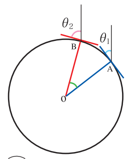
ピタゴラスの野望　～近代科学論序説～

筑波大学数学類
西　村　泰　一

Ⅰ　Hellenism（ヘレニズム）の数理科学者達

紀元前５世紀初頭に古代ギリシャ人達は既に丸い地球という認識に到達していた。彼らは北極星（地球の回転軸の延長線上にほぼ位置し、昔はこれをもとに北はどちらかを決定した）の高度（見上げた折に視線が水平面となす角度）は北に向かうほど増え、南に向かうほど減るという旅行者の観察から、この仮説に到達している。一旦丸い地球という概念を得ると、南北に移動した折の上記の高度変化は、厳密にその移動距離に比例することを含意し、また東西方向の移動では全く高度変化が見られないことも帰結する。これらは容易に検証可能な言明である。そしてここまで来ると、地球の半径を測定と計算で割り出すのは、目と鼻の先である。そしてこれを成し遂げたのが、Archimedes（アルキメデス）の友人としても有名で、後に Alexandoria 図書館（有名なマケドニアの Alexander（アレクサンダー）大王は遠征途上で各地に自分の名を冠した都市を建設したが、現在エジプトにある Alexandoria はその第一号である）の館長になる Eratosthenes（エラトステネス）である。紀元前３世紀の話である。彼が弾き出した地球の半径の見積もりは１％の誤差しかなく、この時代には光学測定機器が全くなかったことを考えると、驚異的ですらある。

Eratosthenes が用いた方法というのは、応用古典幾何学とでも呼ぶべきやり方で、同一経線上に位置する２点 A、B 間の地上での距離をなるだけ正確に測定し（A と B が形作る円弧 $\widehat{AB}$ の長さを計測することになる）、角度∠AOB を A 点と B 点での北極星の高度の差として算出し、これを計算式に当てはめて、地球の半径を導出するというものである。



$$\frac{\widehat{AB}}{OA} = 2\pi \times \frac{\quad}{360}$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$\widehat{AB}$ は地上での距離
$\widehat{AB}$ と θ は測定により求められるので、地球の半径 OA を算出することが出来る。

Eratosthenes より１世代以上前の学者で、“古代の Copernicus” と呼ばれる Aristarchus（アリスタルコス）の現存する著作は、“太陽と月の大きさと距離について”という論文しかないが、彼には他に少なくとも太陽中心説を唱えた著作があったことが知られている。Aristarchus は、地球の半径は月の半径の約３倍と見積もっているが、地球の大きさの算出に成功した Eratosthenes は、これを用いて月の外周を約１万４千 km と概算している。実際の月の外周が約１万１千 km であることを考えると、決して悪くない数字である。さらに紀元前２世紀半ばには、Hipparchus（ヒッパルコス）は三角法の数表をきちんと準備した上で、三角測量の要領で、月と地球の間の距離は地球の直径の約 30 倍と算出した。前述の Eratosthenes が算出した地球の大きさにこれを当てはめると、地球から月までは約 38 万４千 km とでるが、現在よく知られている月の平均軌道半径は 38 万４千４百 km なので、ピッタシカンカン（1975 年秋から 10 年以上にわたって TBS で毎週火曜日に放送された長寿クイズ番組で、正解がでるとカンカンと鐘が鳴った）と言えるのではないだろうか？

古典古代の自然観や宇宙観には、大きく見て二つの流れがあった。ひとつが Aristotle（アリストテレス）や 1000 年以上にわたってアラビア世界とヨーロッパを支配した宇宙論の定番 “Almagest（アルマゲスト）” の著者 Ptolemaeus（プトレマイオス）に象徴される考え方で、数学を哲学と常識の侍女とみなし、数学の有用性を認めるものの、現象の深い理解には役立たないと考えた。他方で、Pythagoras（ピタゴラス）学派や先に名前の出たヘレニズムの学者達が典型的であるが、見かけの背後にある実在は本質的に数学的であると信じ、その原理の追求こそを己の使命と心得た。キリスト教的世界観に支配されたヨーロッパ中世は前者の立場をとり、後者の立場の復活には Kepler や Galileo、そして Newton を待たねばならない。前者の立場では、自然は原理を求めるには複雑すぎると考え、記述に専念するべきと考えた。遺伝と進化が基本原理として確立する以前の生物学がそうで、こんなに多様な動植物が存在するのに、その背後に単純な原理があるなどとは、とても信じられず、Fabre 昆虫記の世界に甘んじていた。歴史学などは現在でも専ら記述を旨としている。

Ⅱ　Copernicus（コペルニクス）革命

Kepler（ケプラー）の有名な３法則の発見に至る研究は、背後に数学的調和があるはずだという Pythagoras 学派的信念と、大先輩の Copernicus からの強い影響で得た太陽がすべての天体の運動の原因であるという確信に裏打ちされていた。彼が最初に見出したのは面積速度一定の法則とも呼ばれる第２法則（太陽から惑星に引いた直線は等時間に等面積を描く）で、現代的な用語で言うと角運動量保存則ということになる。次に Kepler が見出すのは第１法則であるが、その発見はたぶんに偶然に助けられたところがある。1600 年に Kepler が Tycho Brahe（ティコ・ブラーエ）の助手としてプラハに着いた時、古参の助手 Longomontanus（ロンゴモンタナス）はちょうど火星を研究していた。すべての惑星は太陽を焦点にもつ楕円軌道を描くが（これが Kepler の第１法則である）、幸運にも火星の楕円軌道の離心率はかなり大きく（地球は 0.02 で、木星と土星は 0.05 で、金星に至っては 0.007 あるが、火星は 0.1）、太陽からの距

離は遠日点と近日点で 20%くらい違う。そのために、Kepler は火星の軌道を具に解析することによって、惑星は円軌道を描くという Galileo や Copernicus すら強く束縛した呪縛からやっと解放されたのである。Kepler のもうひとつの幸運は Tycho の助手になって程無く Tycho が急逝してしまい、Tycho の後継者としての地位が転がりこんだことである。こうして神聖ローマ帝国の宮廷数学者としての地位を得た Kepler は、その後 10 年以上にわたって研究に没頭することができ、この期間は彼の人生でもっとも実り豊かな時期となった。彼の第 1 法則と第 2 法則の発表は 1609 年であるが、公転周期の二乗は長半径の三乗に比例するという第 3 法則はだいぶ遅く、1619 年である。余談であるが、時代はだいぶ下るが、18 世紀に医業で生計を立てながら独学で天文学の研究を続けた江戸時代の天文学者麻田剛立は、Kepler の第 3 法則に独力で到達している。第 3 法則は離心率に全く依存せず、長半径だけが問題となるので、その長半径を半径とする円軌道であってもなんら差し支えない。実際、麻田は Kepler の第 1 法則や第 2 法則とは無関係に、惑星は太陽を中心とする円軌道を描くという前提で、この法則に到達している。ところで、Aristarchus はいかなる理由で太陽中心説に到達したのだろうか？　非常に興味をそそられる。

Archimedes の著作は 16 世紀後半にはイタリアの数学者 Tartaglia（タルタリアは 3 次方程式の解の公式の発見者として有名）のイタリア語訳を通してヨーロッパで広く知られるようになった。Galileo もその恩恵に与った一人で、終生 Archimedes 学徒をもって任じており、その処女作“小天秤”は、発想も手法も完全に Archimedes 的である。Galileo は優れた実験家であっただけでなく、その数学的解析にも秀でていた。Galileo が Newton を準備したと言われるのは、その運動学を通してであるが、彼はここで等加速度運動に注意を集中している。彼がまず取り扱ったのは等速度運動、つまり加速度がない場合で、いわゆる慣性の法則（物体は外力を受けない時、等速度運動をする）に行き着き、これは Newton の力学の第 1 法則となる。彼が次に注目した等加速度運動はなるだけ解析の容易な単純な場合で、自由落下する物体、摩擦のない斜面を転がる物体、ならびに野球の batsman が pitcher の投げた玉を打った場合のような放物体の運動である。Galileo が詳細に解析したこれらの運動を通して、Newton はその第 2 法則、つまり物体に力が加わったとき、どのような加速度がその物体に生じるかを述べた Newton の運動方程式に導かれることになる。フランスの哲学者 Henri Bergson（アンリ・ベルグソンは 1927 年に Nobel 文学賞を受賞している）の言葉を借りるならば、“Newtonian physics descended from Heaven to Earth along the inclined Plane of Galileo（Newton 物理学は Galileo の斜面を転がって天上の世界から地上の世界へ降り来たった）”ということになる。Newton の第 2 法則を前提にすると、Kepler の最初の 2 法則から重力が逆二乗の法則に従うといういわゆる万有引力の法則を導くことが出来るし、逆もまた真である。そしてそのことに気づけば、Kepler の第 3 法則は最初の 2 法則から簡単に導出できる。

Ⅲ　Pythagoras と近代科学の精神

Pythagoras（ピタゴラス）の定理（三平方の定理ともよばれる）は誰でもよく知っているが、この定理自身は Pythagoras が発見したというわけではなく、既に古代メソポタミアで、遅くとも紀元前 2000 年頃にはよく知られていて、実際に（測量等に）使われていたようである。Pythagoras は釈迦や孔子と同時代人で、紀元前 6 世紀の人であるから、それに先立つこと 1000 年以上という話になる。ただし、そういうことが成り立つのを経験的に知っているというのと、それにきちんとした数学的証明を与えるというのは、全く別の事項で、古代メソポタミアで後者についてなされたという証拠は何もない。現存する資料から判断する限り、古代メソポタミアの人たちは、単に経験的にそういうことが成り立つということを知っていたというに過ぎないようである。この定理に限らず、よく知られている幾何学的定理に数学的にきちんとした証明を与えるという話は、やはり古代ギリシャを待たねばならないようである。とにかく、古代ギリシャの人たちは幾何学が大好きである。


水中で瞑想にふけるピタゴラス

Pythagorasというと、豊かな顎髭を蓄え、どこか聖者風の人物の肖像画を目にした方も多いと思われるが、我々はこの人物について多くを知っているわけではなく、著名な数学者のなかではもっとも謎めいた人物の一人であることは疑いない。実際、人口に膾炙しているPythagorasの定理の証明からして、Pythagoras 自身によるものか、それとも Pythagoras 学派の誰か他の人物によるものかも定かではない。Plato（プラトン）や Aristotle（アリストテレス）が Pythagoras 学派の結果や見解に言及する折は必ず Pythagoreans としており、Pythagoras として言及したところは、残っている文献で見る限り、一例もない。古代エジプトからパピルスが古代ギリシャに伝わるのが紀元前 7 世紀の半ばであるが、Pythagoras の時代になってもまだ充分に流通していたとは言いがたく、そのため当時の主たる記録媒体は粘土板であった。残念ながら、こういう幾何学的な議論を記録にとどめるのに、粘土板はあまり適した記録媒体ではない。結果として、Pythagoras の時代には、数学的議論の結果は口伝が主で、これが後世の我々からすると、どの結果が誰に帰属するのか決定するのを頗る困難にしている。

先ほど Pythagoras 学派と言ったが、むしろ Pythagoras 教団あるいは Pythagoras 結社と言ったほうが表現としては的確で、この団体に所属する人々は、内部での議論や得られた結果をすべて秘密にしておくことを鉄の規律とした。数として有理数しか認めていなかった Pythagoras 学派の人々にとって、無理数の発見は相当な衝撃だったようで、これを鉄の掟を破って不用意に口外してしまった哀れな若き Pythagoras 学徒は、程無く遺体で発見されたそうである。なんとも恐ろしい話である。

Pythagoras 学派の狭い意味での数学的業績の主だったものとしては、先に述べた Pythagoras の定理の証明と無理数の発見であろうが、彼らの活動は今で言うところの数理科学に及んでいる。数理科学というと、最初に手がけたのが音楽で、ここではそれについて少し説明しよう。音は空気を伝わる波動なので、周波数で規定される。人間の耳は、二つの周波数の異なる音を、その周波数の差ではなく、その比で捉える。音の高低というやつだ。今に伝わる Episode によると、Pythagoras が通りを歩いている時、鍛冶屋から Hammer で金属板を打つ振動音が聞こえてきた。この音は金属板が大きいほど、音の高さは低かった。この発見に狂喜した Pythagoras であるが、こうした定性的観察に満足せず、話をもう少し定量的にしようとした。弦楽器の弦の長さを丁度半分にすると、奏でる音は丁度 1 オクターブ高くなる。弦の長さの比が 3：2 であると 5 度の音程、4：3 は 4 度の音程となり、先の 1 オクターブ違いの音程と同様に心地よい和音を奏でる。いわゆる完全和音というやつだ。しかし、弦の長さの比を 9：8 の比でやると、完全な不協和音だ。Pythagoras はここに数が音楽を支配していることを見出した。Pythagoras の Academic Ecstasy はここに最高潮に達し、数による森羅万象の支配は Pythagoras 学派の Central Dogma となった。我々はここに原初的な形での数理物理学の誕生を見ることができる。

Piano の白と黒の 12 鍵盤に対して周波数を割り当てると数列になるが、これは等比数列で、公比は大体 1.0594 である。これが現在主流となっている平均律で、隣あう鍵盤の音の周波数の比が同じになるようになっている。しかし、この 12 鍵盤の由来は Pythagoras 音律で、任意の音を基準にしてその周波数を 3/2 倍して次の音を得るという形で規定されていた。なぜ 3/2 倍かというと、もっともよく調和する 2 つの音は周波数の比が 3/2 倍であるという Pythagoras の信念による。これを 12 回繰り返すと、ほとんど 7 オクターブ上がることになる。しかし、厳密に言うと、3/2 の 12 乗はほぼ 129.7 くらいで 2 の 7 乗である 128 より若干高めである。これがいわゆる Pythagorean Comma として知られている Pythagoras 音律の誤差である。いずれにしても、2 と 3 は互いに素なので、これを何回繰り返しても 2 の冪乗倍にはならず、正確なオクターブとの対応は得られない。しかし 2 と 3 に特別な意味を見出して、これで押し切ってしまうところがいかにも Pythagorean なのである。Pythagoras 学派の連中は、集会等があると、楽器を持ち込んで即興で演奏会も開いたりしたようであるが、何分音を記録する技術のない時代の話なので、その腕前のほどは不明である。ちなみに彼らは男性に 3、女性は 2 で、夫婦は 5 などという数字をあてがい、社会のなかにも数学的調和を見ようとした。なかなか強引である。

Galileo Galilei の父親は、Vincenzo Galilei といって、優れた Lute 奏者だった。彼は Pythagoras の音楽の数学的理論に対してはきわめて批判的で、その瑕疵を示すための実験を色々と行っている。長男の Galileo はこれらの実験に大変感銘を受けたようである。口の悪い Vincerzo によると、Pythagoras 学派の連中は全員音痴だったということになる。月並みな父親だった Vincenzo としては、長男の Galileo に医者になって欲しかったようであるが、Galileo は結局 Vincenzo が “（Pythagoras のような）数学者にだけは絶対になるな ” と言っていた数学者になってしまった。Galileo は長じては Pisa 大学や Padua 大学で数学や天文学を教えて生計を立てていた。Galileo は幼い頃から Vincenzo に Lute を始めとする色々な楽器の演奏や音感や Rhythm に関する教育を徹底的に受けている。Galileo の時代には Stopwatch といった便利なものはなかったので、彼が力学の実験を行う折など、体に染み付いた Rhythm 感を駆使して時間を計っている。Galileo の実験好きと研ぎ澄まされた音感は父親譲りである。

Newton によって完成された Copernicus 革命の影響は絶大で、これによって数学は哲学と常識の軛から解き放たれることになる。近代科学は原因よりも原理を追求する。そしてその原理が数学的であるべきという物理学を中心とした近代科学の Central Dogma はここに確立することになる。Pythagoras にとっては見果てぬ夢であった森羅万象の背後にある数学的調和は、圧倒的な存在感をもって現実のものとなる。余談であるが、Einstein が一般相対性理論を作るにあたって取った Approach は頗る Pythagorean である。別に一般相対性理論を必要とするような実験による結果があったわけではない。ただただ時空を徹底的に追求した Einstein の思索の中から生み出された体系が一般相対性理論なのである。