left(1-4\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{xyz}{3}$

は３辺が与えられれば簡単に計算できる。

３）直辺四面体（直稜四面体）

向かい合う辺が直交する四面体である。先に述べたように，垂心Hをもつことが特徴。



性質については垂心Hの項にあるが，三角形の九点円に似た十二点球というものを考えることができる。

・ 第１種十二点球

各辺に対しその両端以外の２頂点からその辺に引いた垂線の足（両者は一致する）６つおよび各辺の中点６つの合計１２点は，四面体の重心を中心とする同一球面上にある。

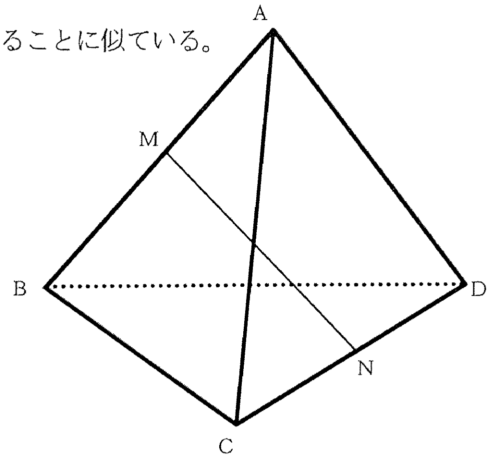
・ 第２種十二点球

各面の重心４つおよび各面の垂心４つおよび各頂点から向かいの面におろした垂線を２：１に内分する点４つの合計１２点は，同一球面上にある。

４）正四面体

等面四面体でありかつ直辺四面体であり，平面の正三角形にあたるものととらえることができよう。平面の三角形の不等式では，「等号は正三角形に限る」という場合が多いが，四面体における正四面体は特殊すぎる。それは，一般の平面における平行四辺形と正方形

の中間に，菱形と長方形という２種の特別な平行四辺形があることに似ている。



①正四面体は，向かい合う辺の中点を結ぶ直線に関して対称である。

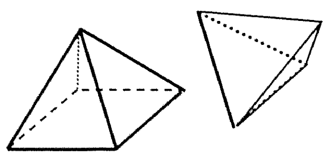
AB，CD の中点をM，Nとすれば，正四面体ＡＢＣＤは直線MNに関して対称である。

②立方体に内接する四面体は正四面体である。

一般の直方体に内接する四面体は等面であるから，更に各辺が同じ長さをもつので，それは正四面体である。

③正四面体の各辺の中点をつなぐと，正八面体となる。

これもできた立体の辺の長さをみれば明らか。
辺の長さがすべて等しい正四角錐（五面体）と，同じ辺の長さをもつ正四面体の，合同な面をぴったり合わせると何面体になるかという課題は，高校生の座標計算やベクトルで扱うことも出来るが，正四面体のパーツとしてとらえれば，大変わかりやすい。今年度の中１の授業では，大根を切り出して立方体→正四面体→正八面体と内接している立体を確認していった。



G1.4.　四面体の性質

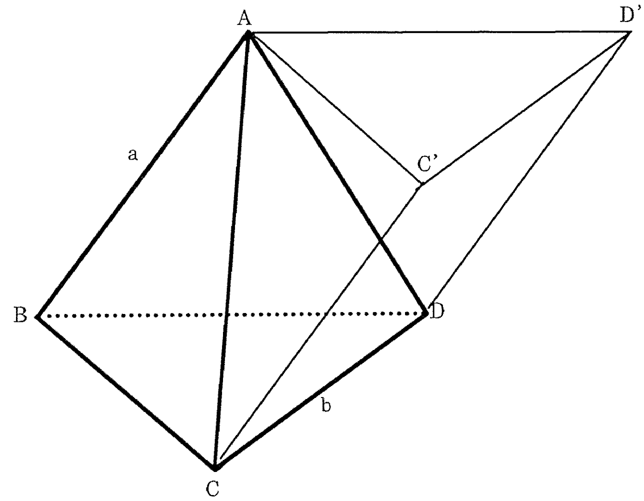
１）四面体の体積

底面×高さ÷３という垂体の公式の他に次のような式も考えられる

四面体の向かい合う辺の長さをａ，ｂとし，その２辺のなす角をθ，２辺の共通垂線の長さをｈとすれば

四面体の体積　＝　$\dfrac{1}{6}abh\sin\theta$

AB=ａ，CD＝ｂとする。辺 BC を $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CC'}$ となる位置に平行移動すれば，　$CDD'C' = ab\sin\theta$　となることから導くことが出来る。



これより次のこともいえる。

ａ，ｂの長さが一定ならば，AB および CD が直線 AB および直線 CD 上を動いても四面体 ABCD の体積は不変。

２）球に外接する四面体

球に外接する四面体とは，そのすべての６辺に接する球が存在するものである。

四面体が球に外接する条件は，3 組の向かい合う辺の和が等しいことである。

１点から球にひいた接線の長さは等しいから，四面体 ABCD からの接線の長さをａ，ｂ，ｃ，ｄとすると，ＡＢ＋ＣＤ＝ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄである。

【参考文献】

・　一松信(1972)
　『現代に活かす初等幾何入門』岩波書店
・　岩田至康編
　『幾何学大辞典』槙書店
・　安藤哲哉『三角形の円の幾何学』海鳴社
・　寺田文行監修／教材探検の会　編
　『数学ランド・おもしろ探検』森北出版

G2．正 17 角形の作図

関連分野：幾何，代数
高等数学：複素平面，
対象学年：高校１，２年
関連単元：二次方程式，図形と方程式
教材名：正 17 角形の作図

<<生徒の興味関心を高めるための数学史の話題>>

１．はじめに

『近世数学史談』（高木貞治著）によると，当時 19 才のガウス（Carl Friedlich Gauß 1777－1855）が 1796 年 3 月 30 日の朝，目覚めて起きようとした時に正 17 角形を忽然と思いついたのであるという。この発見がガウスに数学者を志させた。つぎは，ガウスが日記にとどめた内容である。

「正多角形の中で三角形，五角形，15 角形および辺数をつぎつぎに２倍して生ずるものの作図が可能であることは幾何学の初歩を学んだものはだれでも知っていることで，そこまではユークリッドの時代にできていたのであるが，その後は初等幾何ではそれ以上に得られないことと信ぜられていたように見える。少なくとも予はこの方面においてさらに一歩をすすめる試みに成功したことを聞かないものである。

この故に，いま上記の正多角形の外になお多くのもの，例えば，正 17 角形などの作図が可能であることの発見は注意に値するものと考える次第である。この発見は，一層広汎なるある理論の系題に過ぎないのであるが，その理論はなお少し未完成なところがあるから完成の上で速やかに発表するであろう。C.F.Gauß」

２．正 17 角形の作図の種

さて，正 17 角形を作図するためには何が分かればよいのだろうか？

そもそも，正多角形の作図問題は，定規とコンパスあるいはそれら有限回の組み合わせにより表出する図形の性質を考察する際に現れる図形の性質の延長として指導することがほとんどであろう。それ故に，正 3 角形，正 6 角形，正 5 角形などの多角形の作図方法を知っているかどうかで終始してしまうことはとても残念である。これは作図を解析的に扱うことがないためであり，仕方がないことである。

高校生になればｎが大きくなる場合の正ｎ角形の作図に関しては，作図方法よりも正多角形の作図の根本問題は何であるのかということに目がいくだろう。さらに，正多角形の作図をこれまでの学習と関連させて考えようとするだろう。その結果，正多角形の中心角に目がいき，正 17 角形ならば，中心角 $\dfrac{360^\circ}{17}$ に目が向いていくのが自然な流れとなる。

すなわち，単位円において，定規とコンパスを有限回組合せることにより，$\dfrac{360^\circ}{17}$ がとれれば作図が可能である。すなわち，$\cos\dfrac{360^\circ}{17}$ が作図できれば，始線から最初の 17 等分点が単位円上に作図することができて解決する。

そこで，本課題は，$\cos\dfrac{360^\circ}{17}$ を定規とコンパスで作図することが目標となる。言い換えるならば，$\cos\dfrac{360^\circ}{17}$ が三乗根とか，五乗根とかを用いずに高々平方根だけを用いて表せる数だということを示せばよい。なお，定規とコンパスによる作図の可能性については次に述べる。

３．定規とコンパスによる作図の上限について

定規とコンパスによる作図を xy 平面上で考える。すなわち，

コンパス　→　円：$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

定規　　　→　直線：$ax+by+c=0$

であり，コンパスと定規を用いて図形の交点を作図していく訳だから，それぞれを連立した方程式を考えればよい。

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ px+qy+r=0 \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+Ax+By+C=0 \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+Ax+By+C=0 \\ x^2+y^2+Px+Qy+R=0 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

(A)，(B)，(C)いずれの場合も，一方の未知数を消去した結果は，高々２次方程式だから，結果は，高々四則演算と平方根を用いて表される数であることがわかる。

以上から，定規とコンパスによる作図の上限は，四則演算と平方根を用いた数であることがわかる。

問題：次の問いに答えよ。
(1) $\cos 72°$の値を求めよ。
(2) 正５角形が定規とコンパスを用いて作図できることを示せ。

(1)は，教科書では発展問題として３倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

のための計算問題として取り上げられることが多い。本問は，図形的な意味にまで言及することによって，正５角形の作図につながることを指摘しておきたい[1]。

４．複素数平面上の点と極形式

複素数平面上において，極形式で考えるために若干の準備と確認を行う。

＜定理＞

単位円に内接する正 17 角形の頂点は
$$z^{17} = 1$$
の解で表されている。

[証明]　　$z = \cos\theta + i\sin\theta$

とおくと，

$$z^{17} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{17}$$
$$= \cos 17\theta + i\sin 17\theta$$

となり，これが$z^{17} = 1$に一致するため，偏角を比べ

$2\pi k = 17\theta$　（$k \in Z$）となる。

したがって，

$$z^k = \left(\cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}\right)^k$$
$$= \cos\frac{2\pi}{17}k + i\sin\frac{2\pi}{17}k$$

となり，これは確かに正 17 角形の頂点と一致する。

■

次に，

$$z^{17} = 1$$

より

$$(z-1)(z^{16} + z^{15} + z^{14} + \mathrm{L\ L} + z + 1) = 0$$

$z \neq 1$より，

$$z^{16} + z^{15} + z^{14} + \cdots\cdots + z + 1 = 0 \qquad ①$$

であることに注意する。

５．正 17 角形の作図

正 17 角形の作図をするために，$\cos\dfrac{360°}{17}$が高々平方根だけを用いて表せることを示す。

＜目標＞

$2\pi = 17\varphi$とおいて，
$\cos\varphi = \cos\dfrac{2\pi}{17}$を高々平方根だけを用いて表せることを示す。

①から，zの実数部分に着目すると，

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 16\varphi = -1$$

また，

$$\cos n\varphi = \cos(17-n)\varphi$$

に注意[2]すると，

$$2(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 8\varphi) = -1$$

よって，

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 8\varphi = -\frac{1}{2}$$

さらに，

$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = a$$
$$\cos 2\varphi + \cos 8\varphi = b$$

---

[1] ただし，$\sin 72°$を求めさせることは無理がある。なぜならば，計算の過程でルートがどこまでも追いかけてくるから。(c.f.チェビシェフの多項式)

[2] 幾何的には，複素数平面上で，２点z^1とz^{16}，２点z^2とz^{15}，・・・，２点z^8とz^9はそれぞれx軸に関して対称である。

$$\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = c$$
$$\cos 6\varphi + \cos 7\varphi = d$$

とおく[3]。さらに,

$$a + b = e\ ,\ c + d = f$$

とおくと,

$$e + f = (a+b) + (c+d)$$
$$= \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 8\varphi$$
$$= -\frac{1}{2}$$

すなわち,

$$e + f = -\frac{1}{2} \qquad ②$$

また，積和の公式

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

に注意して，次の式を計算する。

$$\begin{aligned} 2ab &= 2(\cos\varphi + \cos 4\varphi)(\cos 2\varphi + \cos 8\varphi) \\ &= 2\cos\varphi\cos 2\varphi + 2\cos\varphi\cos 8\varphi + \\ &\qquad 2\cos 4\varphi\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi\cos 8\varphi \\ &= \cos(\varphi + 2\varphi) + \cos(\varphi - 2\varphi) + \\ &\qquad \cos(\varphi + 8\varphi) + \cos(\varphi - 8\varphi) + \\ &\qquad \cos(4\varphi + 2\varphi) + \cos(4\varphi - 2\varphi) + \\ &\qquad \cos(4\varphi + 8\varphi) + \cos(4\varphi - 8\varphi) \\ &= \cos 3\varphi + \cos\varphi + \cos 9\varphi + \cos 7\varphi + \\ &\qquad \cos 6\varphi + \cos 2\varphi + \cos 12\varphi + \cos 4\varphi \\ &= \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots\cdots + \cos 8\varphi \\ &= e + f = -\frac{1}{2} \qquad ③ \end{aligned}$$

同様に $2ac, 2ad, 2bc, 2bd, 2cd$ を計算すると

$$2ac = 2a + b + d$$
$$2ad = b + c + 2d$$
$$2bc = a + 2c + d$$
$$2bd = a + 2b + c$$

よって,

$$2ac + 2ad + 2bc + 2bd = 4(a+b+c+d)$$
$$= 4(e+f) = -2$$

また，左辺を因数分解すると,

$$2(a+b)(c+d) = -2$$
$$(a+b)(c+d) = -1$$

すなわち,

$$ef = -1 \qquad ④$$

②，④より２次方程式

$$t^2 + \frac{1}{2}t - 1 = 0$$

を解くと，$e > f$ であるから

$$e = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\ ,\quad f = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

よって，a，b について，③に注意して

$$a + b = e$$
$$ab = -\frac{1}{4}$$

であるから，２次方程式

$$t^2 - et - \frac{1}{4} = 0$$

を解くと，$a > b$ から,

$$a = \frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$
$$b = \frac{1}{2}e - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

同様にして,

$$c = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$
$$d = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

さらに,

$\cos\varphi$ と $\cos 4\varphi$ に関して,

$$2\cos\varphi\cos 4\varphi = \cos 5\varphi + \cos 3\varphi = c$$

であるから,

$$\cos\varphi\cos 4\varphi = \frac{1}{2}c$$
$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = a$$

だから，２次方程式

$$t^2 - at + \frac{1}{2}c = 0$$

[3] 各 cos について，このおき方がこの中心となる解法である。すなわち，φ の４倍で組み合わせると，φ から 8φ の全てを表すことができる。c，d は $\cos 3\varphi + \cos 12\varphi = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi$，$\cos 6\varphi + \cos 24\varphi = \cos 6\varphi + \cos 7\varphi$ である。しかし，３倍，５倍，６倍，７倍等ではうまくいかない。

の解が，$\cos\varphi$ と $\cos 4\varphi$ になる。
よって，$\cos\varphi > \cos 4\varphi$ であるから

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}c}$$

$$\cos 4\varphi = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}c}$$

ここで，根号の中の計算を簡単にするために，

$$a^2 = (\cos\varphi + \cos 4\varphi)^2$$

$$= \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi$$

よって，

$$2a^2 = 2(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi)$$

$$= 2\cos^2\varphi + 4\cos\varphi\cos 4\varphi + 2\cos^2 4\varphi$$

$$= \cos 2\varphi + \cos 0 + 2c + \cos 8\varphi + \cos 0$$

$$= b + 2c + 2$$

すなわち，

$$2a^2 = b + 2c + 2$$

であるから，

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c}$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$ [4]

以上より，$\cos\varphi$ の値は，高々平方根で表すことができるから，定規とコンパスを用いて正 17 角形を作図することができる。■

6．まとめにかえて

正 100 角形までの作図可能な正多角形は，正三角形，正方形，正五角形，正六角形，正八角形，正十角形，正十二角形，正十五角形，正十六角形，正十七角形，正二十角形，正二十四角形，正三十角形，正三十二角形，正三十四角形，正四十角形，正四十八角形，正五十一角形，正六十角形，正六十四角形，正六十八角形，正八十角形，正八十五角形である。とくに，n が素数のとき，正 n 角形の作図可能性については，n がフェルマー素数に限られる。ここで取り上げた正 17 角形は，まさにそのフェルマー素数[5]の一つであり，作図可能なものは，正 3 角形，正 5 角形，正 17 角形，正 257 角形，正 65537 角形の 5 種類である。

これらをフェルマー素数で分類すると次のようになる。

$P = 2^{2^m} + 1$ の形をした素数（m は正の整数）である。
$m = 0$ のとき，$P = 3$ より正三角形が作図できる。
よって，正 3，6，12，24，48，96 角形が作図できる。
$m = 1$ のとき，$P = 5$ より正五角形が作図できる。
よって，正 5，10，20，40，80 角形が作図できる。

【参考文献】

・『近世数学史談』（高木貞治著　共立出版）
・『高校から大学への接続』（飯高 茂著　論理力と数学力を向上させるための数学教育の研究（数学教育の会 数学教育研究第 10 号））

4 近似値は，0.932472229･･･である。

5 1665 年，フェルマーによって，$2^{2^m} + 1$ の形をした素数（m は正の整数）である。現在，$m = 0,1,2,3,4$ の 5 種類が分かっている。$m = 5$ の場合，
$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$
となり，素数ではないことが，1732 年にオイラーにより示された。

S. 3-2 正規分布の平均の推定

関連分野	: 統計分野
高等数学	: 統計
対象学年	: 高校 3 年生
関連単元	:「統計処理」(数学 C)
教 材 名	:「正規分布の区間推定」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

数理統計学で学習する正規分布の平均の推定について、高校3年生を対象とした教材として，Microsoft Excel を用いて正規分布の数表やグラフを作成することで，正規分布による統計処理の重要性，性質について学び，最後に信頼区間の構築についても数値実験を交えた学習をすることを提案する。数理統計の基本的な概念（正規分布等の基礎知識）についてはある程度既習であることを仮定し，ここではあえて区間推定に注目して教材を作成した。

S. 3-2. 1 連続型の確率分布に従う確率変数

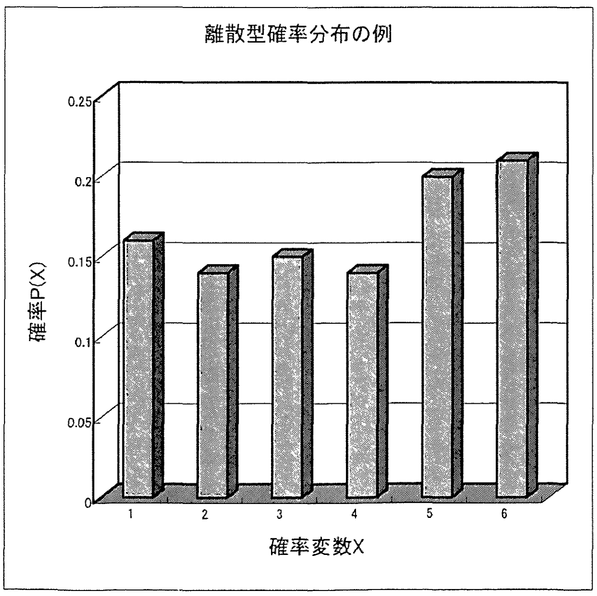
確率分布とは，ある確率変数に対して，起こりうる確率をグラフ化したものであり，離散型の確率分布と連続型の確率分布がある。

離散型の確率分布とは，例えば，サイコロを振ったときに出る目を X としたときに，その確率 $P(X)$ をグラフ化したものが離散型の確率分布と言える。

<u>離散型の分布の例</u>

確率変数 X ：サイコロの出る目

確率 $P(X)$ ：100 回の試行での確率



また，連続型の確率分布に従う確率変数の例として挙げられるのは，次のようなものが考えられる。つまり，確率変数の取りうる値が，サイコロの目のようにとびとびの値ではなく，すべての実数値を考えるようなときに連続型の確率分布に従うという。

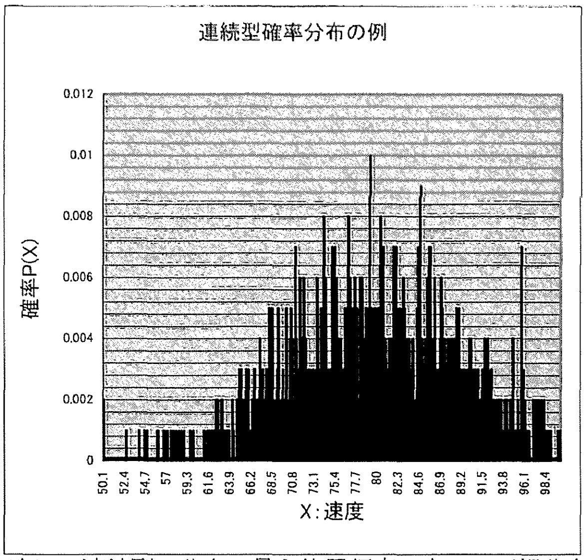
例 1） ある道路で走っている車の速度を確率変数 X とすると，確率変数 X は連続型の分布に従う。

例 2） ある学校における生徒の身長のデータを確率変数 X，体重のデータを確率変数 Y とすると，確率変数 X，Y は連続型の分布に従う。

<u>連続型の分布の例</u>

確率変数 X ：ある道路で走っている車の速度

確率 $P(X)$ ：1000 個のデータでの確率



次に，連続型の分布で最も使用頻度の高い，正規分布の性質について紹介する。

S. 3-2. 2 正規分布 (Normal Distribution) の性質

正規分布は，連続型の分布の中でも，対称性など非常に扱いやすい性質を多く持っている。また，特に中心極限定理から，どのような分布に従うような確率変数だとしても，データの数を大きくすると，その標本平均は正規分布に従うことがわかっていることから，正規分布の解析は非常に重要である。そこで，大学での学びに繋がる教材として，正規分布の様々な重要である性質を基本的な概念から紹介する。

2-1 正規分布の確率密度関数(Probability Density Function)

平均μ、分散σ^2の正規分布に従う確率変数Xの確率密度関数$f(X)$は

$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}}e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

($e=2.718\cdots$: ネイピアの数)　である。

特に，このような正規分布に従う確率変数Xを

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

と書く。

2-2 正規分布の確率分布関数(Probability Distribution Function)

平均μ、分散σ^2の正規分布に従う確率変数Xの確率分布関数$F(X)$は

$$F(X)=\int_{\infty}^{X} f(t)dt$$ と表される。

ただし，$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}}e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

これらのことを，身近なソフトである，Microsoft Excel の組み込み関数を用いて，実際に分布に触れてみる。

使う組み込み関数は,

NORMDIST( )：正規分布の分布関数の値を返す関数

NORMSINV( )：正規分布関数の逆関数の値を返す

RAND( )：0 から 1 までの一様乱数を発生させる

～正規分布の分布関数と密度関数を作ってみよう～

手順①まず Excel シートの一番左から２番目の列に, -2.7~2.7 までの数字を 0.1 刻みでドラッグする。

手順②一番左に NORMDIST( )という関数をすべての行にドラッグし，手順①の数を代入する。

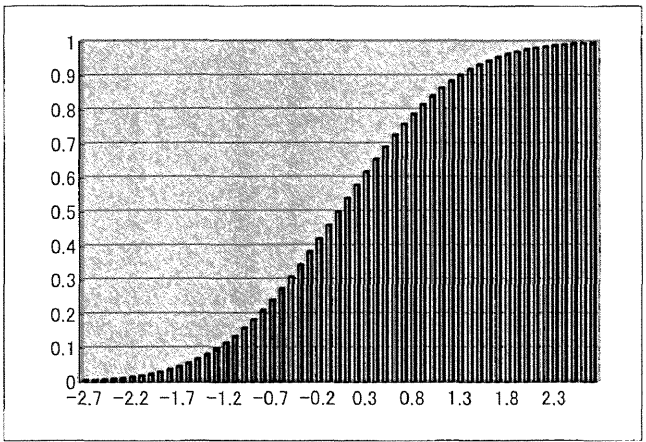
手順③左から３番目の列に一番左の列の２項分の差をすべての行にドラッグする。

手順④一番左の列をヒストグラムのグラフにすると，分布関数，一番右の列のヒストグラムが確率密度関数となる。

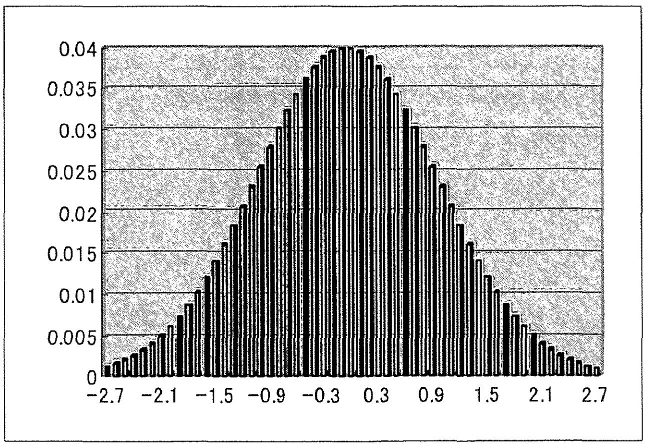
NORMSDIST()	確率変数 X	確率密度
0.003467023	−2.7	0.001194199
0.004661222	−2.6	0.001548458
0.00620968	−2.5	0.001987849
0.008197529	−2.4	0.002526552
0.010724081	−2.3	0.003179318
0.013903399	−2.2	0.003960959
0.017864357	−2.1	0.004885705
0.022750062	−2	0.005966431
0.028716493	−1.9	0.007213773
0.035930266	−1.8	0.008635166
0.044565432	−1.7	0.010233858
0.054799289	−1.6	0.012007939
0.066807229	−1.5	0.013949482
0.080756711	−1.4	0.016043838
0.096800549	−1.3	0.018269182
0.115069732	−1.2	0.02059637
0.135666102	−1.1	0.022989158
0.15865526	−1	0.025404832
0.184060092	−0.9	0.027795242
0.211855334	−0.8	0.030108245
0.241963578	−0.7	0.032289486
0.274253065	−0.6	0.034284468
0.308537533	−0.5	0.036040771
0.344578303	−0.4	0.037510339
0.382088643	−0.3	0.03865167
0.420740313	−0.2	0.039431792
0.460172104	−0.1	0.039827895
0.5	0	0.039827896
0.539827896	0.1	0.039431792
0.579259687	0.2	0.03865167
0.617911357	0.3	0.037510339
0.655421697	0.4	0.036040771
0.691462467	0.5	0.034284468
0.725746935	0.6	0.032289486
0.758036422	0.7	0.030108245
0.788144666	0.8	0.027795242
0.815939908	0.9	0.025404832
0.84134474	1	0.022989158
0.864333898	1.1	0.02059637
0.884930268	1.2	0.018269182
0.903199451	1.3	0.016043838
0.919243289	1.4	0.013949482
0.933192771	1.5	0.012007939
0.945200711	1.6	0.010233858
0.955434568	1.7	0.008635166
0.964069734	1.8	0.007213773
0.971283507	1.9	0.005966431
0.977249938	2	0.004885705
0.982135643	2.1	0.003960959
0.986096601	2.2	0.003179318
0.989275919	2.3	0.002526552
0.991802471	2.4	0.001987849
0.99379032	2.5	0.001548458
0.995338778	2.6	0.001194199
0.996532977	2.7	0.000911832
0.997444809	2.8	

注）ここでは，0.1 刻みのヒストグラムにしたが，これを 0.01，0.001 刻みのヒストグラムにすることで，離散型の分布と連続型分布の考え方の違いがより明確になる。そして，この作業を通して，分布関数と確率密度関数の関係が，微積分の関係があることだけではなく，確率の意味で分布をとらえることができる。実際に自分で数値を実験的に解析してみることで，分布論の本質を見ることができる教材として使えるだろう。

一番左の列のヒストグラム
（確率分布関数のイメージ）



一番右の列のヒストグラム
（確率密度関数のイメージ）



このヒストグラムでわかるとおり，密度関数の一つ一つの棒はすべて確率を表現している。つまり，この分布からわかることは，横軸に並べられた数値がとられる確率が，その分布によって制御されるということである。そこで，正規分布に従う数値を扱う題材として，数値実験の基本となる，正規分布の数表を作成する。

～標準正規分布の数表を作ってみよう～

手順①　一番左の列に 0.01 から 1.00 まで 0.01 刻みで数値を入れる。

手順②　2 列目に NORMSINV(　) という関数を入れる。

確率	パーセント点	確率	パーセント点
	NORMSINV()		NORMSINV()
0.01	-2.33	0.51	0.03
0.02	-2.05	0.52	0.05
0.03	-1.88	0.53	0.08
0.04	-1.75	0.54	0.10
0.05	-1.64	0.55	0.13
0.06	-1.55	0.56	0.15
0.07	-1.48	0.57	0.18
0.08	-1.41	0.58	0.20
0.09	-1.34	0.59	0.23
0.10	-1.28	0.60	0.25
0.11	-1.23	0.61	0.28
0.12	-1.17	0.62	0.31
0.13	-1.13	0.63	0.33
0.14	-1.08	0.64	0.36
0.15	-1.04	0.65	0.39
0.16	-0.99	0.66	0.41
0.17	-0.95	0.67	0.44
0.18	-0.92	0.68	0.47
0.19	-0.88	0.69	0.50
0.20	-0.84	0.70	0.52
0.21	-0.81	0.71	0.55
0.22	-0.77	0.72	0.58
0.23	-0.74	0.73	0.61
0.24	-0.71	0.74	0.64
0.25	-0.67	0.75	0.67
0.26	-0.64	0.76	0.71
0.27	-0.61	0.77	0.74
0.28	-0.58	0.78	0.77
0.29	-0.55	0.79	0.81
0.30	-0.52	0.80	0.84
0.31	-0.50	0.81	0.88
0.32	-0.47	0.82	0.92
0.33	-0.44	0.83	0.95
0.34	-0.41	0.84	0.99
0.35	-0.39	0.85	1.04
0.36	-0.36	0.86	1.08
0.37	-0.33	0.87	1.13
0.38	-0.31	0.88	1.17
0.39	-0.28	0.89	1.23
0.40	-0.25	0.90	1.28
0.41	-0.23	0.91	1.34
0.42	-0.20	0.92	1.41
0.43	-0.18	0.93	1.48
0.44	-0.15	0.94	1.55
0.45	-0.13	0.95	1.64
0.46	-0.10	0.96	1.75
0.47	-0.08	0.97	1.88
0.48	-0.05	0.98	2.05
0.49	-0.03	0.99	2.33
0.50	0.00	1.00	

(注) ここでは便宜上 0.01 刻みで数表を作成したが，数値実験を行う上では 0.001 刻みで数表を作成したほうが良いことは言うまでもない。

また，数値実験などに使う，正規乱数の発生も Microsoft Excel で実際に簡単にできるので，教材として紹介する。

~Excel で正規乱数を発生させる~

NORMINV(RAND(), μ, σ)と入れると，簡単に正規乱数を発生することが可能である。ここで，μ は正規分布の平均，σ は標準偏差である。

-1.01287	-0.7195	1.198403
1.79929	0.193525	-1.10126
0.809171	1.435187	0.758695
0.191316	-0.51435	-0.17416
0.644748	-0.83152	-0.96971
-0.77739	2.027964	0.643789
0.64574	0.88836	-1.23184
-0.31891	-1.11545	0.479009
-1.29551	-1.54826	0.032413
-0.07608	-0.71517	-0.2539
1.304934	-0.58478	0.453766

(発生させた正規乱数<平均０，分散１>の例)

また，ここでの話は，Excel の分析ツールというアドインを用いても簡単に同様のことが可能ではあるが，そのような専門的なソフトを用いることなく，手軽に解析ができるというのが，ポイントである。

ここで，どのような確率変数についても成立する，中心極限定理という重要な定理について触れておく。

2-3 中心極限定理(Central Limit Theorem)

平均(mean) μ、分散(Variance) σ^2 である同一の分布に独立に従う，n 個の確率変数，$X_1, X_2, \cdots X_n$ について，

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ の分布は，$n \to \infty$ のとき，

平均 μ，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布で近似される。

この定理があるからこそ，様々な統計処理において正規分布を用いることが重要であるといえる。わかりやすく言えば，標本数を極端に大きくすれば，その分布は正規分布に従うことがわかる，ということである。標本数がある程度多くあれば，正規分布での推定論，検定論で議論を進めることができる。

S. 3-2. 3 正規分布の標準化と標本分布

次に，正規分布の平均，分散についてのいくつかの重要な性質と，確率変数の変換についての性質をまとめておく。

3-1 平行移動

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，

$$X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

となる。

3-2 拡大(Expand)・縮小(Shrink)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，

$$aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$$

となる。

(証明)

確率変数を定数倍しても正規分布に従うことは明らかであるので，変数変換したあとの平均，分散について計算して示す。

平均について，

$E(aX) = aE(X) = a\mu$

分散について，

$Var(aX) = (E(aX))^2 - E((aX)^2)$

$= (aE(X))^2 - a^2E(X^2)$

$= a^2((E(X)) - E(X^2))$

$= a^2Var(X)$

$= a^2\sigma^2$

よって，$aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$

3-3 正規分布の再生性(Reproduce Property)

確率変数 X，Y がそれぞれ独立であり，

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ のとき，

$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2)$

が成立する。

証明)

確率変数 $X + Y$ が正規分布に従うことは密度関数の変数変換から明らかである。

平均について，

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu_1 + \mu_{2_2}$

確率変数 X，Y がそれぞれ独立なので，共分散は，

$Cov(X,Y) = E(X)E(Y) - E(XY) = 0$

分散について，

$$Var(X+Y) = \left(E(X+Y)\right)^2 - E\left((X+Y)^2\right)$$
$$= \left(E(X)+E(Y)\right)^2 - E(X^2+2XY+Y^2)$$
$$= \left(\left(E(X)\right)^2 + \left(E(Y)\right)^2 + 2E(X)E(Y)\right)$$
$$- E(X^2) - 2E(XY) - E(Y^2)$$
$$= Var(X) + Var(Y) + Cov(XY)$$
$$= {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2$$

以上のことから，平均の推定論でもっとも重要となる，正規分布の標準化と，標本平均の分布が考えられる。

3-4 正規分布の標準化

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

となる。

3-5 標本平均の分布

ある正規母集団から，とられた n 個の確率変数，$X_1, X_2, \cdots X_n$ がすべて独立に同一の (Identically Independent Distribute) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとするとき，標本平均(Sample mean),

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$ の分布は,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。

S. 3-2. 4 分散が既知の場合での区間推定

問）ある正規母集団からとられた n 個の確率変数，$X_1, X_2, \cdots X_n$ がすべて独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする。分散を既知とするとき，μ に関する信頼水準９５％の信頼区間(Confidence Interval)を構築せよ。

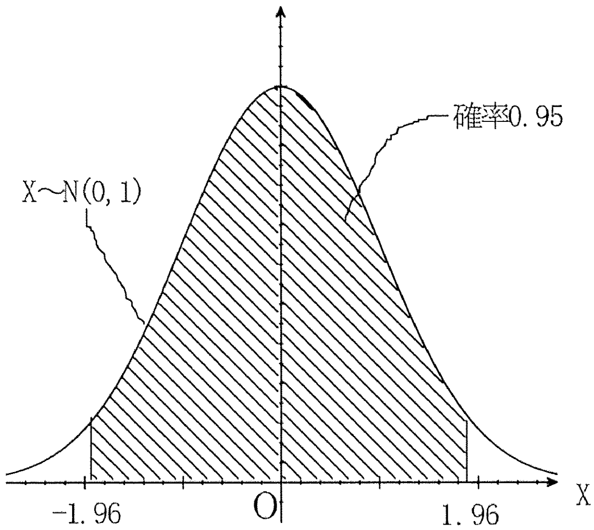
(解) 3-5 より標本平均,

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$ の分布は,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる。

ここで，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$ より，下図の確率から，



$$P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \overline{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 0.95$$

となるので,

$$\overline{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \overline{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

が求める９５％信頼区間となる。

例) 実際に正規乱数 (平均１分散４) を発生させて, Excel を用いて, 数値実験を行ってみる。データの数を１００，１０００，１００００と数を増やして信頼区間を構築する。使う正規乱数は上記の組み込み関数,
NORMINV(RAND(), 1, 2) <平均１, 分散２の正規乱数を発生させる関数>を使う。数値を簡単に作り出せるので，生徒も非常に簡単に数値解析に触れることができた。

Table 1 データ数　１００

2.413282
−0.65428
0.800204
4.495934
2.048252
4.913956
・
・
・
4.632549
2.51214

標本平均	97.5%点
1.105933	1.959961

下限	信頼区間	上限
0.713941	$<\mu<$	1.497925

Table 2 データ数　１０００

0.829911
3.61708
2.892804
−0.17975
3.50322
1.047332
0.639729
2.258159
・
・
・
4.449895
−1.65699

標本平均	97.5%点
0.895189	1.959961

下限	信頼区間	上限
0.77123	$<\mu<$	1.019147

Table 2 データ数　１００００

1.433456
−0.33401
3.315219
−0.66667
−0.17811
1.448824
1.690829
1.590346
・
・
・
2.900598
−3.38566

標本平均	97.5%点
1.003615	1.959961

下限	信頼区間	上限
0.964416	$<\mu<$	1.042814

この数値実験の結果からわかることが，
「データ数nが大きければ多いほど，その信頼区間の幅が狭くなっていく」
ということである。この現象は，分散が既知のときでももちろん起こる話で，このような数値実験（シミュレーション）をすることでより明確になっている。この信頼区間の話でもっとも重要なのは，以下２つの問題点にある。

- 分散が既知のときでのみ，この信頼推定が可能である。逆に言うと，分散が未知のときは，標本分散を使った分散の推定が必要である。そして，それには，

  χ^2 分布，ｔ分布，Ｆ分布の導入が必要となる。
- 区間幅が固定でないため，データ数が少ないときには，明らかに区間幅が広くなってしまう。極端な話をすると，「信頼水準９５％で推定しているのにもかかわらず，その確率を満たす区間幅が-10〜10 となっては推定の意味がない（区間幅が広すぎては推定の議論として意味がない）」ということになる。

従って，この先の議論は，まずは分散が未知のときの推定はどのように行うのか，ということ，そして，区間幅を固定して考えなければならない場合，どのような推定理論が必要なのかを考える必要がある。

分散が未知のときの推定は，上述の通り非正規の分布を導入して，そのパーセント点を用いて区間推定を行う。

区間幅が固定の場合，サンプル数をどのように設定すれば良いか，という議論になり，それは逐次推定論，逐次検定論に帰着することになる。また，「分散が未知，かつ区間幅を固定」という条件においては，標本数の設定で，未知パラメータの推定を段階的に行うことで，信頼区間の構築をしていくという議論が必要となる。

しかし，推定理論においては，まずは正規分布の信頼区間の構築ができれば，すべて同じような議論が，他の分布に従うような確率変数についても同様の議論ができるだけでなく，点推定や，検定の議論に持ち込むことは非常に容易であることは間違いない。

D3-2. 関数のグラフの描画法（その２）

関連分野：解析分野 高等数学：実解析 対象学年：中学２年～高校３年 関連単元：関数、微積 教材名：グラフ描画

D3-2.1　関数の振る舞いを表現

関数の理解を深めるために、２つの観点からグラフ描画を指導したい。

関数の見方：$\begin{cases}\text{外部変化}\\\text{内部変化}\end{cases}$ を提案する。　パラメータ導入で、関数が‘生きてくる’からである。

(1)　外部変化とは：

関数の式に含まれるパラメータの変化にともなって、関数のグラフを動かすこと。
この揺り動かす操作によって、関数の本質を垣間見ることが可能になる。これは、図形の動的な扱いに対応する関数版といえるものである。パラメータ値１つに関数が１つ対応する関数の集合である。これらのグラフは、パラメータ a に対しての点 $(a, x, f(x))$ の集合である。

（代表例）$y = f(x) = x^2 + kx + 2$ のように、パラメータ k の変化にともなってグラフが変化する様子を観察する。

(2)　内部変化とは：

関数のグラフ上の点を動かすことを考えたものである。点を動かすことで、グラフ上の点の動きにスピードという概念が自然と入ることになる。単なる描画された結果のグラフではなく、点が動いてできる軌跡としてのグラフができる過程を重視し、１つの関数に無限の変化の世界を見るためのものである。

（代表例）$y = x + 1$ を $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ のように、媒介変数 t を導入することで、半直線上、点を動かすことができるようになる。しかも、スピードは自由自在であり、t=0 の現在地も設定自由である。

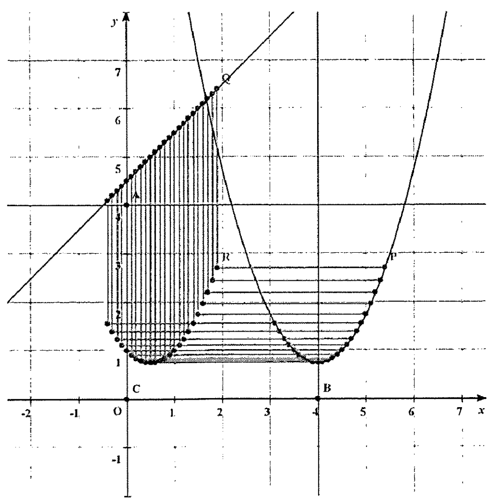
$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$ とすれば、点(1,0)を出発し、放物線 $y = (x-1)^2 + (x-1) + 1$ ・・・①上を動くアニメーションができる。$x = 1$ でのテーラー展開が出現する。表現は無限に可能で、$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2} \\ y = t^2 + \dfrac{3}{4} \end{cases}$ であれば、点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ を起点とした動きができる。これは、①を平方完成した、$y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ である。

外部変化と内部変化の両方の良いとこ取りが、「平面上のグラフの側面図・正面図である」

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2} \\ y = t^2 + \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

xt 座標系で、直線 $x = t + \dfrac{1}{2}$ を描く。その際、見やすいように、y 軸方向に 4 だけ平行移動している。式は、$t = x + \dfrac{9}{2}$　＜正面図＞

ty 座標系で、放物線 $y = t^2 + \dfrac{3}{4}$ を描いている。その際、見やすいように、x 軸方向に 4 だけ平行移動している。式は、$y = (x-4)^2 + \dfrac{3}{4}$ ＜側面図＞



D3-2.2.　側面図・正面図

D3-2.2.1　加算型の関数

駒野（1995）は、日本数学教育学会にて、「２次関数のグラフの構造」で、既に発表済みである。$y=ax^2+bx+c$・・・①のグラフは通常$y=0$から測って、点(t,at^2+bt+c)の集合を描くが、この①を$y=bx+c$を新たな‘基準線’として測り、$y=ax^2$のグラフを描く。　　　　つまり、点$(t,(bt+c)+at^2)$の集合を描けばよい。この‘基準線’という用語は2008年度になって気が付いた。この考えは、「『数学を』教えるのではなく、数学で『生徒を』教育していく」に対応・合致していると考えている。日常、新聞等でもグラフが良く用いられているが、何をもとにしているかを明確にしなければ意味がないことを教えなければならない。例えば、国民所得など０ベースが異なるのに、ものの値段や消費税などについて単純な数値の国際比較を示してみても意味がないことを教えなければいけないだろう。ここにも数学を学校で教える重要性があると確信している。この基準線の考え方は極めて重要である。線形以外の世界を学ぶことが市民として欠かせない理由の一つである。平方完成の場合は、式を‘変身’しているのだが、「そのままでは見えなかったものを見えるようにするためにする一つの工夫に過ぎない」ことを強調しておきたい。

D3-2.2.2　合成型について

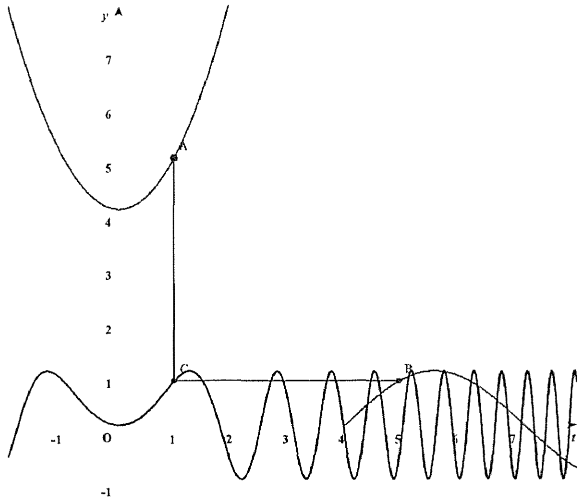
$\boxed{例１}$　$y=\sin x^2$　のグラフを描く

どうしようか、一瞬とまどいを感じると思われる。また、「数学Ⅲ」で、このグラフを描くために、微分しても　$y'=2x\cos x^2$であり、$y'=0$のｘ座標が取りにくい。本質は、合成の微分の指導と考え方に関連するが、媒介変数表示が必要となる。これが、「平面上のグラフの側面図・正面図」である。偶関数よりｙ軸対象であり、$\begin{cases} x^2=t \\ y=\sin t \end{cases}$とおいて、$x\geqq 0$を考えればよい。

図は、フリーソフト Function View を用いたアニメーションである。

左上：$t=x^2$（あ）を見やすく、また作業しやすく$t=x^2+4$と平行移動してある。この（あ）の原点は(0,4)で、xt座標系である。<正面図>

右下：$y=\sin t$（い）を見やすく、また作業しやすく$y=\sin(t-4)$と平行移動してある。この（い）の原点は(4,0)で、ty座標系である。<側面図>



点$(t,\sin t)$をプロットすれば、$y=\sin x^2$のグラフが得られる。ここで、$t=x^2=g(x)$で、$y=\sin t=f(t)=f(g(x))$である。図では、直線AC,BCの交点Cが求める曲線上の点である。

$\boxed{例２}$　$y=\sin x^2$　の微分と合成関数

図は、上記$y=\sin x^2$の合成の微分を理解するために、

３Ｄにしたものである。

ｘyt座標空間において、

①$t=x^2$（平面 y=0 上），

②$y=\sin t$（平面 x=0 上），

③$y=\sin x^2$（平面 t=0 上）の３つが描かれている。

①　から、$dt=2x\,dx$,

②　から、$dy=\cos t\,dt$

③　$dy=\cos t\cdot dt=\cos t\cdot 2x\,dt$ この計算を、図では、$t=x^2=g(x)$で、

$y=\sin t=f(t)=f(g(x))$について、

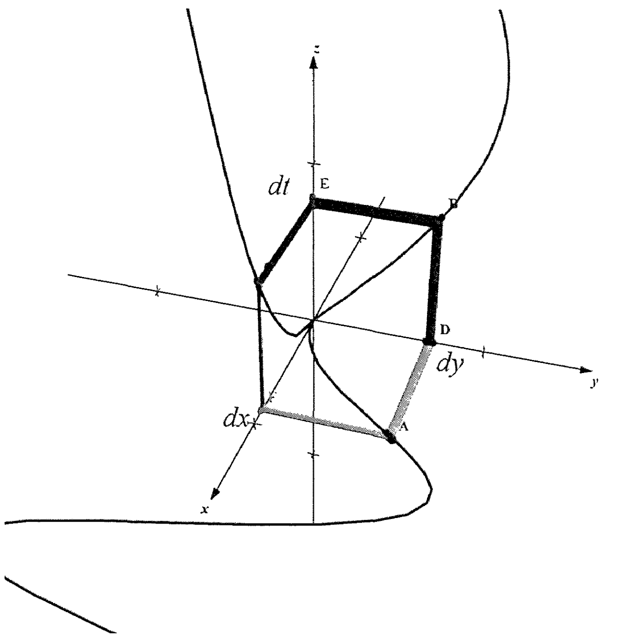
$$dx \xrightarrow{g'} dt \xrightarrow{f'} dy$$

$dy=f'g'dx$

と移っていることを示している。

ここでも、‘微分dy,dx,dt’の表現は重要であると考える。

これが、導関数の$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$では理解しにくい。

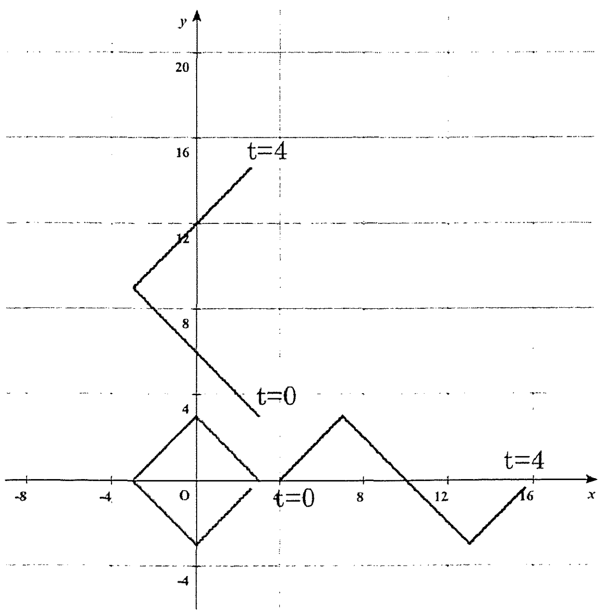


中学では、関数の式を与えずに、グラフのみを与えて作業させる。

例３　中学での例これ１次的な変化とグラフ

図の左上に、x-t グラフ（正面図）、右下に t-y グラフ（側面図）を描いておく。

時間とともに、上下方向の変化が正面図、左右方向の変化が側面図である。４秒間の動きを合成して、x-y のグラフ（平面図）を描かせる。



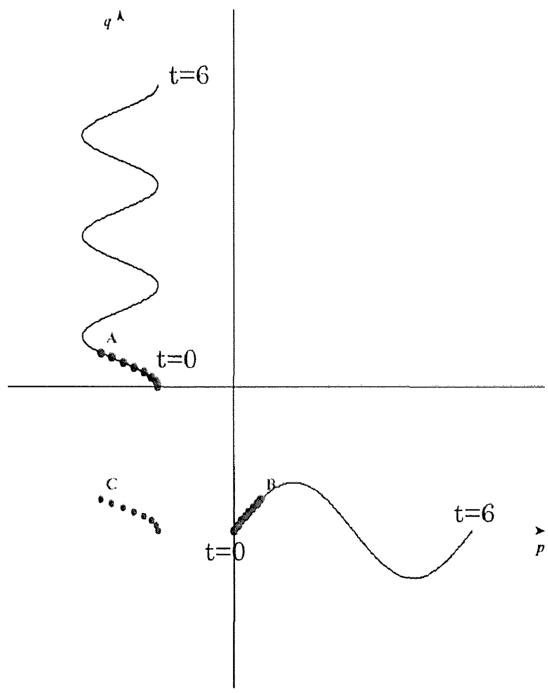
この問題を、中学２年と高校３年に描かせてみると、取りかかりはほぼ変わらないことがわかった。両学年とも、初めは試行錯誤するが、直に読みとれるようになり、正方形を描く。

慣れたころ､少し難しい曲線の合成を考えさせる。

例４　２つの正面図・平面図の曲線

左上に、正面図 s-t グラフ、右下に、側面図 t-y グラフを描いたものを配布する。

６秒間の動きを合成した x-y グラフを描かせる問題である。（リサージュ図形）



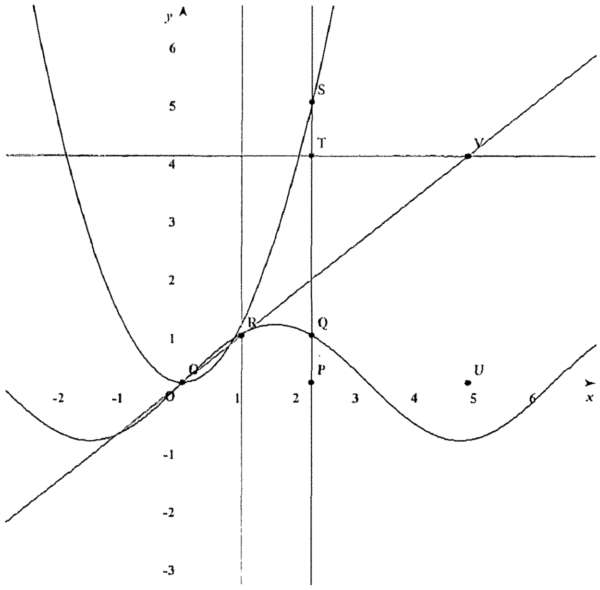
これは少し難しいが、特殊な点を取りながら、グラフが描けることがわかる。

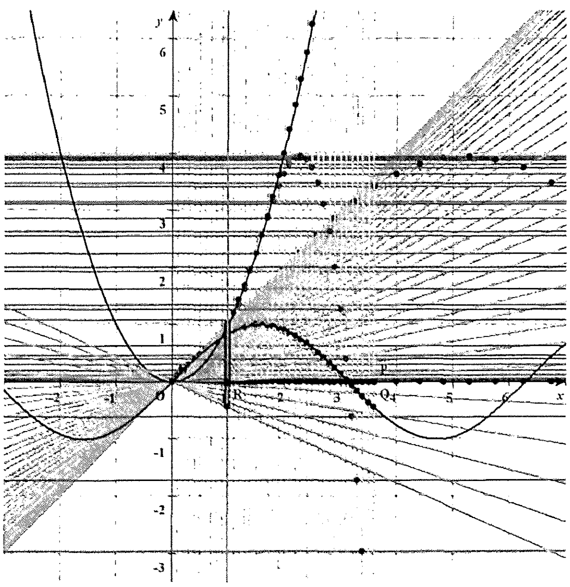
一般に、２次微分までの増減表が書ければグラフは描けるが、大変である。１次微分までの増減表が解答に書いてある書物が多いが、凹凸不明ではグラフは描くのは困難である。しかし、この「正面図・側面図・平面図法」では、中学生にも楽しませることができる。Function View のアニメ機能を実際にプロジェクターで見せると効果が大きい。媒介変数の使い方の布石として大変有効であると考える。

D3-2.2.3　積(商)型について

$y=x^2\sin x$のグラフは、駒野（2008）「グラフ描画の研究」で、‘グラフ制御’の概念を紹介した。このグラフを制御するのは、$y=x^2, y=-x^2$である。ここでは､関数の積の考えで$y=x^2\sin x$のグラフを

描いてみる。関数を媒介変数表示しておく。点 $(t, t^2 \sin t)$ が取れれば OK である。
そこで、$y=(\sin t)x$ のグラフが必要になる。
$\mathrm{P}(t,0)$ から $\mathrm{Q}(t,\sin t)$ を取り、$\mathrm{R}(1,\sin t)$ に平行移動する。原点 O と R を結べば、直線 OR の $y=(\sin t)x$ が得られる。次に、(t,t^2) の点 S を取り、$\mathrm{U}(t^2,0)$ による、$y=(\sin t)x$ の値 $\mathrm{V}(t^2, t^2 \sin t)$ を取る。y 座標が変わらないように、平行移動して、$\mathrm{T}(t, t^2 \sin t)$ をとればよい。
T の軌跡が求めるグラフである。
この方法は、講師の吉田昌裕氏の‘相似’アイデアによって完成した。





商の関数やルート付きの関数についても同様なグラフの描画法ができる。

引用・参考文献

駒野誠（2008）数学教育学会春季発表論文集
「グラフ描画の研究」

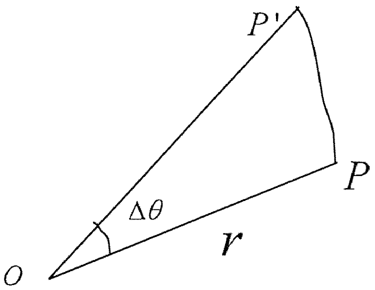
D3-3　曲線と面積

関連分野：解析分野，幾何分野
高等数学：複素関数論
対象学年：高校３年生
関連単元：微分積分（数学Ⅲ）
教材名：「面積」

D3-3.1.　媒介変数表示の関数と面積

平面上、点Pの動きと線分 OP の通過領域の面積を考える。

$\angle P'OP = \Delta\theta$ （極めて微小な角）のとき、図の図形 $P'OP$ の面積 ΔS を三角形と見なして考えるには２通りある。



（その１）三角形の公式から

$\Delta S = \Delta OPP' = \frac{1}{2} r \cdot (r + \Delta r) \sin \Delta\theta$

ここで、$\Delta\theta \to 0$ のとき、$\Delta r \to 0$，$\sin \Delta\theta = \Delta\theta$ と考え、$\Delta S = \Delta OPP' = \frac{1}{2} r \cdot (r + \Delta r) \sin \Delta\theta$

$\Delta S = \Delta OPP' = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

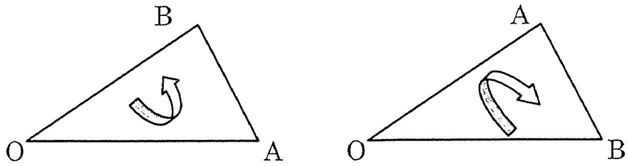
よって、$\angle POx = \alpha$ から $\angle POx = \beta$ のとき、

$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta$　で求められる。

しかし、$\angle POx = \theta$　でない場合は、使用不可であることに注意。

（その２）平行四辺形の半分

そのため符号付き面積の準備をしておく。



O を原点、２点 A(a,b),B(c,d)をとり、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ が１次独立のとき、

符号付き△OAB の面積S＝$\frac{1}{2}(ad - bc)$

単に面積の場合は、$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$ とする。

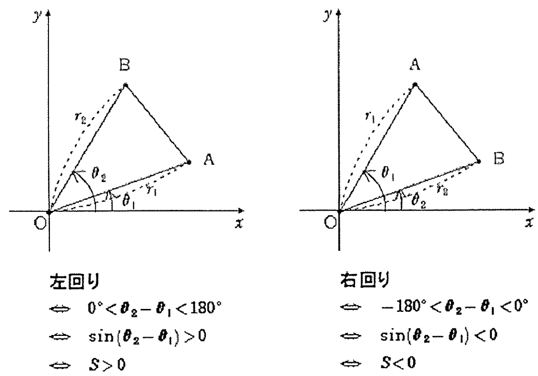
証明）OA,OB の長さを r_1, r_2 とし、A,B の偏角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする。ただし、$-\pi < \theta_1 - \theta_2 < \pi$，$\theta_1 \neq \theta_2$ とする。

$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$

これより、$\theta_1 < \theta_2$ のとき、S>0　，

$\theta_1 > \theta_2$ のとき、S<0 である。

$$S = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)$$
$$= \frac{1}{2} (r_1 \sin\theta_1 \cdot r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1 \cdot r_2 \sin\theta_2)$$
$$= \frac{1}{2}(ad - bc) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \blacksquare$$



（その３）１次独立な２つのベクトル

その２における $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ に対応するベクトルとして、曲線上の点をPとしたとき、$\overrightarrow{OP}$ とPでの接線ベクトル $\overrightarrow{v_P}$ （点Pでの速度ベクトル）を考える。

$$dS = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & \frac{dx}{d\theta} \\ y & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} d\theta = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} \right) d\theta$$

これによって、媒介変数 θ で表される動点 P(x,y)が描く曲線 C（$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$）と線分 OA（$\theta = \alpha$），OB（$\theta = \beta$）で囲まれた図形の面積 S を求めるためのすぐれた次の公式（Gauss-Green の定理）が得られる。

$A(x(\alpha), y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$ これらが、原点から見て左回りのとき、

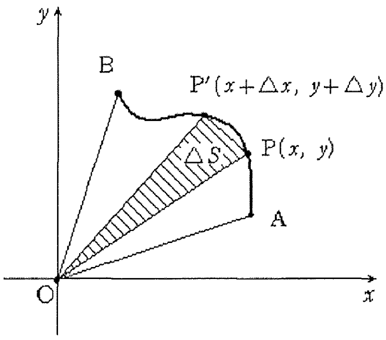
$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\{x(\theta)y'(\theta)-x'(\theta)y(\theta)\}d\theta$$

逆の右回りの場合は、この値は負となる。

(速度ベクトルを用いない証明)

AB 間の任意の点 P(x,y)から微小な変化した点を P'(x＋Δx,y＋Δy)とする。

すると、OP, OP'で増加した面積ΔS は、

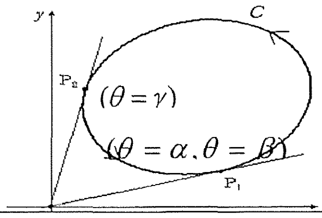


$$\Delta S=\frac{1}{2}\{x(y+\Delta y)-(x+\Delta x)y\}=\frac{1}{2}(x\cdot\Delta y-\Delta x\cdot y)$$

よって、$\theta\to 0$ のとき、$\dfrac{dS}{d\theta}=\dfrac{1}{2}\left(x\dfrac{dy}{d\theta}-\dfrac{dx}{d\theta}y\right)$

ゆえに、$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$ ■

右の図の例で、この定理を使うと、くりぬくので、次のようになる。



$P_1(x(\alpha))\to P_2(x(\gamma))\to P_1(x(\beta))$ のとき、

$$S=\int_\alpha^\gamma \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$$
$$-\int_\gamma^\beta -\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta$$

D3-3.2 $S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta$ との違い

媒介変数表示された曲線上の点Pについて、$\angle POx=\theta$ でない場合は、$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta$ は使えない。

この場合には、普通に $\int_p^q ydx$ や $\int_a^b xdy$ を置換積分して求めるか、ガウス・グリーンの定理を用いて求めるかである。

具体例で見てみよう。

【例題】変数 θ は、$0\leqq\theta\leqq\frac{1}{2}\pi$ とする。点P$(\cos\theta,\sin\theta)$における単位円の接線をℓ とし、Pとの距離が θ である ℓ 上の２点のうち、原点Ｏ とPを通る直線に関して点 A(1,0)と同じ側にある点をQ(x,y)とする。θ が上の範囲を動くときQの描く曲線と x 軸, y 軸, および直線 y=1 とで囲まれる図形の面積をＳとする。

解答) 点 Q(x,y)を求める：OQ= θ であるから、

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix}\cos(\theta-\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=\cos\theta+\theta\sin\theta\\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta\end{cases}$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\theta\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=\theta\sin\theta$ より、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}((\cos\theta+\theta\sin\theta)\theta\sin\theta-(\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\theta^2d\theta=\left[\frac{\theta^3}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{48}\quad(答)$$

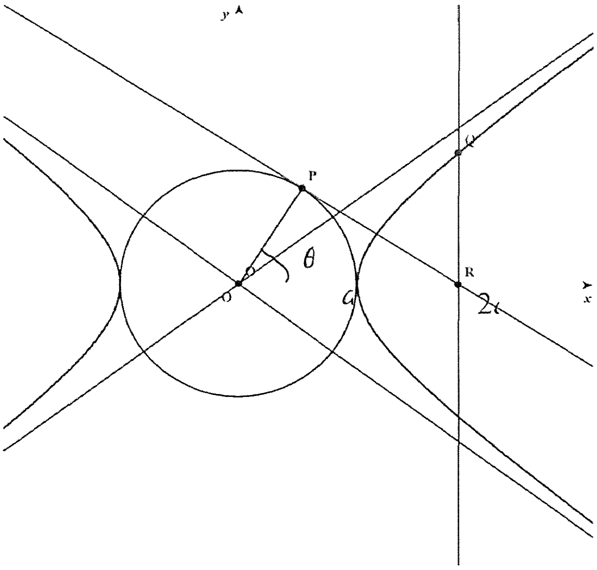
もちろん、$\int_0^1 x\,dy$ からでも計算できるが、計算量が多い。

(2) 公式$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta$ を使えない場合の例

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を媒介変数表示すると、

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から、曲線上の点Q(x,y)は

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$$ と表せる。$\angle QOx \neq \theta$ であるから、



$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2 d\theta$ は使用できない。漸近線 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 、

$\angle POx=\theta$ のとき、P での接線は、

$x\cos\theta + y\sin\theta = a$ と x 軸との交点が R である。

よって、双曲線上の点 Q は、$\angle QOx \neq \theta$ である。

$\boxed{\text{問題}}$ ①の $a \leqq x \leqq 2a$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$S=\int_a^{2a} ydx$ では、計算が大変である。

$\boxed{\text{解法1}}$ $S=\int_a^{2a} ydx$ $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ より、

$x: a \to 2a$ のとき、$\theta: 0 \to \dfrac{\pi}{3}$

$$dx = \left(-\frac{a}{\cos^2\theta}\right)(-\sin\theta)d\theta$$

よって、$S=\int_a^{2a} ydx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} b\tan\theta \cdot \dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{ab\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta = ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta - ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

ここで、2 つの積分について

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\log(1-\sin\theta)+\log(1+\sin\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2 = \log(2+\sqrt{3})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta$$

ここで、$\sin\theta = t$ とおくと、$\cos\theta d\theta = dt$

$\theta: 0 \to \dfrac{\pi}{3}$ のとき、$t: 0 \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

被積分関数

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \left(\frac{1}{(1-t)(1+t)}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t)(1+t)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$$

ゆえに、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}-\log|1-t|+\log|1+t|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\log\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

よって、求める面積は、

$$S=ab\sqrt{3}+\frac{ab}{2}\log(2+\sqrt{3}) - ab\log(2+\sqrt{3})$$

$$=\{\ \sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})\ \}ab$$ (答)

$\boxed{\text{解法2}}$ <ガウス・グリーンの定理より、線分OQとx軸と曲線とで囲まれた図形の面積を求め、三角形ORQから引くと、面積Sが求まる>

$$ab\sqrt{3}-S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left\{x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{b}{\cos^2\theta}-b\tan\theta\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab}{2}\cdot\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{ab}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

よって、$S=ab\sqrt{3}-\dfrac{ab}{2}\log(2+\sqrt{3})$　　(答)

ガウス・グリーンの定理のすごさを示す例でもある。以上は、数学Ⅲの授業(2008)で実践した事柄である。また、媒介変数表示のグラフの'増減法を用いない'描き方については、参考文献参照のこと。

D3-3.3　2次関数に適用する

$\boxed{\text{問題}}$ $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$ 交点 A(-1,1), B(2,4)、曲線 $y=x^2$ 上の点 P(x,y)

を媒介変数表示すると、P：$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$

囲まれた図形は、定点Aと動点Pを結ぶ線分が掃く図形と考えられる。<新しいアイデア>

$\overrightarrow{AP}=(t+1,t^2-1)$, $\vec{v}_P=(1,2t)$

ガウス・グリーンの定理によって、

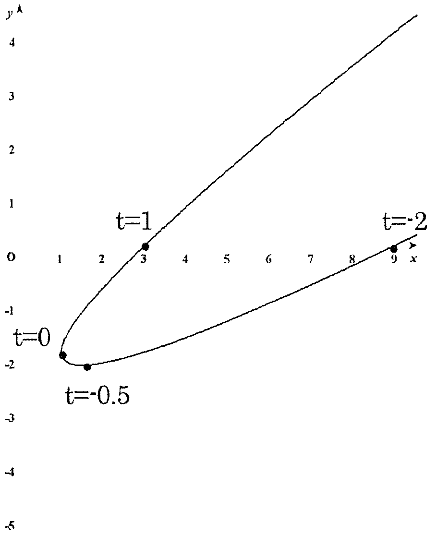
$$S=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\{(t+1)2t-(t^2-1)\cdot 1\}dt=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}(t+1)^2dt=\frac{9}{2}$$

陽関数を媒介変数表示にできれば面積は求められる。例えば、2曲線上の2動点を結ぶ線分が掃く図形の面積など応用場面は多い。

$\boxed{\text{問題}}$ 曲線C $\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=t^2+t-2 \end{cases}$ とx軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

考え方)　まず、曲線Cがどんなグラフになるか。D3-2を参考にして描く。つまり、

$x=2t^2+1$ や $y=t^2+t-2$ をそれぞれ xt 座標平面 ty 座標平面にグラフで描く。それらを合成したグラフが求める曲線Cである。



通常の解法) $\int_1^9(-y)dx-\int_1^3(-y)dx$

$$=\int_0^{-2}(-y)\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{1}(-y)\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_0^{-2}(-y)\frac{dx}{dt}dt+\int_1^{0}(-y)\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_1^{-2}(-y)\frac{dx}{dt}dt=\int_{-2}^{1}y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)\cdot 4t\,dt=9\ \text{(答)}$$

別解)

求める図形の曲線上の点をP、点(3,0)をAとする。$\overrightarrow{AP}=(2t^2-2,t^2+t-2)$，Pでの速度ベクトル $\vec{v}_P=(4t,2t+1)$　，$dS=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2t^2-2 & 4t \\ t^2+t-2 & 2t+1 \end{vmatrix}dt$

$$=\frac{1}{2}\left((2t^2-2)(2t+1)-4t(t^2+t-2)\right)dt$$

$$S=\int_1^{-2}-(t-1)^2dt=\left[-\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^{-2}=9$$

D3-3.4　置換積分と等積変形

上記問題を別の角度から考えてみる。

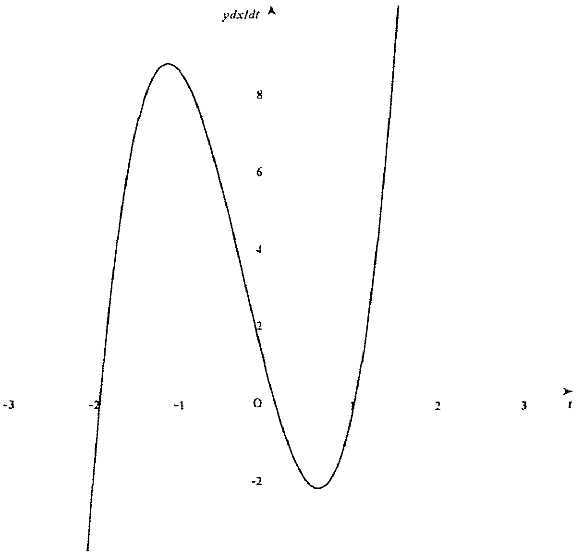
最後の式 $\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)\cdot 4t\,dt$ で面積が求まった。軸

が傾いた放物線とx軸とで囲まれた部分の面積を等積変形の立場で考えるために、

$$\int_1^9 (-y)dx - \int_1^3 (-y)dx = \int_{-2}^1 y\frac{dx}{dt}dt$$ ・・・①

$$\int_{-2}^1 (t^2+t-2)\cdot 4t\,dt$$ ・・・②

グラフで考えてみる。
②のグラフは、次の３次関数である。



これを、t=-2からt=1まで定積分すると、
t=-2（x=9）からt=0（x=1）までが符号付き面積プラスとなり、t=0（x=1）からt=1（x=3）までが符号付き面積マイナスとなる。
問題に与えられた図形は、上記図に符号付き面積に等積変形できたことがわかる。
ちなみに、縦軸は$y\dfrac{dx}{dt}$であり、横軸はtである。ここのように、軸を新たに設定するところが数学の創造的な良さであると考える。

D3-3.4　行列式と等積変形

$\boxed{\text{問題}}$　$y=ax^2$　$(a\neq 0)$・・・①とx軸と$0\leqq x\leqq 1$で囲まれた図形の面積を求める問題を置換積分で考えてみるとどうなるか。

考え方）関数①を媒介変数表示すると、‘無限’に表現式ができる。それは、

①　は、$\begin{cases} x=kt & (k\neq 0) \\ y=ak^2t^2 \end{cases}$　・・・②と変形できる。

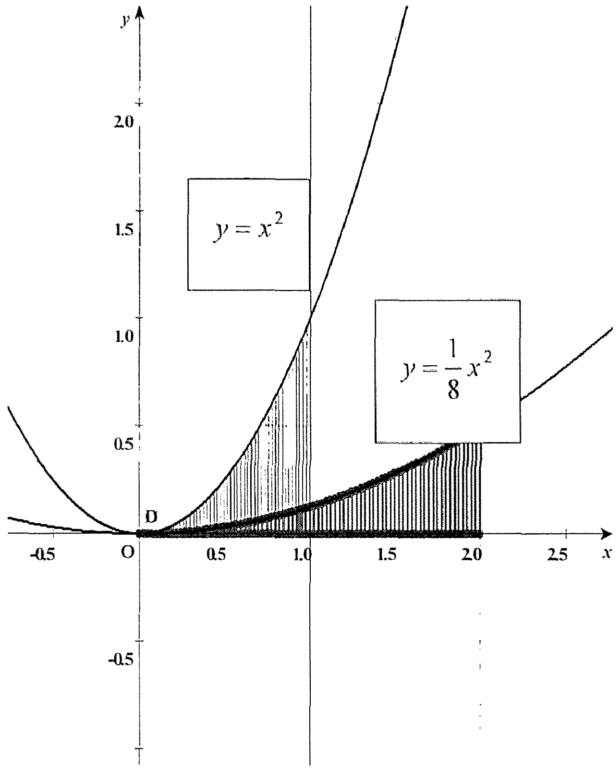
面積S＝$\int_0^1 ax^2dx$　これを②で置換積分すると、

x：0→1のとき、t：0→$\dfrac{1}{k}$であるから、

$$S=\int_0^1 ax^2dx=\int_0^{\frac{1}{k}} a(kt)^2\cdot k\,dt=\int_0^{\frac{1}{k}} ak^3t^2\,dt$$

$=\dfrac{a}{3}$　と求められる。

これを$a=1$，$k=\dfrac{1}{2}$の場合にグラフで確認してみると、①は$y=x^2$で、②は$y=\dfrac{1}{8}x^2$となるから、下図のようになる。



$[0,1]$の部分と$[0,2]$の部分に等積変形されたことが次の計算でも確認できる。

１次変換$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$によって、①が②に変形される。拡大倍率は、$\begin{vmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}=1$

参考文献
駒野誠（2008）数学教育学会秋季論文発表会　臨時増刊「関数の新たな視点ー外部変化と内部変化」