

創造的思考力を伸ばす教材と その指導法の実践的研究

—— 計算力の調査と分析 ——

筑波大学附属駒場中・高等学校

喜多耕作・熊倉啓之・栗原幹夫・佐藤和孝
中野次郎・長野 東・深瀬 幹雄

創造的思考力を伸ばす教材とその指導法の実践的研究

——計算力の調査と分析——

筑波大学附属駒場中・高等学校

喜多 耕作・熊倉 啓之・栗原 幹夫
佐藤 和孝・中野 次郎・長野 東
深瀬 幹雄

§ 1. 研究の目的

本校数学科では、5年前から、中学と高校の新入生および中学全学年に対し、基本的な計算問題を中心に、本校生徒の学力調査を行ない、生徒の実態を把握し、カリキュラム作成のための参考資料としている。

(1) 新入生計算力調査

本校に入学する生徒の大部分は、公教育以外の機関でも学習経験をもち、本来、未習であるはずの内容まで学習している者が多い。

そこで、中1または高1に入学した生徒が、すでに、当該学年以上の学習内容を、どの程度に理解し活用できるのか、その実態を調査・分析し、教材の検討および指導案づくりに役立てたい。

(2) 中学校在校生計算力調査

同一問題を全学年に実施し、学年進行によって、理解と定着の度合いがどのように異なるのか、誤答は学年に共通するものか、理解の差や誤答を分析することによって、生徒のおち入り安い欠点を補い、今後の指導に役立てたい。

§ 2. 中学新入生の調査問題と正答率

中学3年間で学習する内容から、数・文字・式計算をとりだし7分野に分けて〔表1〕のように出題した。各分野に、原則として難易度の順に5題出題した。ただし、中3学年で学習する方程式・不等式については、まとめて5題とした。

各問につき、年度毎に正答率を数字で示す。

〔表1〕 新入生(中学)年度別正答率表 (毎年4月中旬実施)

分野	問 題	56年度	57年度	58年度	3ヶ年平均
正の数の四則	(1) $12794 - 653 \times 6$	92	93	90	88(%)
	(2) 2.76×3.15	91	87	89	
	(3) $4.38 \div 2.15$	89	87	78	
	(4) $\frac{9}{4} \div \frac{21}{40} \times \frac{7}{15}$	97	87	94	
	(5) $3\frac{5}{3} + 4\frac{3}{7} \div 3$	81	84	77	
	((1)~(5)の平均)	(90)	(88)	(86)	
正負の数の四則	(6) $21 - 36 + 45 - 17 - 71$	93	92	87	83(%)
	(7) $24 - 18 \times 3$	98	98	98	
	(8) $18 \times (7 - 12)$	91	89	96	
	(9) $(4 - 12) \times (6 - 10)$	73	75	77	
	(10) $5 \times (2 - 5)^2 + 6$	51	63	63	
	((6)~(10)の平均)	(81)	(83)	(84)	
平方根数の計算	(11) $\sqrt{49}$	69	74	66	20(%)
	(12) $\sqrt{30} \times \sqrt{45}$	22	5	18	
	(13) $6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$	5	10	4	
	(14) $\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{18}$	3	5	3	
	(15) $(2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}) \times \sqrt{6}$	4	3	4	
	((11)~(15)の平均)	(21)	(19)	(19)	
文字式(一次式)の加法	(16) $5a - 2a + 3b - a$	67	63	46	27(%)
	(17) $(4a - 3b) - (a - 5b)$	40	39	25	
	(18) $6a(2a - 3b) - b(3a - 5b)$	12	17	7	
	(19) $(x + 5)(x + 7)$	26	30	14	
	(20) $(3x + 5)^2 + (x - 2)(x + 7)$	6	9	0	
	((16)~(20)の平均)	(30)	(32)	(18)	
方程式(一次)	(21) $3x - 5 = 10$	96	95	93	78(%)
	(22) $14x + 2 = 7x + 23$	97	97	92	
	(23) $\frac{3x - 2}{4} - 1 = 6x - 3$	31	33	20	
	(24) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$	95	97	92	
	(25) $\begin{cases} 4x + 3y = 15 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$	72	84	77	
	((21)~(25)の平均)	(78)	(81)	(75)	
方程式(二次)	(26) $x^2 = 25$	3	6	11	14(%)
	(27) $(x - 2)(x - 5) = 0$	31	31	33	
	(28) $x^2 + 8x + 12 = 0$	5	6	3	
	((26)~(28)の平均)	(13)	(14)	(16)	
不等式(1次)	(29) $3x + 2 > 14$	55	59	61	40(%)
	(30) $6(3 - x) + 2x > 26$	18	26	16	
	((29)~(30)の平均)	(37)	(43)	(39)	

〔註〕 全問についての平均正答率：56年54%， 57年55%， 58年51%

〔表1〕より、次のことがわかる。

- ① この3年間の新入生の計算力・学習到達度は殆んど変わっていない。
- ② 正負の数の四則・一次方程式・二元一次連立方程式については、簡単な問題；(6), (7), (8), (21), (22), (24)は、大部分の生徒が習熟している。
- ③ 文字や記号の意味が理解されておらず、文字式の計算は身につけていない。

上記のことから、単に機械的に計算方法を記憶し、反復練習（ドリル）によって、正答率が高まっているように考えられる。

- ④ 一次方程式と一次不等式の理解度・定着度の落差が大きい。
- ⑤ 問題(1)の $\sqrt{49}$ については、半数以上の生徒が正しく答えているが、問題(2)の $x^2 = 25$ になると正答が少ない。

このことは、平方根の意味を正確につかんでいないことを表している。自学自習による理解不足であろう。

以上から、中3で学習する内容も、すでに、1, 2割の生徒が、一応理解しているものと推察される。

§ 3. 高校新入生の調査問題と正答率

高校で学習する内容から、基本事項をとりあげ、計算方法さえ既知ならば、正解に達する問題を〔表2〕のように8分野に分けて出題した。ただし、57年度は都合により、調査を実施することができなかった。

各問につき、年度毎に正答率を数字で示す。

〔表2〕 新入生(高校)年度別正答率表 (毎年4月中旬実施)

分野	問 題	55年度	56年度	58年度
数 と 式	(1) $(\sqrt{2}+1)(5\sqrt{2}-3)$	96	90	88
	(2) $x^2-x+1=(x-\square)^2-\square$	60	41	29
	(3) $a^3+8b^3=(a+2b)(\quad)$	76	65	43
	(4) $x^2y-x^2z+y^2z-xy^2$ の因数分解	66	64	36
	(5) $\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{4+x^2}$	65	51	37
方 程 式 ・ 不 等 式	(6) $x^2+2x-1=0$	91	69	74
	(7) 和が2, 積が-3である2数	94	71	93
	(8) $x^3+x-2=0$	44	37	22
	(9) $x^2-1<0$	70	72	43
三角比	(10) $\sin\theta=\frac{1}{2}$	22	24	16
ベ ク ト ル ・ 行 列	(11) $(-2, -1)-(-5, 2)$	80	51	28
	(12) $(1, -2)+3(2, -1)$	81	52	28
	(13) $(-2, 1, 4)+(3, -2, -3)$	81	52	28
	(14) $(1, -2)\cdot(2, -1)$	16	14	7
	(15) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	64	42	18
図 形 と 式	(16) $2x-3y+1=0$ と $y=x-1$ の交点	92	88	77
	(17) $y=2x-4$ と $ax+y+1=0$ が直交	83	76	43
	(18) $y=2x+5$ と $y=x^2+2$ との交点	94	83	61
	(19) $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ の中心・半径	63	38	21
	(20) $x+y+1=0$ と $x^2+(y-1)^2=2$ の交点	57	38	25
二 次 関 数	(21) $y=-2x^2$ の頂点の座標	98	92	78
	(22) $y=2(x-3)^2+1$ の頂点の座標	86	79	35
	(23) $y=x^2-4x+1$ の頂点の座標	83	76	33
無 理 関 数	(24) $y=\sqrt{2x-1}$ の定義	65	46	20
	(25) $9^{\frac{3}{2}}$	41	35	16
微 分 ・ 積 分	(26) $y=2x+1$ の $[-1, 3]$ の平均変化率	93	69	83
	(27) $y=2x^2+1$ の $[1, 3]$ の平均変化率	84	60	74
	(28) $y=x^3-7x+1$ のとき $\frac{dy}{dx}$	12	14	1
	(29) $\int(x+2)dx$	10	14	1
	(30) $\int_1^2(x+2)dx$	9	16	2

(11)

〔表2〕より、次のことがわかる。

- ① 中学で学習したもの、あるいは、中学の学習を通して類推できるもの、たとえば、(1)、(6)、(7)、(11)、(21)、(26)については、過去3年間かなり高い正答率を示している。
- ② いままで用いられたことのない記号や文字を用いたもの、たとえば、(1)、(6)、(7)、(16)、(21)、(26)については、当然のことながら、低い正答率を示している。
- ③ 高校で初めて学習する概念・式を用いたもの、(11)、(12)、(13)、(15)、(19)、(20)、(21)については、正答率に年度差が見られる。
- ④ 55年度と56年度を比較すると、多くの問題で、特に(2)、(7)、(11)、(12)、(13)、(15)、(19)、(20)、(24)、(26)、(27)は20%近く、またはそれ以上の正答率の差が見られる。
- ⑤ 56年度と58年度を比較すると、多くの問題、特に、(3)、(4)、(9)、(11)、(12)、(13)、(17)、(18)、(22)、(23)、(24)は、20%近く、またはそれ以上の正答率の差が見られる。

以上より、生徒の意識は、先取りして学習するというより、現在学習していることに力を入れるように変化しつつあると思われる。今後の継続した調査が必要である。

§ 4. 中学在校生の調査問題と正答数

在校生の調査問題は、代表的な計算問題を10分野から選び、中学3学年の共通問題として作成した。10分野の中には、学年によって、未習および既習の別があり、できる問題とできない問題があるが、できない問題はそのままにして、次の問題を解答するよう指示した。

調査の目的は、学年進行にともなう習熟度の相違にあるが、本校で未習であっても、他機関で既習の問題もあり得るから、その実体も合わせて把握するため、〔表3〕のような調査問題を、未習既習の別なく全学年に解答させることにした。

各問につき、学年毎に正答数を数字で示す。各学年の人数は、それぞれ120名である。

〔表3〕 学年別習熟度調査集計表

(毎年7月中旬実施)

分野	問題番号	問題	正答数			誤答数			無答数		
			中一	中二	中三	中一	中二	中三	中一	中二	中三
有理数の計算	(1)	$2\frac{2}{3} \times 0.75 - 1\frac{1}{4} \div 1.5$	91	100	99	27	20	20	2	0	1
	(2)	$48 - 28 \div (-4)$	100	102	110	20	18	10	0	0	0
	(3)	$-5 \times (-2) - (-3)^2$	108	112	112	10	8	8	2	0	0
無理数の計算	(4)	$3\sqrt{5} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$	20	37	112	24	12	7	76	71	1
	(5)	$\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$	5	22	108	29	19	11	86	79	1
	(6)	$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$	12	20	99	16	20	18	92	80	3
	(6)	$\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{7}}$	2	10	87	17	11	29	101	99	4
	(8)	$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$	1	9	31	19	15	45	100	96	44
整式の四則計算	(9)	$4a+7b-5a+b$	102	116	118	17	4	2	1	0	0
	(10)	$6a(2a-5b)+b(3a-5b)$	36	107	104	55	13	15	29	0	1
	(11)	$\frac{3a-b}{5} - \frac{5a-4b}{4}$	34	85	96	65	35	23	21	0	1
	(12)	$(12a^2b-6ab) \div 6ab$	47	107	111	49	13	8	24	0	1
	(13)	$(3x+2)(2x-7)+(2x+1)^2$	6	63	102	65	56	17	49	1	1
	(14)	$(x+y-2)(x-y+2)$	12	87	78	53	33	40	55	0	2
式の値	(15)	$a=3, b=-2, c=-1$ のとき、 b^2-4ac の値	106	108	114	13	12	6	1	0	0
	(16)	$3x-2=0$ のとき、 $9x^2-6x-1$ の値	89	98	104	25	17	15	6	5	1
	(17)	$x=1-\sqrt{2}$ のとき、 x^3-2x^2-x+3 の値	2	8	49	11	21	62	107	91	9
因数分解	(18)	$14x^3-21x^2-7xy$	7	68	90	30	20	20	83	32	10
	(19)	x^2+4x-5	3	103	110	27	15	8	90	2	2
	(20)	$6x^2-11x-10$	3	81	102	23	33	16	94	6	2
	(21)	$x^2-2y^2+xy+yz-zx$	3	12	61	20	24	19	97	84	40
一次方程式	(22)	$4x+3=-2x+12$	86	108	117	22	12	3	12	0	0
	(23)	$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$	82	114	114	9	6	5	29	0	1
	(24)	$\begin{cases} 4x+3y=5 \\ -3x+2y=-8 \end{cases}$	52	108	100	8	12	19	60	0	1
二次方程式	(25)	$x^2=9$	12	22	95	104	98	25	4	0	0
	(26)	$(3x-2)(x+1)=0$	12	38	113	69	59	6	39	23	1
	(27)	$x^2-8x+12=0$	8	35	116	69	65	3	43	20	1
	(28)	$2x^2-3x-1=0$	0	8	88	40	56	25	80	56	7
	(29)	$(x^2-x)^2-5(x^2-x)+6=0$	0	6	47	32	30	42	88	84	31
三次方程式	(30)	$x^3-3x^2+4x-4=0$	0	4	24	32	38	51	88	78	45
一不等式	(31)	$3x-4 \geq 6x+8$	17	43	99	32	47	17	71	30	4
	(32)	$\begin{cases} 2x+1 \geq -3 \\ 3x-2 < 4 \end{cases}$	10	42	101	12	19	12	98	59	7
二次不等式	(33)	$(x-2)(x+1) < 0$	0	17	37	37	50	59	83	53	24
	(34)	$\frac{x-1}{x} > 0$	1	7	16	49	65	81	70	48	23
	(35)	$x^2-3x-4 > 0$	0	8	20	28	49	69	92	63	31

〔表3〕からわかるように、学年進行にともなって正答数が多くなっている。

計算法則は学習途上で常時用いるので、高学年になるにつれて、習熟度が増していくのは当然の結果とも言えるが、誤答数や無答数も少なからずある。殆んど予期した結果に近いが、誤答については、誤答の成立過程を考察しておく必要がある。

次に、誤答を分析し、誤りの過程を追究してみたい。

§ 5. 誤答分析

誤答に論理はない。誤答をでたらめな解答ときめつけ、究明する余地のないものとするのは軽卒である。

誤答に到る過程にも論理はあるはずである。

誤答する生徒の思考の中には、彼等なりの筋道がある。誤ったしくみを正しいと思い込んでいるケースがある。誤ったしくみを解明することは指導上重要なことである。

	正答数	誤答数	無答数
中1 →	↓	↓	↓
中2 →			
中3 →			

このしくみを知るために、本校生徒の誤答を類別し、誤ったしくみの解明のために、誤答の内容を分析してみた。

表中のマトリックスは、図に示したような意味である。

〔表4〕 誤答分析表

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(1) $2\frac{2}{3} \times 0.75 - 1\frac{1}{4} \div 1.5$	$\frac{7}{6}$	$\frac{17}{6}$	4	3	2	$2 + \frac{5}{6}$ (符号の見間違い)
$\begin{pmatrix} 91 & 27 & 2 \\ 100 & 20 & 0 \\ 99 & 20 & 1 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{3}$	3	0	2	$1\frac{1}{4} \div 1.5 = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (約分の間違い)
		$\frac{1}{2}$	3	0	1	$(2\frac{2}{3} \times 0.75 - 1\frac{1}{4}) \div 1.5$ (計算の順序のまちがい)
		$\frac{1}{6}$	1	4	2	$2\frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3}$ とした
		$\frac{1}{8}$	1	2	0	$\div 1.5$ を $\times \frac{3}{2}$ とした
		$\frac{23}{12}$	0	2	0	$\div 1.5$ を $\times \frac{1}{15}$ とした
		$(2 - \frac{5}{6})$	(4)	(7)	(5)	「簡単にせよ」の意味の取り違い (正答ではある)
(2) $48 - 28 \div (-4)$	55	41	4	9	2	$48 \sim 7$ (符号の間違い)
$\begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 112 & 18 & 0 \\ 110 & 10 & 0 \end{pmatrix}$		56	3	0	3	$48 + 7 = 56$ (計算違い)
		76	2	0	0	$48 - 28 \div (-4)$
		52	2	1	0	$28 \div 4 = 4$ (計算違い)
		$(48 + 7)$	(13)	(5)	(2)	「簡単にせよ」の意味の取り違い (正答ではある)
		-5	1	0	0	$(48 - 28) \div (-4)$ 計算の順序のまちがい
(3) $-5 \times (-2) - (-3)^2$	1	4	4	0	0	$-(-3)^2 = -(-3 \times 2) = 6$
$\begin{pmatrix} 108 & 10 & 2 \\ 112 & 8 & 0 \\ 112 & 8 & 0 \end{pmatrix}$		19	2	2	1	$-(-3)^2 = \{-(-3)\}^2 = 9$ または $-(-3)^2 = -(-3^2) = 9$
		-35	2	0	0	$-5 \times \{(-2) - (-3)^2\}, (-3)^2 = -3^2$
		37	0	1	2	$-(-3)^2 = -(-3)^3$
		-19	0	0	2	$-5 \times (-2) = -10$
		$(10 - 1)$	(10)	(5)	(2)	「簡単にせよ」の意味の取りちがえ
(4) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$	$5\sqrt{5} - 7\sqrt{7}$	$-\sqrt{24}$	3	0	0	$a\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b}$ $\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$ とした
$\begin{pmatrix} 20 & 24 & 76 \\ 37 & 12 & 71 \\ 112 & 7 & 1 \end{pmatrix}$		-2	2	4	0	$5\sqrt{5} - 7\sqrt{7} = 5 - 7$ としたか?
		$\sqrt{45} - \sqrt{112} + \sqrt{20} - \sqrt{63}$	2	0	0	$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ としたのみ
		-218	2	0	0	$\sqrt{a} = a^2$ とした
		$\sqrt{5} - 7\sqrt{7}$	1	2	2	$3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ (符号の見まちがい)
		$5\sqrt{5} - \sqrt{7}$	1	0	2	$-4\sqrt{7} \pm 3\sqrt{7}$ (符号の見まちがい)
		$7(\sqrt{5} - \sqrt{7})$	1	0	2	?
		$-\sqrt{110}$	1	1	0	$\sqrt{45} - \sqrt{112} + \sqrt{20} - \sqrt{63} (\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b})$ $= \sqrt{45 - 112 + 20 - 63} (\sqrt{-a} = -\sqrt{a})$
(5) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$	$2\sqrt{2}$	0	23	11	0	$\sqrt{18} - 50 + 32 (\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a \pm b})$
$\begin{pmatrix} 5 & 29 & 86 \\ 22 & 19 & 79 \\ 108 & 11 & 1 \end{pmatrix}$		-1152	2	0	0	$18^2 - 50^2 + 32^2 (\sqrt{a} = a^2)$
		$3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$	1	2	4	計算途中
		$6\sqrt{2}$	0	0	2	$3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2} (3 - 5 = 2$ としたか?)
		$2\sqrt{3} - \sqrt{2}$	0	0	2	$\sqrt{18} = 2\sqrt{3}$

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(6) $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}(1)}{2(\sqrt{2})}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	5	1	2	$\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{a\pm b}=\sqrt{a\pm b})$
$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 92 \\ 20 & 20 & 80 \\ 99 & 18 & 3 \end{pmatrix}$		1または-1	3	3	1	$\sqrt{2}$ 倍したか、通分したとき分母を忘れた
		$3\frac{3}{4}$	3	0	0	$4-\frac{1}{4}$ とした。($\sqrt{a}=a^2$)
		$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	1	0	4	
(7) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{3-\sqrt{7}}$	$\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2}$	$-\frac{12}{23}$	3	0	6	$\frac{1}{2-4}+\frac{1}{3-49}(\sqrt{a}=a^2)$
$\begin{pmatrix} 2 & 17 & 101 \\ 10 & 11 & 99 \\ 87 & 29 & 4 \end{pmatrix}$		1	3	0	3	$\frac{1}{4-2}+\frac{1}{9-7}$ (有理化のとき分子に掛け忘れ)
		$\frac{5-\sqrt{2}-\sqrt{7}}{6-3\sqrt{2}-2\sqrt{7}+\sqrt{14}}$	2	2	1	通分しただけ
		$\frac{5-\sqrt{2}-\sqrt{7}}{2}$	0	0	2	$\frac{2-\sqrt{2}+3-\sqrt{7}}{2}$ (有理化のとき分子の符号を間違う)
		$\frac{5+\sqrt{2}-\sqrt{7}}{2}$	0	0	2	$\frac{2+\sqrt{2}+3-\sqrt{7}}{2}$ (有理化のとき分子の符号を間違う)
		$\frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{7}}{4}$	0	0	2	$\frac{2+\sqrt{2}+3+\sqrt{7}}{4-2}+\frac{3+\sqrt{7}}{3-7}$ (不注意!)
(8) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$	2	0	3	5	4	$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-3-2\sqrt{2}$ ($\sqrt{a\pm b}=\sqrt{a\pm b}$ と、符号のまちがい)
$\begin{pmatrix} 1 & 19 & 100 \\ 9 & 15 & 96 \\ 31 & 45 & 44 \end{pmatrix}$		$4\sqrt{2}$	1	2	6	$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-(3-2\sqrt{2})$ ($\sqrt{a\pm b}=\sqrt{a\pm b}$ $-\sqrt{a}=\sqrt{-a}$)
		$4\sqrt{2}$	2	1	0	上と同じ考え方で $\sqrt{\quad}$ を書き忘れ
		$2\sqrt{2}$	1	0	15	$1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})$ ($\sqrt{a}>0$ に注意せず)
		$2\sqrt{2}\sqrt{2}$	0	0	4	$\sqrt{3+\sqrt{2}\sqrt{2}}-\sqrt{3+\sqrt{2}\sqrt{2}}$ ($\sqrt{a\pm b}=\sqrt{a\pm b}$)
		1	0	0	4	?
		$(2\sqrt{1})$	0	0	(2)	(正答ではある)
(9) $4a+7b-5a+b$	$-a+8b$	$-a+6b$	5	1	0	符号のまちがい
$\begin{pmatrix} 102 & 17 & 1 \\ 116 & 4 & 0 \\ 118 & 2 & 0 \end{pmatrix}$		$-1a+6b$	4	0	0	同上と $(-1)\times a=-a$ とせず
		$6b-5a$	2	0	0	?
		$a+8b$	1	0	2	$4a-5a=a$ (符号の間違い)
		$(-1a+8b)$	(21)	(2)	(0)	$(-1)\times a=-a$ とせず(正答ではある)
(10) $6a(2a-5b)+b(3a-5b)$	$12a^2-27ab-5b^2$	$12a^3-30ab+3ab-5b^2$	10	1	0	展開しただけで同類項をまとめない
$\begin{pmatrix} 36 & 55 & 29 \\ 107 & 13 & 0 \\ 104 & 15 & 1 \end{pmatrix}$		$12a-27ab-5b$	6	0	0	すべて、 $6a\times 2a=12a$ 等とした。 なお、左の誤答のほかに、この誤りをしたものは(中一)では13名もいた。 (したがって、この種の誤りは合計) (中一で23名)
		$12a-27ab-5b^2$	2	0	0	
		$12a^2-27ab-5b$	2	1	0	
		$(6a+b)(5a-10b)$	2	0	0	$xy+zn=(x+z)(y+n)$ とした。
		$12a^2-5b^2$	1	3	3	$-30ab+3ab=0$ (30を3と見たか?)
		$12a^2-33ab-5b^2$	0	2	3	$-30ab-3ab$ とした(符号の間違い)
		$12a^2-27ab+5b^2$	0	1	2	符号のまちがい。
		$12a^2-30ab+3ab-5b^2$ と正しく展開出来たが同類項でない項まで無理にまとめようとした。	16	0	0	$12a^2+3ab=15a^2b$ とした(5名) $12a^2+3ab=36a^2b$ とした(1名) $27ab=27a+27b$ とした(2名) $27ab=3a+9b$ とした(1名)など

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(11) $\frac{3a-b}{5} - \frac{5a-4b}{4}$	$-\frac{13a+16b}{20}$	$\pm \frac{13a \pm 16b}{20}$	15	12	7	符号のまちがい
$\begin{pmatrix} 34 & 65 & 21 \\ 85 & 35 & 0 \\ 96 & 23 & 1 \end{pmatrix}$		$-13a+16b$	10	10	8	分母を払った (式と等式などとの混同)
		分母を払い、しかも符号のまちがいをした	7	3	0	
		$5(3a-b)-4(5a-4b)$	2	0	0	
		通分しただけ	2	0	0	
(12) $(12a^2-6ab) \div 6ab$	$2a-1$	$2a$	9	9	5	$\frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 0$ とした(約分のまちがい)
$\begin{pmatrix} 47 & 49 & 24 \\ 107 & 13 & 0 \\ 111 & 8 & 1 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{b}$	9	2	0	$(12a^2-6ab) = 6a$ とした
		a	5	0	0	$(12a^2-6ab) = 6a^2b$ とした?
		$\frac{1}{3b}$	4	0	0	$12a^2-6ab = 2a$ とした
		$12a^2b$	3	1	0	$\frac{x-y}{y} = x$ とした(約分のまちがい)
		$2a-6ab$	2	0	0	$\frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - y$ とした
(13) $(3x+2)(2x+7)+(2x+1)^2$	$10x^2-13x-13$	$10x^2-17x-13$	5	20	0	$(2x+1)^2 = 4x^2 + 1((a+b)^2 = a^2 + b^2)$
$\begin{pmatrix} 6 & 65 & 49 \\ 63 & 56 & 1 \\ 102 & 17 & 1 \end{pmatrix}$		$(2x+1)^2 = 4x^2 + 1$ とし、しかも計算を間違えた	20	4	0	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$
		$(2x+1)^2$ の展開に手をつけず	9	0	0	
		$(2x+1)^2 = 4x+2$ とした	6	1	0	$(a+b)^2 = 2a+2b$ (2乗と2倍のまちがい)
		$(2x+1)^2 = 4x+1$ とした	5	4	2	
		$(2x+1)^2 = 2x^2 + 4x+1$ とした	0	1	2	
		$(2x+1)^2 = 4x+4x+1$ とした	0	3	0	
		$3x \times 2x = 6x$ とした	11	5	0	
(14) $(x+y-2)(x-y+2)$	x^2-y^2+4y-4	x^2-y^2-4	14	11	10	$(a+b)(c+d) = ac+bd$
$\begin{pmatrix} 12 & 53 & 55 \\ 87 & 33 & 0 \\ 78 & 40 & 2 \end{pmatrix}$		$(x+y)(x-y)-4$	2	0	0	同 上
		x^2+y^2-4	2	0	2	?
		x^2-y^2+2y-4	0	0	5	
		x^2-y^2-4y-4	0	0	4	
		x^2-y^2-4y-4	0	0	3	
		x^2+y^2+4y-4	1	0	2	
		$(x^2-(y-2)^2)$	(0)	(0)	(2)	(正答ではある)
		一応正しく多項式に展開した。	18			同類項をまとめるところでまちがえた。
		x^2+4y-4	0	3	1	"
		x^2-4	0	2	0	"
		x^2	4	0	0	
0	2	0	0			

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(15) $a=3, b=-2, c=-1$ のとき, b^2-4ac の値	16	-8	5	1	1	4-12 (符号のまちがい)
$\begin{pmatrix} 106 & 13 & 1 \\ 108 & 12 & 0 \\ 118 & 6 & 0 \end{pmatrix}$		8	3	5	0	$-4+12$ (符号のまちがい) $b^2=-4$
		-17	2	0	0	? (a と b の取りちがえか $-3^2-4 \times 2 \times (+1)$ としたか)
		4	1	1	2	?
		-4	0	2	0	$b^2-4ac=b^2-4(a+c)$
		7	0	0	2	? (b^2-ac としたか)
(16) $3x-2=0$ のとき $9x^2-6x-1$ の値	-1	1	5	3	4	$9x^2-6x-1=(3x-1)^2$ としたか $9x^2-6x=3x$ とした
$\begin{pmatrix} 89 & 25 & 6 \\ 98 & 17 & 5 \\ 104 & 15 & 1 \end{pmatrix}$		31	4	2	1	$9x^2=(9x)^2$
		7	2	2	0	$3x=-2$ (移項のまちがい)
		$10\frac{1}{4}$	0	1	2	$3x-2=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$
(17) $x=1-\sqrt{2}$ のとき x^3-2x^2-x+3 の値	3	$5-\sqrt{2}$	0	2	2	$(1-\sqrt{2})^3=1^3-(\sqrt{2})^3$ 等 $(a+b)^n=a^n+b^n$
$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 107 \\ 8 & 21 & 91 \\ 49 & 62 & 9 \end{pmatrix}$		$5-2\sqrt{2}$	0	0	3	与式= $x(x^2-2x-1)+3=x(x-1)^2+3$
		$3+\sqrt{2}$	1	0	3	
		-1	1	0	3	全体として (中一) 計算の仕方が正しいものは1つもない。 (中二) 計算の仕方が正しいものは殆んどない。 (中三) ① $(1-\sqrt{2})^3$ の計算がまちがったものが多い。 ② $(a+b)^n=a^n+b^n$ としたものも、かなりある。
		$7-5\sqrt{2}$	0	1	2	
		$5+2\sqrt{2}$	0	0	3	
		$-1-2\sqrt{2}$	0	0	2	
		-5	0	0	2	
(18) $14x^3-21x^2-7xy$ を 因数分解せよ。	$7x(2x^2-3x-y)$	$2x^3-3x^2-xy$	3	0	0	7で割った
$\begin{pmatrix} 7 & 30 & 83 \\ 68 & 20 & 32 \\ 90 & 20 & 10 \end{pmatrix}$		$2x^2-3x-y$	2	3	1	7xで割った
		$7(x^3-3x^2-xy)$	1	3	3	(中一では、因数分解の意味が殆んど んどわからない。 中には「×の印を入れて書きなおし ただけ」のものが10名いた。
		$x(14x^2-21x-7y)$	0	2	3	
		$7x(2x^2-3x-7y)$	0	1	3	不注意
		$7x(x^2-3x-y)$	0	0	2	不注意
		$7(2x^3-3x^2-xy)$	0	0	2	
(19) x^2+4x-5	$(x-1)(x+5)$	$x(x+4)-5$	5	0	0	
$\begin{pmatrix} 3 & 27 & 90 \\ 103 & 15 & 2 \\ 110 & 8 & 2 \end{pmatrix}$		$x(x+4-\frac{5}{x})$	1	0	0	
		$(x+1)(x-5)$	0	5	5	(二次三項式の因数分解では、一次の 項の係数に注意しないものが多い。 次の(20)の問題でも同じ。)
		$(x-1)(x-4)$	0	2	2	
		$x=1, -5$	0	0	1	$x^2+4x-5=0$ (方程式とまちがえる)

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(20) $6x^2-11x-10$	$(2x-5)(3x+2)$	$x(6x-11)-10$	3	0	0	(中三では、方程式とまちがえたもの) が2名いる。
$\begin{pmatrix} 3 & 23 & 94 \\ 81 & 33 & 6 \\ 102 & 16 & 2 \end{pmatrix}$		$x(6x-11-\frac{10}{x})$	1	0	0	
		$(2x+5)(3x-2)$	0	18	13	
		$(2x-5)(3x-2)$	0	2	0	
(21) $x^2-2y^2+xy+yz-zx$	$(x-y)(x+2y-z)$	$(x-y)(x+2y+z)$	0	0	2	(中一は、でたため)
$\begin{pmatrix} 3 & 20 & 97 \\ 12 & 24 & 84 \\ 61 & 19 & 40 \end{pmatrix}$		因数分解になっていない	20	18	8	積の形になっていない
(22) $4x+3=-2x+12$	$x=\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	6	7	2	$4x-2x=9$ (移項のときの符号の) $6x=12\pm 3$ (まちがい) $6x=9\rightarrow x=\frac{6}{9}$
$\begin{pmatrix} 86 & 22 & 12 \\ 108 & 12 & 0 \\ 117 & 3 & 0 \end{pmatrix}$		$\frac{5}{2}$	2	1	0	
		$\frac{2}{3}$	2	3	0	
(23) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$	$x=3, y=-2$	一方の方程式にあてはまるもの	6	4	4	
$\begin{pmatrix} 82 & 9 & 29 \\ 114 & 6 & 0 \\ 114 & 5 & 1 \end{pmatrix}$		x, y の一方だけ正解	1	2	1	
(24) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ -3x+2y=-8 \end{cases}$	$x=2, y=-1$	$x=14, y=-17$	0	7	1	$\left. \begin{matrix} 12x+9y=15 \\ -12x+8y=-32 \end{matrix} \right\} \rightarrow y=-17$ x を求めて、それを与式に代入して y の値を求めるときの符号の間違い y を求めて、それを与式に代入して x の値を求めるときの符号の間違い 一方の方程式にあてはまる x, y の何れかが正解
$\begin{pmatrix} 52 & 8 & 60 \\ 108 & 12 & 0 \\ 100 & 19 & 1 \end{pmatrix}$		$x=2, y=1$	0	2	6	
		$x=\frac{1}{2}, y=1$	1	1	3	
		$2+ (8) 3+ (4)$	2	2+ (8)	3+ (4)	
		$()$ 内の数は上例				
		$()$ 内の数は上例	2	(2)	(6)	
(25) $x^2=9$	$x=3, -3$	-3	102	98	23	
$\begin{pmatrix} 12 & 104 & 4 \\ 22 & 98 & 0 \\ 95 & 25 & 0 \end{pmatrix}$		$\sqrt{9}$	1	0	0	
		-3	1	0	0	
		$\pm\sqrt{3}$	0	0	2	
(26) $(3x-2)(x+1)=0$	$x=\frac{2}{3}, -1$	-1	36	40	0	
$\begin{pmatrix} 12 & 69 & 39 \\ 38 & 59 & 23 \\ 113 & 6 & 1 \end{pmatrix}$		$\frac{2}{3}$	13	2	0	
		$\frac{3}{2}$	5	0	0	$3x-2=x+1$ としたか $3x-2=0\rightarrow 3x=2\rightarrow x=\frac{2}{3}$
		$\frac{1}{3}$	2	1	0	?
		1	2	3	0	$x+1=0\rightarrow x=-1$
		解を2つ出したもの	2	2	6	そのうち1つが正解のもの (中一)2名, (中二)1名, (中三)3名

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(27) $x^2 - 8x + 12 = 0$	$x = 2, 6$	2	32	41	0	$x(x-8) = -12$ として、あてはめたか
$\begin{pmatrix} 8 & 69 & 43 \\ 35 & 65 & 20 \\ 116 & 3 & 1 \end{pmatrix}$		6	16	14	0	"
		-4	4	0	0	$x^2 - 8x = -12 \rightarrow x - 8 = -12$
		4	2	0	0	?
		20	2	0	0	$x - 8 - 12 = 0$ とした
		$\frac{12}{7}$	2	0	0	$x - 8x + 12 = 0$ とした
		$(x-6)(x-2)$	0	0	1	因数分解しただけ
		$x = 2, 4$	0	0	1	?
		$4 \pm \sqrt{7}$	0	0	1	
		解を2つ出したもの	0	0	上例(2)	
(28) $2x^2 - 3x - 1 = 0$	$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$	1	15	4	0	$2x^2 - 3x + 1 = 0$ と見たか
$\begin{pmatrix} 0 & 40 & 80 \\ 8 & 56 & 56 \\ 88 & 25 & 7 \end{pmatrix}$		-1	9	12	0	$2x - 3x - 1 = 0$ と見たか、 x に-1をあてはめるとき $2x^2 = -2$ とした
		2	8	1	0	$2x - 3 - 1 = 0$ とした
		$\frac{1}{2}$	2	0	0	$2x^2 - 3x + 1 = 0$ と見た
		解なし	1	12	0	
		$x = 1, \frac{1}{2}$	0	2	12	$2x^2 - 3x + 1 = 0$ と見た (因数分解のまちがい)
		$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$	0	0	4	
		解を2つ出したもの	1	0	すべて	
(29) $(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) + 6 = 0$	$x = 2, -1, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$	2	11	11	2	殆んど答だけで、解法が示されていない
$\begin{pmatrix} 0 & 32 & 88 \\ 6 & 30 & 84 \\ 47 & 42 & 31 \end{pmatrix}$		-1	1	3	0	"
		2, -1	1	3	6	
		$2, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$	0	0	1	(中三)で 解を1つ出したもの 3名 解を2つ出したもの 9名 解を3つ出したもの 3名 解を4つ出したもの 13名
		$2, 1, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$	0	0	4	左辺を因数分解しただけ 4名 $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 3)$ 正しい
		2, 1, その他	0	0	2	$(x-1)(x^2 - x^2 - 5x - 6)$ $(x-2)(x^2 - 4x - 3)$ $(x-3)(x+2)(x^2 - x + 1)$
		$2, -1, \frac{3}{x-1}$	1	0	0	
		3	0	3	0	
		-3	2	1	0	
		-2	0	2	0	
		左辺が正しく因数分解できた	(2)	(3)	(19)	解を出すとき間違えた。

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(30) $x^3-3x^2+4x-4=0$	$x=2, \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$	2	13	30	14	
$\begin{pmatrix} 0 & 32 & 88 \\ 4 & 38 & 78 \\ 24 & 51 & 45 \end{pmatrix}$		$\frac{7}{5}$	2	0	0	$x-3+4x-4=0$ とした
		1	2	0	0	x^3 を $3x$ とした
		解なし	1	1	1	(中三)で、 i を用いたもの 4名 解1つ 15名, 解2つ 9名, 解3つ 9名, 解4つ なし
		-1, 2	0	0	7	(中一)と(中二)は、すべて解1つ。
		$2, \frac{1 \pm 7i}{2}$	0	0	3	(中三)で、左辺を因数分解しただけのもの15名(そのうち正しいもの8名)
(31) $3x-4 \geq 6x+8$	$x \leq -4$	$x \geq -4$	10	26	1	$\left(\begin{array}{l} \text{(中一)では}x\text{を書かないで} \\ \geq -4, < -4, > -4\text{等としたも} \\ \text{のが多い。} \end{array} \right)$
$\begin{pmatrix} 17 & 32 & 71 \\ 43 & 47 & 30 \\ 99 & 17 & 4 \end{pmatrix}$	$x < -4$	2	1	0		
	$x > -4$	2	0	0		
	$x \geq \frac{4}{3}$	2	1	0	$3x-6x \geq 8-4$ とし $+3x \geq 4$ とした。 移項と符号の間違い。	
	$(-x \geq 4)$	0	3	0		
	$x \leq 4$	0	1	11		
	$x = -4$	1	1	1	方程式と間違う。	
(32) $\begin{cases} 2x+1 \geq -3 \\ 3x-2 < 4 \end{cases}$	$-2 \leq x < 2$	$x \geq -2$	3	0	0	
$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 98 \\ 42 & 19 & 59 \\ 101 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	$x < 2$	0	3	0		
	$2 > x < -2$	0	2	0		
	$x < 2, x \geq -2$	1	2	0		
	$-2 \leq x < 3$	1	0	4		
	$x \leq -2$	0	0	2		
	解なし	0	0	2		
(33) $(x-2)(x+1) < 0$	$-1 < x < 2$	$x < 2$	11	18	11	
$\begin{pmatrix} 0 & 37 & 83 \\ 17 & 50 & 53 \\ 37 & 59 & 24 \end{pmatrix}$	1以下	3	0	0	$x=1$ のとき $x-2 < 0$ で $x+1 > 0$ となるところからか。	
	$x < -1$	0	4	22	$x+1 < 0$ で十分と見たか。	
	$x < 1$	0	2	1	第2行目の例と同じ?	
	$x < 2, x < -1$	0	1	7		
	$x > 2$	0	0	3	不等号の向きを注意しなかった。	
	$-1 \leq x \leq 2$	0	0	2		

問 題	正 答	誤 答	誤 答 数			誤 答 の 内 容 分 析
			中一	中二	中三	
(34) $\frac{x-1}{x} > 0$	$x < 0, x > 1$	$x > 1$	24	38	59	$x-1 > 0$ で十分と見た ($x > 0$ を前提とす)
$\begin{pmatrix} 1 & 49 & 70 \\ 7 & 65 & 48 \\ 16 & 81 & 23 \end{pmatrix}$		$x \geq 2$	7	2	0	上例と同じく
		$x < 1$	2	0	3	
		$x > 0$	0	2	1	
		$x > -1$	0	0	2	
		$0 < x < 1$	1	1	2	$\frac{x-1}{x} < 0$ とした
		$1 - \frac{1}{x} > 0$ まで	5	0	0	
		$x(x-1) > 0$ まで	1	0	0	
(35) $x^2 - 3x - 4 > 0$	$x < -1, x > 4$	$x > 4$	14	12	33	$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \therefore x > 4$ としたか $(x+1)(x-4) > 0 \rightarrow x > -1$ かつ $x > 4$
$\begin{pmatrix} 0 & 28 & 92 \\ 8 & 49 & 63 \\ 20 & 69 & 31 \end{pmatrix}$		$x \geq 5$	2	1	0	$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$ から x の整数値のみを考えたか?
		$x < -1$	1	5	1	
		$x > 1$ または $x > 4$	1	0	0	$x+1 > 0$ と $x-4 > 0$ に分けたか?
		$x > 4$	0	4	1	
		$-1 < x < 4$	0	4	10	$x^2 - 3x - 4 < 0$ とした
		$x > -1$	0	2	5	初めの例と同じ
		$x = 4$	0	2	0	
		$x < -2$	1	2	0	x^2 を $2x$ とした
		$x > -1, x > 4$	0	0	4	初めの例と同じ $\begin{pmatrix} x+1 > 0 \\ x-4 > 0 \end{pmatrix}$
		$(x+1)(x-4) > 0$ まで	4	0	0	

〔表4〕のように、細かく誤答の内容を検討し分析してみると、誤答にもその傾向があるように思われる。単なるケアレスミスも多いが、誤りやすい計算には、おちこみやすい錯覚があり思い込みがある。その錯覚や思い込みは、各学年に共通して見られ、一旦おちこむとなかなか抜け出せないのが現状のようである。このことは、数学を嫌にする要因でもあるので、早期に原因を発見し治療することが計算力を育成するための重要な課題である。

今後の課題は、生徒がおちこみやすい誤りを Model of miscalculation としてまとめ、治療法を研究し、数学嫌を無くしていくことである。 (以上、文責・栗原幹夫)