

## 【複雑な世界、単純な法則 ネットワーク科学の最前線】

Graph理論はEuler (1707-1783) がSeven Bridges of Königsberg (ケーニヒスベルクの橋の問題) を否定的に解いたことに端を発する。Königsbergというのは18世紀の始めにはプロイセン王国の首都であった町で、現在はKaliningradと呼ばれ、ロシア連邦西部の飛び地である(PolandとLithuaniaの間にある) Kaliningrad州の州都である。この町を流れるブレイゲル川に当時橋が7つ架けられていたが、任意の場所から出発して、この7つの橋を、二度通らずに、しかしすべての橋を渡ってもとの場所に戻れるかというのが、Königsbergの橋の問題で、EulerはこれをGraph理論の問題として定式化して、否定的に解決した。

Graphというのは、繋がり方を図式的に表示するもので、いくつかの頂点とそれらを結ぶ辺からなる。例えば、あるCommunityの人間を頂点で示し、二人の間に面識があれば、辺をおき、なければ何もおかないことで、そのCommunityの面識関係を示すGraphが得られる。数学的には単純な構造であるが、それだけに色々なところで顔をだす大変重宝な代物である。2頂点を結ぶ最短経路の辺の数をその2頂点間の距離といい、その距離の最大値をGraphの直径という。例えば、三角形を3個の頂点と3個の辺からなるGraphと考えることはできるが、この場合、異なる2頂点間の距離はすべて1で、したがって直径も1である。正方形を4個の頂点と4個の辺からなるGraphと考えることができるが、この場合、最も離れている頂点間の距離は2で、したがって直径も2である。立方体を8個の頂点と12個の辺からなるGraphと考えることができるが、この場合、一番離れている頂点間の距離は3で、したがって直径は3である。

1960年代にStanley Milgramというアメリカの社会心理学者がMilgram Experimentと呼ばれる大変Controversialな実験を行い、“世界はSmall World”という大胆な仮説を提唱した。この文章を読んでいるあなたは、アメリカのObama大統領とは面識がないかもしれないが、あなたの知人の誰かは面識があるかもしれない。あなたの知人の中に彼と面識のある人がいなくても、あなたの知人の知人のなかに面識のある人がいるかもしれない。こうやって知り合い関係を芋蔓式に辿っていくと、あなたからObama大統領に至るまで、最小で間に何人の人間が入ればObama



[Pál Erdős](#) (Hungary 1913-1996)

大統領に辿り着くかということ調べたのが、上記のMilgram Experimentで、Milgramはこの実験をもとに、間に6人くらいをおけば、大抵の人はObama大統領に繋がると主張した(MilgramはObama大統領ではなく、別の人への繋がりを調べたが、ここでは話を簡単にするため、Obama大統領にしている)。これがSmall World仮説で、平たく言えば、“世間は広いようで狭い”ということを目指している。先ほどのGraph理論の言葉で言えば、人間をGraphの頂点とし、二人の人間が知り合いであれば、間に辺をおくことにすると、このGraphの直径は6前後だということを主張しているのが、Small World仮説である。この話は、かなり意表を突く話なので、社会心理学者の専門的世界を超えて広まり、“Six Degrees of Separation(6次の繋がり)”として人々の口に上るようになった。日本でも劇団俳優座が“あなたまでの6人”というTitleで1998年5月に公演を行っている。

こういう考え方は数学の世界ではErdős数としてよく知られている。Erdős(エルデシュ、1913-1996)というのは、Hungary生まれの数学者で、生涯に1500篇くらいの論文を発表しているが、その多くは共著である。Erdősと共著で論文を書くというのは、数学者にとって大変名誉な話で、その数学者が一流であることの証となる。Erdősと共著で論文を書いた数学者にはErdős数1が割り当てられる。Erdősと共著で論文を書いたことはないが、彼と共著で論文を書いた数学者と共著で論文を書いたことがあれば、Erdős数2が割り当てられる。以下このやり方を踏襲し、Erdős数がnの人と共著で論文を書いたことがあれば、Erdős数n+1が割り当てられる。Erdős自身のErdős数は0である。2004年夏にアメリカ数学会がMathSciNetに登録されている著者40万人について面白い調査結果を発表している。それによると、単著の論文しか書いたことのない者は8万人強、共著で書いたことはあるが、Erdősと全く繋がらない者は5万人くらい、有限のErdős数を持つ者は27万人くらいであった。有限のErdős数をもつ者に限定すると、Erdős数の最大値は13、平均値は4.65で、8以下の者が99.5%を占めている。これを見ると、数学者の世界も、間違いなく、Small Worldである。ちなみにHirokazu NishimuraのErdős数は平均に近く、4である。数学者でなくてもErdős数を持っている人もおり、言語学者Noam ChomskyのErdős数は4である。Erdősと生存年代が殆ど重ならないDedekind(1831-1916)やFrobenius(1849-1917)も有限のErdős数を持っており、前者のErdős数が7、後者のErdős数が3である。アメリカ数学会はOnlineで二人の研究者の共同研究間隔を調べるServiceを提供しており、それを使ってHirokazu Nishimuraとその職場の同僚との共同研究間隔を調べてみると、Hirokazu NishimuraとMasahiko Miyamotoの共同研究間隔は7で、かなり離れていることがわかる。Hirokazu NishimuraとAkito Tsuboiはもう少し近く5である。TVで有名な秋山仁先生のErdős数は2である。

こういう考え方はかなり多様な対象に適用できる。有名な俳優のKevin Baconを俳優の世界におけるErdősに見立て、彼と共演したことのある俳優はBacon数が1、彼と共演したことはないが、彼と共演したことのある俳優と共演したことのある俳優はBacon数2といった具合にErdős数と同様にBacon数を定義する。The Internet Movie Databaseに載っている俳優であれば、The Oracle of BaconというSiteでBacon数を簡単に調べることができる。The Internet Movie Databaseには50万人くらいの名前が登録されているが、数百人の俳優を除くと、すべての俳優は6段階くらいでKevin Baconと繋がってしまう。Kevin Baconと10段階以上離れている俳優は一人もいない。平均で、2.896である。こうして見ると、俳優の世界も間違いなくSmall Worldである。ちなみに、日本人でも、俳優の役所広司のBacon数は2、美輪明宏のBacon数は3である。

Internetというのは、相互に繋がっているNetworksを芋蔓式に辿って行って、直接は繋がっていないNetworks間でのCommunicationを樹立する手法であるが、この世界もSmall Worldであることが知られている。1990年代に当時アメリカのBell研究所に在籍していたWilliam R. CheswickとHal Burchは、5年くらいにわたって、来る日も来る日も毎日1万個くらいの情報のPacketsをInternetへ流し続けた。このPacketの辿る経路を追跡してやることで、Internetの地図を作成するためである。御存知のように、Internetというのは、誰か設計者や管理者がいるわけでもなく、完全に草の根民主主義の世界でLaissez-faireの世界である。それにもかかわらず、出来上がってきた地図を見ると、あなたのPCがぶら下がっているNetworkから地球の反対側のとあるPCへ電子Mailを送るために必要なLinkの数は通常わずか4くらいなのだ。苦労してLinkをさせるのが極めて困難なPCのPairを探し出しても、そのLink数は11を越えることはない。Internetは自分自身を完全にSmall Worldに組織化してしまったことがわかる。

今50の孤立した村があるとし、この孤立状態を解消するために、村と村の間に道路を張り巡らせると仮定しよう。ただし、どの二つの村も道路で繋ぐとすると、1225本の道路が必要になり、財政的に苦しい。そこで要求を少し控えめにし、どの二つの村も他の村を経由しても構わないから、道路伝いに行けるようにするには、村と村を結ぶ何本の道路があれば、いいのだろうか？ここでもう少し現実に目を向け、これらの村を統括する道路局はどうしようもなく無能で、次から次に、いきあたりばつぱりに選んだ二つの村を繋いでいくものとする。この条件のもとで、すべての村が道路網でつながるには、何本の道路があれば、いいのだろうか？これは決して易しい問題ではなく、1959年にErdősによって解かれ、答えは98本である。Erdősはもう少し一般的な問題を解き、50個の場合だけでなく、任意の $n$ について解答を与えた。この解答は極めて興味深く、 $n$ が大きくなるほど、実際に必要となる道路の本数の可能な道路の総数に対する比率は減少していく。 $n$ が300で2%弱、1000になると1%にも満たない。1000万では0.0000016%で十分である。このErdősによるRandom Graphに関する理論から言えるのは、Small Worldというのは、決して起こりにくい現象ではないということだ。

ここまで読んできて、Small WorldやNetworkに興味がでてきたあなたにこの本を薦めます。読んで、決して後悔することはないと思います。

Hirokazu Nishimura (Institute of Mathematics, University of Tsukuba)