筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第36集　1997年３月

創造的な教材・指導法の実践的研究
——中高一貫の数学カリキュラムの基礎的研究（その１）——

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
城野　正彦・井上　正允・熊倉　啓之・駒野　　誠
鈴木　清夫・深瀬　幹雄・牧下　英世

創造的な教材・指導法の実践的研究

中高一貫の数学カリキュラムの基礎的研究（その１）

――本校49期生の追跡調査から――

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科

城野　正彦・井上　正允・熊倉　啓之・駒野　誠
鈴木　清夫・深瀬　幹雄・牧下　英世

１．はじめに

中高一貫の必要が叫ばれ，都市部を中心に私立の中高一貫校はますます広がる傾向にある。しかし，不思議なことにこれまで中高一貫のカリキュラム研究についてほとんど取り組まれてこなかった。小学生やその親を対象にした大手進学塾が発行する雑誌は「中高一貫校の優秀さ」を盛んに喧伝するが，「大学受験と関連づけた中高一貫校」というものが多く，青年期の前期・後期の子ども達の発達・成長に照らしながら教育内容を考える視点は忘れがちである。受験にわずらわされずに試行錯誤を重ねながら「自分探し，自分づくり」にエネルギーを費やすことは人間として自立していく過程で不可欠なもので，現在の中学校３年－高等学校３年に区切られた学校段梯が子ども達の成長・発達，「学び」の発展・深化にとってプラスには作用していないのではないかという推測・判断がわたしたちにはある。本研究は本校の「中高一貫校のカリキュラム構成に関する基礎的研究」（３年計画1995.４～1998.３）に連動させながら，数学科で取り組みを始めたものである。中高の６ヵ年で生徒の「数学観がどう変容していくのか」，「問題解決する上での数学的思考・方法等の広がり・深化についてはどうなのか」に焦点を当てて，全体調査，個人追跡の両面から調査分析，研究に着手した。

２．学校全体の取り組み

本校では1994年度末，「中高一貫校のカリキュラム構成に関する基礎的研究」と題するプロジェクトを発足させることにした。それは1994年度より５ヵ年計画として設定された本校の教育研究主題

新しい時代における個性をのばす教育とは何か

－これからの中高一貫校のあり方をさぐる－

1　情報化・国際化・個性化社会を見通したカリキュラムの検討

2　テーマ学習を組み込んだ中高一貫教育の検討

3　５日制実施のためのカリキュラムの再検討

とも連動するものである。

具体的には1995年入学の本校49期生を対象に６年間にわたる追跡調査を行い，心身共に成長著しい中高６年間の変化にいかなる要因が働いているのか，また現行カリキュラムがいかに作用しているのかを調査・研究することで，成長期の生徒にとっての学校の果たす機能を綿密に検証し，今後のカリキュラム改革へ向けての指針を得ることを目的としている。初年度から49期担任団・各教科・生徒部がそれぞれの立場から調査項目を検討した上で調査を実施した。６年間の変化を追うのが主目的のプロジェクトであるため，現段階では十分な分析がなされているものではない。しかし，単なる学力の変化や教科の習熟度を調べるのとは全く違った発想の試みを目指していることを理解して頂きたい。

なお本プロジェクトには本校の全教員が関わり，個々の調査項目や結果については毎年２回行っている本校教員の研修会である「校内研修会」において報告・討議を経て共通理解を得ている。また今後は筑波大学教育学系・心理学系の教授をはじめとした方々の研究協力・指導助言も得つつ，本プロジェクトを進めていく予定である。

３．数学科が取り組んだ調査の内容

①作文調査（中１，中３，高２で行う）

「算数・数学と私」という題で，生徒個々がもっている数学に対するイメージ，数学への興味や関心，数学を学んで感じたこと，数学と日常生活の関わり，今までに読んだ数学の本で印象に残っているものなどについて，各自それぞれの数学観を自由に書かせた。中学１年の時点では全生徒を調査対象として作文を書かせたが，今後はさらに２年ごとに作文を書かせ，その中から特定の何人かを選び出してその生徒の数学観やものの考え方にどのような変化が見られるかを追跡調査する予定である。

②意識調査（中１，高１，高３で行う）

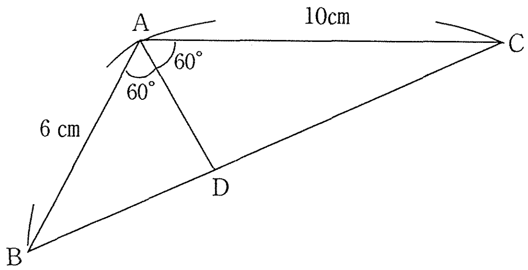
中学１年の終りに数学の好き嫌い，数学を学習する意味，数学がどのような点で役に立つと思うか，数学に対するイメージなどについてアンケート形式により調査した。アンケートの集計結果は51～56ページの通りである。これについても２年ごとに同様のアンケート調査を行い，数字がどのように変るかを調べる。どの項目で大きく数字の変化が見られるのか，どの項目で数字の変化があまりないのかに注目し，生徒の成長過程にともなう数学についての意識・数学観の変容を調査する予定である。

③解答調査

同じ問題を異なる学年で解答させ，その問題の解き方の変化を調査する。Ａ～Ｄの４つの問題について中学の時と高校の時で解き方にどれだけの違いが見られるのかを全体と個人の両面から調査する予定である。49～50ページにその内容を記しておく。

★解答調査の調査問題とそのねらい

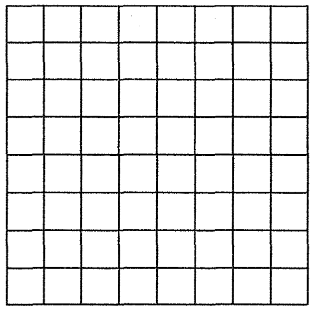
調査問題A：下図のように，ＡＢ＝６cm，ＡＣ＝10cm，∠ＢＡＣ＝120°の△ＡＢＣで，∠Ａの２等分線とＢＣの交点をＤとする。ＡＤの長さを求めよ。
また，別の求め方があればそれも答えよ。



出題のねらい　この問題では相似の平行線と比，ピタゴラスの定理，60度・30度の直角三角形の三辺比，面積の利用，解析幾何（座標軸の設定），三角比，余弦定理などさまざまな解法が考えられる。生徒が今までに学んだ数学の知識や技能をどのように用いて解答しているか，中学と高校で解法の広がり・深化がどう違うかを調べる。
（中２，高１で行う）

調査問題Ｂ：（１）右の図の中に正方形は大小合せて全部で何個あるか。

（２）右の図を用いた「問題」を作り，その解答を書け。（１つでなく，できるだけたくさん作れ。）



出題のねらい　（２）の作問により，作る問題に中学と高校でいかなる違いがあるのかを調べる。生徒の発達段階によって生活経験，社会的関心，数学的知識などが当然異なるので，それらが作問の中にどう活かされているかを見たい。また，本問の（１）にどれだけ引きずられているかも注目される。（中２，高１で行う）

調査問題C：適当な正の整数を考える。各位の数の和を求め，それが2桁以上だったらさらに同じことを繰り返し，1桁になったら止める。

例　5678→5＋6＋7＋8＝26→2＋6＝8

1234→1＋2＋3＋4＝10→1＋0＝1

（1）もとの数と，求めた1桁の数にはどんな関係があるか。

<u>また，それはなぜか。</u>

（2）例にある2つの正の整数の1桁の数の和は，8＋1＝9

また，2つの正の整数の和について1桁の数を求めると，

5678＋1234＝6912→6＋9＋1＋2＝18→1＋8＝9

となり，1桁の数は一致する。このことはいつでも成り立つか。

また，和ではなく差や積ではどうか。

出題のねらい　類推や帰納的思考によって法則が発見できるか。また，それをいかに証明することができるかを調べる。とくに，中学と高校の証明についての理解の深化に注目している。(中3，高2で行う)

調査問題D：A，B，C，D，E，F，G，Hの8人が，自分自身を含む8人のことについて，それぞれつぎの様に言っている。

A：僕たちの中で少なくとも1人は正しいことを言っています。

B：僕たちの中で少なくとも2人は正しいことを言っています。

C：僕たちの中で少なくとも3人は正しいことを言っています。

D：僕たちの中で少なくとも4人は正しいことを言っています。

E：僕たちの中で少なくとも1人は間違ったことを言っています。

F：僕たちの中で少なくとも2人は間違ったことを言っています。

G：僕たちの中で少なくとも3人は間違ったことを言っています。

H：僕たちの中で少なくとも4人は間違ったことを言っています。

間違ったことを言っているのは誰か。(いない時はいないと答えよ。)

間違ったことを言っている人を<u>どのように考えて求めたのかも答えよ。</u>

出題のねらい　この問題も多様な解決法が考えられる。いかなる手順で答えを導き出すのか。さらにそれをどう記述するか。数学で学んだ知識や技能がいかに論理的思考に活かされるかを調べる。(中3，高2で行う)

★意識調査について

数学に関するアンケート集計結果（1996年１月実施）対象49期生（中学１年）123人

1．小学校の時に学んだ算数は，好きでしたか？

大好きだった	41	33.3%
どちらかといえば好き	53	43.1%
普通だった	18	14.6%
どちらかといえば嫌い	8	6.5%
大嫌いだった	3	2.4%

4．現在学んでいる数学は，好き？

大好き	27	22.0%
どちらかといえば好き	58	47.2%
普通	30	24.4%
どちらかといえば嫌い	5	4.1%
大嫌い	3	2.4%

2．小学校で学んだ算数で，印象に残った内容？

比，ダイヤグラム作り，鶴亀算，体積公式の実験，円周率，オイラーの定理，立体図形，場合の数，数列，速さ，パズル，パラドックス，分数の掛け算と割り算，面積や体積の求め方，方程式，コンパスの誤差，円錐の製作，掛け算の九九，図形の相似，3：4：5の三角形

3．算数・数学の成績と頭の良さの関係？

関係あり	42	34.1%
どちらともいえない	51	41.5%
関係ない	30	24.4%

5．好きな分野と嫌いな分野

	好き	嫌い
数と式	29	30
方程式・不等式	41	29
関数	31	23
図形	68	18
確率	25	33
統計	9	14
その他	8	15

6．塾・予備校で，数学を学習しているか？

学習している	70	56.9%
学習していない	53	43.1%

7．学校以外で行う数学の勉強時間は週に何時間？

時間	1未満	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	……	21
人数	20	20	11	17	11	14	9	9	4	2	3	1		1

8．数学の本をこの１年間で何冊読んだか？

冊数	0	1	2	3	4	5	……	8	9	10	……	15
人数	8	56	23	15	10	5		1	2	2		1

印象に残った本の書名

数学がおもしろくなる12話，数学迷答集，確率の世界，ピサの斜塔で数学しよう，万里の長城で数学しよう，数学オリンピックでみる現代数学，０から無限へ，統計学で楽しむ，ディズニーランドで数学しよう，ピラミッドで数学しよう，数学は友だち，数学遊園地，数のはなし，数学間違い全集，πのはなし，東海道五十三次で数学しよう，微積分入門，フェルマーの最終定理が解けた，カオスとフラクタル，素数の不思議

9. あなたにとって，数学を学習する意味は何だと思うか？

将来，役に立ちそうだから	42	34.1%
問題を解くのが楽しいから	68	55.3%
考え方・理論がきれいだから	40	32.5%
教養だから	24	19.5%
授業（受験）があるから	35	28.5%
その他	7	5.7%
計	216	

10. 数学は，どのような点で役に立つと思いますか？

将来仕事をする上で，数学の知識が役に立つ	31	25.2%
将来仕事をする上で，数学の考え方が役に立つ	57	46.3%
物事を論理的に考える力がつく	66	53.7%
役に立つことはあまりない	11	8.9%
その他	5	4.1%
計	170	

11. 数学に関して，「不思議だ」「おもしろい」「きれいだ」と感じたことは？

＊鶴亀算，相似，場合の数，確率
＊公式をつかうと，答えがすぐ，きれいにでてくるのが不思議だった
＊今まで全然違うやり方で解いていたのに，習った事を使って簡単に解けた時
＊コンパスと定規だけで，正五角形が描けること
＊ｎ次式
＊循環小数をｘに置き換えて分数に直す方法
＊とても難しい問題が解けるとおもしろく感じる
＊図形の証明がうまくいったとき
＊算数ではちょっと無理のある解き方だったが，数学ではまともにすんなり解けるようになった
＊合同式で，いろいろなタイプの問題が解けることをおもしろく思った
＊関数を勉強している時に，ａ，ｂ，ｃなどだけで式を作っていくと，あざやかにできてきれいだと感じた
＊幾何のいろいろな証明をして，おもしろかった
＊答えが出てくるのがおもしろい
＊今までに学習したことを応用した図形等を見て（作って）きれいだと感じることがある
＊幾何の証明で，小学校まで公式としてだけ覚えてきたのに，どうしてかが分っておもしろかった
＊答えの出し方が楽しい，ひらめきの必要性は難しい
＊オーム貝やケヤキの木など自然のものにフィボナッチ数列（黄金比）がかくれていること
＊星形多角形はきれいだ
＊鶴亀算の仕組みが不思議，方程式がおもしろい，角を求める問題がおもしろい，スピログラフがきれい
＊球の表面積と体積
＊今まで記号を使ってごちゃごちゃした計算をしていたが，ｘを使った式や方程式を習って，すっきり解けるようになり，すごいなと思った
＊代数の合同式は，意外に応用性が高かったのがおもしろかった
＊素数の研究をして，素数のおもしろさ，不思議さがよく分った
＊数と数の関係がきれいだった
＊素数について
＊代数は小学校の算数と違い，公式が多くなったので，なぜこうなるのか色々不思議だと思うことが多くなった
＊文章題の問題を解いていくのが推理みたいでおもしろい

＊合同式で，ものの値段から何匹買ったかを出す方法がおもしろく，不思議だった。また，スピログラフの歯数と花びらの数の関係も不思議で楽しかった
＊問題がとんとん解けたり，難しい問題が解けたりするとおもしろい
＊公式などで難しいものが簡単に解けるところ
＊星形図形の角度
＊パスカルの三角形が不思議，連立方程式はきれいに解けてきれいだ
＊素数が不思議だと感じた，図形を書いていてきれいだと感じた
＊オイラーの定理
＊ジュリア集合，マンデルブロー集合は美しい，パイも美しくおもしろい，素数もおもしろい
＊今まで算数で苦労したことが，数学になると簡単に解けてしまうのでおもしろい
＊ピタゴラスの定理がとてもうまくできていること
＊考えぬいて解くことが楽しいが，一度面倒だと思うとやりたくなくなる
＊図形でｘを求める問題がおもしろいと思った（２）
＊すべてにあてはまるようにできている公式がとても不思議だ
＊行きづまってしまったとき，発想を変えたらすぐできたことがおもしろいと思った
＊数学の中でも，証明がとてもきれいだなあと思う
＊難しい問題が解けると，気持ちがすっきりする
＊パズルをするときの答えがわかったときにおもしろい
＊合同式の性質がおもしろい
＊図形がおもしろい
＊黄金比，ａ，ｎなどの文字をおくことによって，いろんな数が出せるのが感動した
＊代数できれいに簡単に解けるというのがおもしろいと思う
＊因数分解がおもしろい
＊夏休みの宿題で作ったもの，本でよんだ９の性質
＊何でこうきちっと出てくるか不思議だ，解くのがおもしろい
＊幾何で，分っている条件がほとんどないのに，へんなところの角度や長さがわかること
＊とてもなやんだ問題が解けるとおもしろい
＊球の体積，表面積の求め方を不思議と思った
＊公式をつかったとき，全部ぴったりあうとおもしろい
＊１つの答えを出すのに全く違う解き方がある点，少し工夫するだけで非常に美しく解ける点
＊数学は他の科目とは違って，答えが１つしかないのできれいであると思います。１つの答えを追求するのがおもしろいです
＊星形多角形の角がみごとにわりだせるところで，おもしろく，きれいだと思った
＊合同式の利用，互いに素な約数の数の求め方，星形やうずまき形多角形の内角の総和，95年度のセンター試験の問題が関数で解けた

12. 現在数学に関して抱いているイメージは？

＊おもしろい（11）
＊難しい（12）
＊美
＊奇妙
＊頭が痛い
＊何のためにやっているか分らない
＊一般性
＊進化し続ける生物
＊形がはっきりしてきた
＊頭の体操
＊面白いが分野によっては難しい
＊複雑だ（２）
＊難しいものとわかりやすいものがある

＊やっていることは無意味である
＊今までわからなかったことがわかるので面白い
＊不思議である
＊パズルのようなもの
＊かっこいい
＊すごい（2）
＊楽しい（2）
＊自分が好きな科目で楽しいもの
＊文字と図の最も不思議な学問
＊難しい，楽しい，たまにはまることがある
＊公式がわからないと解けない
＊きらい
＊奥が深い（2）
＊論理的
＊面倒くさい（2）
＊応用が難しい
＊不思議で面白いけどめんどくさい
＊ひま人の考え出したたわごと
＊楽しいけれど難しい
＊内容が理解できると面白い
＊謎のかたまり
＊算数の方が簡単です
＊五里霧中でモヤモヤ
＊範囲がとてもひろがり，難しく思ったがなかなか面白いです
＊算数より論理的で難しい
＊計算は嫌いだ
＊少し難しいが楽しい（3）
＊難しいが問題を解くのは楽しい
＊暗い
＊好きだけど，よく分らない
＊芸術
＊難し過ぎる
＊命令文章
＊つかれる
＊数学は芸術だ
＊不思議な世界
＊最も楽しい教科だと思います
＊覚える数学は嫌だ！覚えることが多過ぎる
＊数学を習って将来の何に役立つのか，今だよく分らない
＊奥が無限（底なし）で，とてもおもしろい
＊ふつうの存在
＊自然界の謎を解くすばらしい手段（さらに世界が広がると思う）
＊面倒くさくて難しい
＊謎と神秘に満ちた世界，しかし，その世界を何とか理解したい
＊（問題が）できれば面白い
＊法則や公式にはいろいろな理由があり，奥が深い
＊数学は神秘だ！
＊ややっこしくて，とっつきにくい

〔参考資料〕
数学科アンケート結果（1995.10.5）対象47期3年C組41人

1. 小学校の時に学んだ算数は，好きでしたか？

大好きだった	8	20%
どちらかといえば好き	18	45%
普通だった	5	12.5%
どちらかといえば嫌い	6	15%
大嫌いだった	3	7.5%

4. 現在学んでいる数学は，好き？

大好き	5	12.5%
どちらかといえば好き	12	30%
普通	10	25%
どちらかといえば嫌い	9	22.5%
大嫌い	4	10%

2. 小学校で学んだ算数で，印象に残った内容？

鶴亀算（面積図）5人，等積変形，三角形の角の和は180度，加比の理，円周率を求めた，分数の割り算の図形的解法，ニュートン算

3. 算数・数学の成績と頭の良さの関係？

関係あり	12	30%
どちらともいえない	19	47.5%
関係ない	9	22.5%

5. 好きな分野と嫌いな分野

	好き	嫌い
数と式	5	6
方程式・不等式	13	11
関数	11	13
図形	15	13
確率	4	16
統計	1	11
その他	2	4

6. 塾・予備校で，数学を学習しているか？

学習している	28	68.3%
学習していない	13	31.7%

7. 学校以外で行う数学の勉強時間は週に何時間？

時間	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
人数	3		5	2	4		12	1	6		3		3		1

119.5／40＝約3時間

8. 数学の本をこの1年間で何冊読んだか？

冊数	0	1	2	3	5	10	60
人数	19	4	4	2	4	1	1

平均　3.08冊（60冊を除くと1.37冊）

9. あなたにとって，数学を学習する意味は何だと思うか？

将来，役に立ちそうだから	12	16.6%
問題を解くのが楽しいから	12	16.6%
考え方・理論がきれいだから	13	18.1%
教養だから	12	16.6%
授業（受験）があるから	20	27.8%
その他	3	4.2%
計	72	

10. 数学は，どのような点で役に立つと思いますか？

将来仕事をする上で，数学の知識が役に立つ	8	14%
将来仕事をする上で，数学の考え方が役に立つ	11	19%
物事を論理的に考える力がつく	23	39.7%
役に立つことはあまりない	12	20.7%
その他	4	6.9%
	計58	

11. 数学に関して感じたこと？

＊フェルマーの定理のように簡単そうで難しい
＊テーマ学習
＊難しそうな問題をちょっと見方を変えたら楽に解けたとき
＊負×負＝正
＊πについて
＊自然界にたくさん数学が隠されている
＊何の目的があって数学が生まれたのだろうか。それとも遊びのつもりでできたのだろうか
＊そんなものはない
＊錐の１／３が騙されたような気がする
＊スピログラフ
＊公式がきれい

12. 現在数学に関して抱いているイメージは？

＊数学は美しい。計算はいやらしい。論理はすばらしい。
＊平面上での話だという感じがある
＊難しすぎ
＊いいね，すごくいい感じ
＊証明が面倒臭い
＊はっきりしたかつややこしいもの
＊ややこしいもの
＊だんだん簡単になってきた
＊理解に苦しむ
＊むずかしい（２）
＊奥が深い（２）
＊おもしろい，むずかしい（好きな人はとことん好きに嫌いな人はとことん嫌いになるような教科）
＊難しいが面白い
＊何を言っているのかわからない
＊うざい（２）
＊解るのに苦労する
＊ひっくりかえらない
＊数式操作
＊なかなかおもしろいのだ
＊やりたくないがやらなければならない教科
＊面白い，奥が深い
＊理論的
＊一番おもしろい科目
＊一言では書けない
＊むずい
＊分野がたくさんある
＊最悪なくらい難解なもの

★調査問題Aについて

解答分類（数字は解答数）（予備調査　中学３年生）

分　　類	A	B	C	D	E	F	G	H	合計
相似比	29	2	13		8	2		1	55
相　似　比 直角三角形の性質		6		3		1	1		11
相　似　比 ピタゴラスの定理		1		2					3
相　似　比 角の二等分比	1			1	1				3
面　積　比 直角三角形の性質				5					5
ピタゴラスの定理				4(3)					4(3)
余弦定理	1	1							2
直線の方程式								1	1
合　　計	31	10	13	15(3)	9	3	1	2	84(3)

１．（　　）内の数は，解答の中の誤答数
２．直角三角形の性質とは，辺の比が１：２：$\sqrt{3}$ を利用したもの
３．直線の方程式とは，座標を導入して，直線の方程式を利用したもの

解答分類（数字は解答数）（予備調査　高校２年生）

分　類	A	B	C	D	E	F	G	H	合計
相似比	16	8	15	5	11	2		1	58
相　似　比 ピタゴラスの定理				1					1
面　積　比				6			1	1	8
ピタゴラスの定理		2(1)	1	11(2)				1	15(3)
余弦定理			2	3	1		11(2)		17(2)
三　角　比	1	4		2			2		9
直線の方程式								1	1
合　　計	17	14(1)	18	28(2)	12	2	14(2)	4	105(5)

1．(　　) 内の数は，解答の中の誤答数
2．三角比とは，三角形の面積をSINを用いて表現したもの
3．直線の方程式とは，座標を導入して，直線の方程式を利用したもの

解答分類（数字は解答数）（本調査　中学２年生）

分　類	A	B	C	D	E	F	G	H	合計
相　似　比	63	3	17		15	6	1	10	115
相　似　比 直角三角形の性質				1					1
ピタゴラスの定理				1					1
合　　計	63	3	17	2	15	6	1	10	117

［考察］１．中２では，ほとんどの解答が相似比を用いたものである。

２．中３では，解答数では相似比を用いたものが多いが，直角三角形の性質や面積比を用いたものがでてくる。

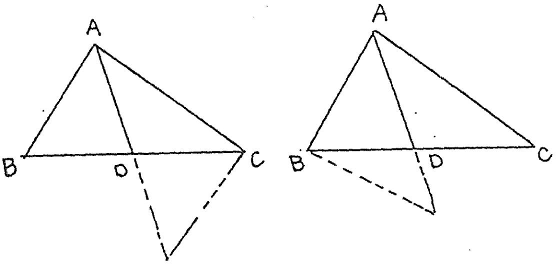
３．高２では，ピタゴラスの定理，余弦定理と辺の長さの関係を用いた解答がふえる。

４．平行線を引くと相似比，垂線を引くとピタゴラスの定理や面積比，補助線なしで余弦定理などと補助線によって解答が変化する。

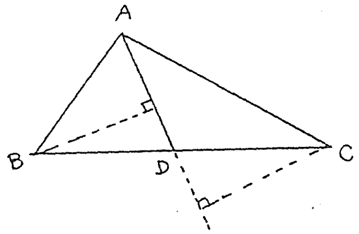
※次に解答分類Ａ～Ｈの解答に見られる補助線の引き方を紹介しておく。

補助線の引き方（高校２年生）

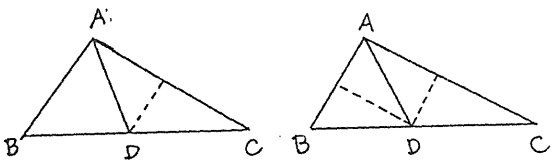
A：



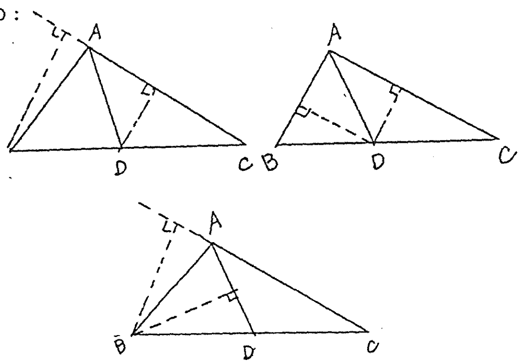
B：



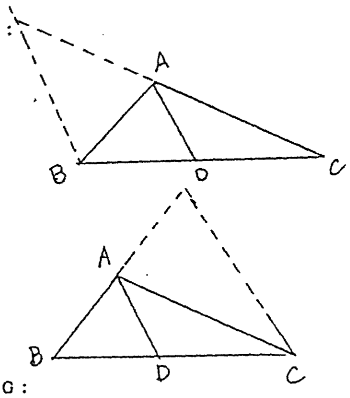
C：



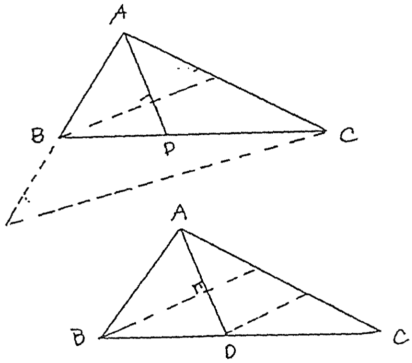
D：



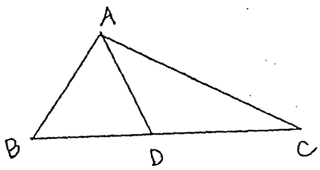
E：



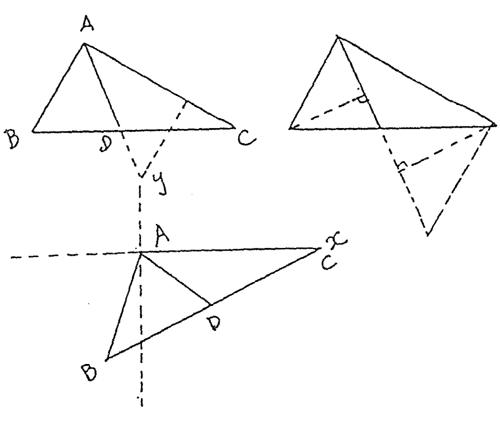
F：



G：

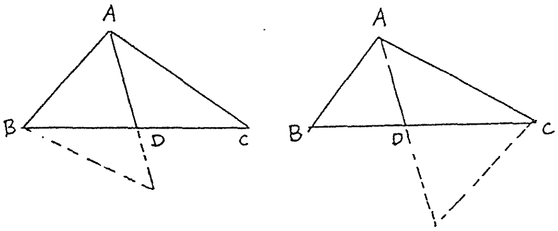


H：

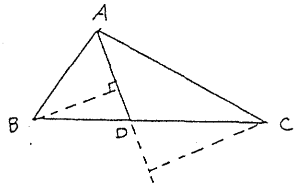


<u>補助線の引き方（中学２年生）</u>

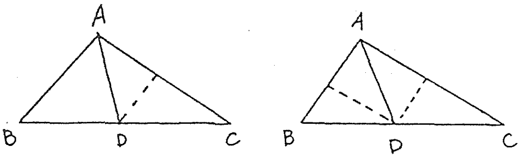
Ａ：



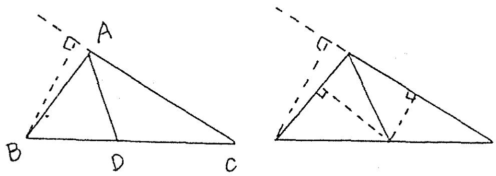
Ｂ：



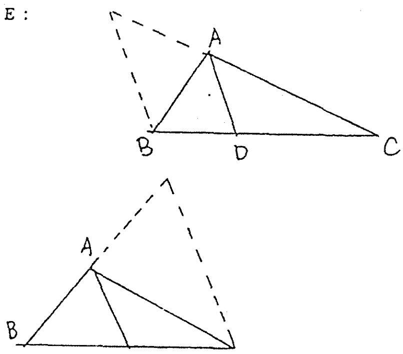
Ｃ：



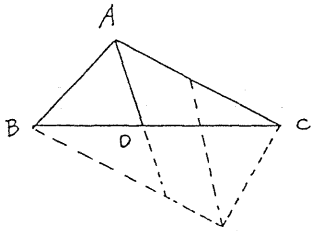
Ｄ：



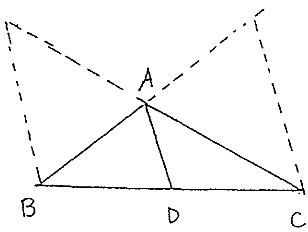
Ｅ：



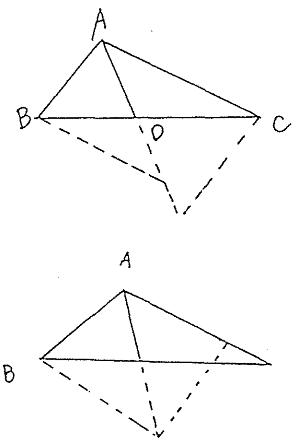
Ｆ：



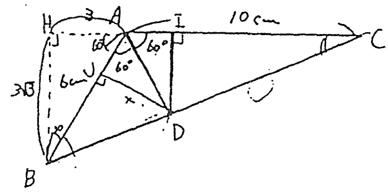
Ｇ：



Ｈ：



高校２年生解答例



D：面積比

図のように点 H．I．J をとると．

$\triangle ACB = 10 \times 3\sqrt{3} \div 2 = 15\sqrt{3}$

ADは∠Aの２等分線なので　BD：DC＝3：5．

$\therefore \triangle ABD : \triangle ADC = 3:5$．$\therefore \triangle ABD = \frac{45}{8}\sqrt{3}$　$\triangle ADC = \frac{75}{8}\sqrt{3}$

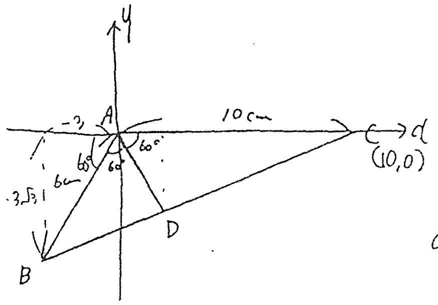
また $\triangle AJD \equiv \triangle AID$ なので

$JD = ID = x$ とおけ．$AD = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

$3x = \frac{45}{8}\sqrt{3}$　$\therefore x = \frac{15}{8}\sqrt{3}$

$\therefore AD = \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{15}{4}$

答 $x = \frac{15}{4}$



H：直線の方程式

xy 座標を導入する。

原点は $A(0,0)$

$C(10,0)$

$B(-3,-3\sqrt{3})$

BCを通る直線の式は，$y = \frac{3\sqrt{3}}{13}x - \frac{30\sqrt{3}}{13}$

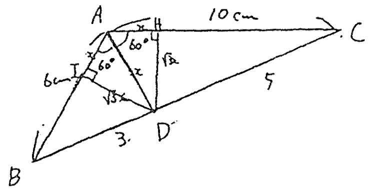
ADを通る直線の式は，$y = -\sqrt{3}x$

Dはこの2直線の交点だから　$D\left(\frac{15}{8}, -\frac{15\sqrt{3}}{8}\right)$

$\therefore AD = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + \left(-\frac{15\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{15}{4}$

//

高校２年生解答例



D：ピタゴラスの定理

DからACに垂線DH、DからABに垂線DIを下ろし

AI$=x$とすると　$\triangle AID \equiv \triangle AHD$　($\because \angle IAD = \angle HAD$, $AD = AD$, $\angle ADI = \angle ADH$)

より　AH$=x$ となり、DI$=$DH$=\sqrt{3}x$

また、ADが∠Aの2等分線であり、AB：AC＝3：5 であるので

BD：DC＝3：5　　$4x^2-12x+36 : 4x^2-20x+100$

$\therefore \quad (6-x)^2+(\sqrt{3}x)^2 : (10-x)^2+(\sqrt{3}x)^2 = 9:25$

これをといて、

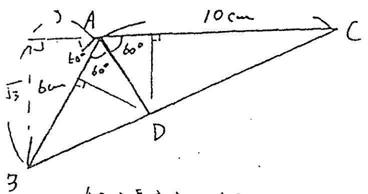
$$100x^2-300x+900=36x^2-180x+900$$

$$64x^2-120x=0$$

$$8x(8x-15)=0$$

$x>0$ より　$x=\frac{15}{8}$

$$\therefore AD=2x=\frac{15}{4}$$



D：三角比

ADの長さxとすると

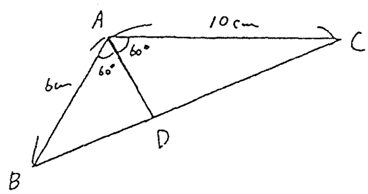
$\triangle ABD$の面積 $S = x\sin 60° \times (6+10) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}x}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}x$　—①

また図より　$S = 13 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 3 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 15\sqrt{3}$

①＝②より　$4\sqrt{3}x = 15\sqrt{3} \iff x = \frac{15}{4}$ cm

G：余弦定理



まず、余弦定理より、

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos 120^\circ$

$= 196$

$\therefore BC = 14$

ADは∠BACの二等分線なので

$BD : DC = AB : AC = 6 : 10 = 3 : 5$

よって、$BD = \frac{21}{4}$　，$DC = \frac{35}{4}$

$AD = x$ とおくと、余弦定理より、

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\,AD\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{441}{16} = 36 + x^2 - 6x = x^2 - 6x + 36$

$x^2 - 6x - \frac{135}{16} = 0$ ……①

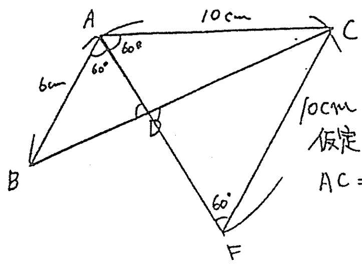
$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{1225}{16} = x^2 + 100 - 10x = x^2 - 10x + 100$

$x^2 - 10x - \frac{375}{16} = 0$ ……②

①．②より．$4x = \frac{240}{16}$　　$\therefore x = \frac{15}{4}$（答）

中学２年生解答例



点Cを通るABに平行な線をひき、その線とADをのばした線の交点をFとする。

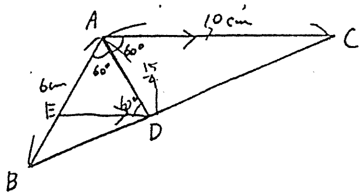
仮定：AB//CF．AB=6cm．
AC=10cm．∠BAD=∠CAD=60°

証明：△ADBと△FDCにおいて、
仮定よりAB//CFなので錯角により∠BAD=∠CFD …①
同様にして∠ABD=∠FCD…②
①，②より二角相等で△ADB∽△FDC …③

△ACFにおいて
①より、∠CFD=60° …④．仮定より∠CAD=60°…⑤
④⑤より∠FCA=60°　よって△ACFは正三角形…⑥
⑥より、AC=CF=FA=10cm …⑦ 仮定よりAB=6cm…⑧
⑦，⑪⑧より△ADBと△FDCの相似比は3:5
よってAD:DF=3:5，⑦よりAFは10cmだから

$AD=10\times\frac{3}{8}=\frac{15}{4}$　　$AD=\frac{15}{4}$ cm

中学２年生解答例



DからACに平行なDEをひく。

AC // DEより平行線の錯角は等しいので

$\angle ADE = 60°$

∴△ADEは正三角形。

ADをxとすると

$AD = DE = AE = x$

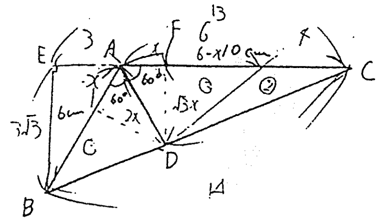
$DE : AC = BE : AB = x : 10$

AB = 6cm だから

∴ $BE = \frac{3}{5}x$

∴ $6 - \frac{3}{5}x = x$

$x = \frac{15}{4}$　　A. $\frac{15}{4}$



(時間がない＋まちがってそうだから簡単に)

△ABEをつけ、それぞれの長さをだし　(図のように)

AFをxにする

$EC : EB = FC : FD$

$= 13 : 3\sqrt{3} = 10 - x : \sqrt{3}x$

$30\sqrt{3} - 3\sqrt{3}x = 13\sqrt{3}x$

$16\sqrt{3}x = 30\sqrt{3}$

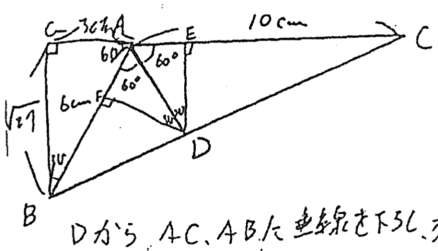
$16x = 30$

$x = \frac{15}{8}$

$AD = 2x = 2 \times \frac{15}{8} = \frac{15}{4}$

$\frac{15}{4}$ cm

中学２年生解答例



Dから AC、ABに垂線を下ろし、交点を E、F とする。
また、ACの延長にBから垂線を下ろし、交点をGとする。
△ABGは内角が30°、60°、90°の直角三角形であるため、
AG＝3cm
三平方の定理より、
BG＝$\sqrt{27}$cm
よって△ABCの面積は、$5\sqrt{27}$cm²
△AFD≡△AEDなので
FD＝ED
△ABCを△ABDと△ACDに分けて、
FD＝ED＝$\frac{5\sqrt{27}}{8}$cm
AE＝$x$cmとすると、
△AEDは内角が30°、60°、90°の直角三角形であるため、
AD＝$2x$cm
三平方の定理より

$$\left(\frac{5\sqrt{27}}{8}\right)^2+x^2=4x^2$$

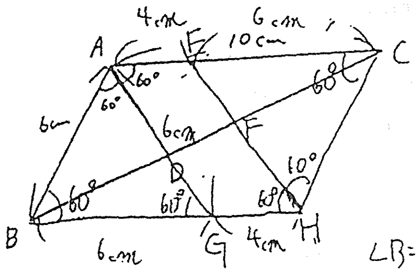
$$\frac{675}{64}=3x^2$$

$$\frac{225}{64}=x^2$$

$$\frac{15}{8}=x$$

AD＝$2x$cmなので、
AD＝$\frac{15}{4}$cm

中学２年生解答例



△ABCと合同な図形

△HCBをつくる．

AC//BH

AB//CH

∠A＝120°より

∠H＝120°より

$\angle B = \dfrac{360-(120\times 2)}{2} = 60°$

$\angle G = 180-(60\times 2) = 60°$

よって△ABGは正三角形．

なので、AGは6cm

BGは6cmなので

GHは4cm。

同様にHEを引く．

HE＝6cm

AE＝4cm。

AE＝GH＝4cm
AC//BHより

AG//EH　∠ EF : DG

△ADCと△EFCは相似

5 : 3 なので

$6\times\frac{5}{8} = 3\frac{3}{4}$

A $3\frac{3}{4}$ cm

★調査問題Bについて

＜予備調査＞

（1）について

・調査総数　62名（中学３年48期40名，高校２年46期22名）

・正答数　　58名（中学３年95%，高校２年91%）

・白紙　　　なし

（2）について

・調査総数　62名（中学３年48期40名，高校２年46期22名）

・白紙　　　６名（中学３年４名，高校２年２名）

・作問総数　76問（中学３年39問，高校２年31問）

分野		中3 %	高2 %
①平面図形	A　図形の個数	31	29
	B　経路	28	26
	C　線の本数	3	
	D　しきつめ	10	3
	E　反射	3	
	F　面積	8	3
	G　長さ		
	H　角度	3	
	I　点の個数		
	J　出会い・追跡	3	3
	K　さいころを動かす		
	L　重心		
	M　その他	8	13

分野		中3 %	高2 %
②空間図形	A　展開図	3	
	B　立体の個数	3	3
	C　体積		6
	D　投影図		
③関数	A　時間・速さ		
	B　グラフをかく		
④確統	A　確率		3
	B　統計		6

（2）についての考察

① A「図形の個数を求める」作問は，調査問題に引きずられてか中学３年，高校２年と学年によらず約３割と多数であった。残る７割は上記に示すようにいろいろと出てきた。

② B「経路の数を求める」作問は，Aについで中学高校によらず多かった。これと類似の問題を解いた経験が多く，また印象に残っていることからであると思われる。

③ 中学３年ではD「しきつめ」，F「面積」に関する作問が３番目４番目と続く。しかし，高校２年では，A，B以外に目立った特徴はなく定型的な作問が多かった。

④ 中学３年，高校２年ともに②の空間図形が３%，６%とあり，興味深い。

⑤ 中学３年にはなかった④の確率統計が高校２年には９%あった。

⑥ 問題の設定にストーリー性を持たせるものは中学３年では13%あるのに対し，高校２年では皆無であったのも特徴のひとつである。

★調査問題Bについて

＜本調査＞

（１）について

・生徒総数　121名（中学２年・49期）

・正答数　　109名（90%）

（２）について

・生徒総数　121名

・白紙　　　19名

・作問総数　136問

分野		%
①平面図形	A　図形の個数	34
	B　経路	25
	C　線の本数	1
	D　しきつめ	8
	E　反射	3
	F　面積	5
	G　長さ	1
	H　角度	1
	I　点の個数	1
	J　出会い・追跡	3
	K　さいころを動かす	1
	L　重心	1
	M　その他	3

分野		%
②空間図形	A　展開図	3
	B　立体の個数	3
	C　体積	1
	D　投影図	3
③関数	A　時間・速さ	1
	B　グラフをかく	1
④確統	A　確率	1
	B　統計	0

（２）についての考察

① 「図形の個数を求める」問題は，約１／３と多数であった。これらは，（１）の問題の影響を受けているものと考えられる。逆に，残り２／３の問題は，（１）とは異なった観点で作成されたものである。

② 「図形の個数を求める」問題に次いで多かったのは，「経路を求める」問題であった。これは，（１）と同じ「個数を求める」問題であることと，中学受験で，この種の問題を数多く解いた経験があるからであろう。

③ 分野としては平面図形が多いが，空間に拡張した問題も１割あった。中学１年で，空間図形を学習した経験が影響しているものと考えられる。

④ いわゆる教科書や問題集でよく見かける問題も多いが，一方でユニークな問題も幾つかあった。例えば，マス目上でサイコロを動かしてみたり，石をのせて重心を考えてみたり，一筆書きを考えたり等である。しかし，問題作成者本人が解答できないようなものもあり，思考が発散してしまう傾向もある。

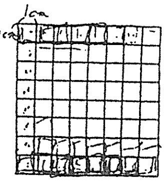
⑤ 問題の設定に，ストーリー性を持たせるものも幾つか見られた。ファミコンゲーム等の影響が出ているものと考えられる。数学の本質的な内容を追及することよりも，周辺的なこと（問題文の脚色等）に力を注ぐ傾向があるとも考えられる。

生徒の作問例（予備調査）

中学３年生

①A

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）



右の図で面積が3cm²の図形は全部で何個あるか

$6\times8\times2=96$

田の向き　田の向き

$7\times7=49$　$7\times7=49$　$7\times7=49$　$7\times7=49$

$96+49\times4=292$　292個

面積が4の図形は全部で何個あるか

$7\times7=49$　$5\times8\times2=80$

$6\times7\times4=168$　$6\times7\times4=168$

$6\times7\times4=168$　$6\times7\times4=168$　$6\times7\times4=168$

$49+80+168\times5=969$　969個

面積が5の図形は全部で何個あるか

$7\times6\times4\times4=672$　$6\times6\times4\times4=576$

$6\times6\times4\times4=576$　$5\times7\times4\times4=560$

$5\times7\times4\times4=560$　$4\times8\times2=64$

$672+576\times2+560\times2+64=3008$　3008個

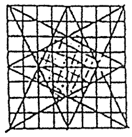
面積が6の図形は全部で何個あるか

$3\times8\times2=48$　$4\times7\times4\times4=448$

①F

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）

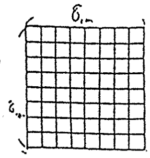
斜線の部分の面積を求めよ。



②B

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）

右の図は底面が正方形の立体を上から見た図で、もっとも高い所で1cmで、ところどころに1cm³の立方体を積んだような立体である。
何通りの立体ができるか。
ただし、回転させて重なるものは同じとする。



①B

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）

Q1．AからBまで線上を最短距離で行くとき、
行き方が何通りあるか答えよ。

A1．8つ目まで下が0→1通り　残りが1通り

1→8	8
2→28	28
3→56	56
4→70	70
5→56	56
6→28	28
7→8	8
8→1	1

$1+64+784+3136+49\cdots+3136+784+64+1=12870$（通り）←しあってるかなあ

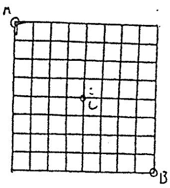
Q2．AからCを通してBまで線上を最短距離で行くとき、
行き方が何通りあるか答えよ。

A.2、4つ目まで下が0→1通り　残りが1通り

1→4通り	4通り
2→6通り	6通り
3→4通り	4通り
4→1通り	1通り

$1+16+36+16+1=70$通り

$70\times70=4900$（通り）



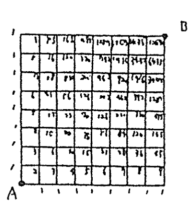
(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）

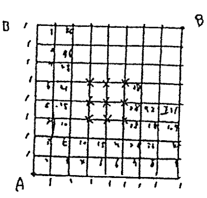
問．AからBまで行くとき、道の選び方は何通りあるか。（最短距離）

答．右の図より　12870通り

問．AからBまで行くとき、×のところは通れないとすると道の選び方は何通りあるか。（最短距離）

答．右の図より　　通り

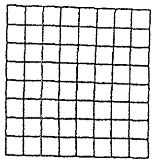




高校２年生

① A, F

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）



問 右の図の中に長方形はいくつあるか。
（正方形もふくむ）

（解答）
縦方向９本の線から２本えらび、
横方向９本の線から２本えらんで、１つの長方形をつくればよいから
求める数は

$$ {}_9C_2 \times {}_9C_2 = 1296 \text{個} $$

問 図中にある正方形の面積の総和を求めよ。（1ますを1×1とする）

(1)より

$$ S = \sum_{k=1}^{8} k^2(9-k)^2 $$

$$ = \sum_{k=1}^{8} (k^4 - 18k^3 + 81k^2) $$

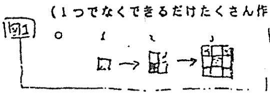
$$ = 8877.2 - 18 \cdot \left(\frac{8 \cdot 9}{2}\right)^2 + 81 \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 $$

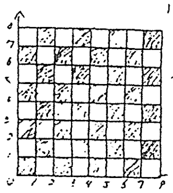
$$ = 2068 $$

① D

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）

図1





問 一辺の長さ1mの黒と白のタイルがある。
これを常に正方形に敷きつめる。
ただし、必ず左下のタイルを黒色とし、同じ色のタイルは隣り合わないとする。

(1) 一辺の長さが10mの部屋にタイルを敷きつめる場合、
黒のタイルはいくつ必要か。

(2) 一辺の長さが35mの部屋のタイルを敷きつめる場合、
黒のタイルはいくつ必要か。

(3) 一辺の長さがnmの部屋にタイルを敷きつめる場合、
必要となる黒のタイルの数 x_n を求めよ。

Ans. これは、(3)ができればすぐ解けるが、
証明はできなかったので、答えだけをここに書く。
（帰納法では可能）

(3) $x_n = \dfrac{2n^2 + 1 - 1(-1)^n}{4}$ → (1) $x_{10} = \dfrac{2 \cdot 10^2 + 1 - 1(-1)^{10}}{4}$

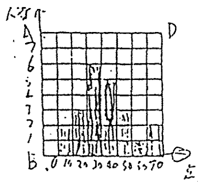
$= 50$

(2) $x_{35} = \dfrac{2 \cdot 35^2 + 1 - 1(-1)^{35}}{4}$

$= 613$

④ B

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）



(b) 70点満点のテストがあります。（1問10点）
このテストをあるクラスにやらせてみたところ
図のような結果になりました。平均点は
何点ですか。

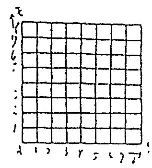
（答）$\dfrac{10 \times 2 + 20 \times 3 + 30 \times 6 + 40 \times 5 + \cdots + 70 \times 2}{2+3+6+5+\cdots+2}$ ＝ [illegible]点

22

(c) (b)と同様のテストを他のクラスに
やらせてみたところ、図のようなグラフが
40点のところを頂点としてきれいな山型になりました。
（きれいな山型とは……〈40点以下〈40点の人数〉40点の人数……）
クラスの人数は最低で何人、最高で何人ですか。

② B（中学3年）[illegible]

(2) 右の図を用いた「問題」を作り、
またその解答を書きなさい。
（１つでなくできるだけたくさん作って下さい。）



各図の格子点には杭がたっている。
Aから見上げたとき杭が何本見えるか？

次などで(x, y)がたがいに素になるものを考える

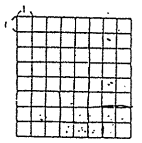
$x=1 \to y=2 \cdot 3 \ (7 \text{こ})$ $\quad 2(7+3+4+2+3+1+1)+3 = 45$
$x=2 \to y=3 \cdot 5 \cdot 7 \ (3 \text{こ})$
$x=3 \to y=4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \ (4 \text{こ})$
$x=4 \to y=5 \cdot 7 \ (2 \text{こ})$
$x=5 \to y=6 \cdot 7 \cdot 8 \ (3 \text{こ})$
$x=6 \to y=7 \ (1 \text{こ})$
$x=7 \to y=8 \ (1 \text{こ})$

(x, y)の格子点に2mの杭がたっていることを(x, y, 2)と表記し、
その先端に記号をつけたことの杭などとする。

生徒の作問例（本調査）

中学２年生

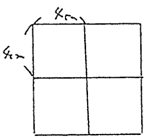
①　D



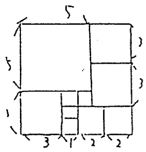
1番小さな正方形の1辺を1cmとし、
ここにタイルをしきつめることにする。
タイルは 辺が
1cm、2cm、3cm、4cm、5cm、6cmの正方形である。
(1) 1番枚数が少なくてすむしき方はどんなしき方か？

(2) 1辺が3cmタイルを少なくとも、1枚は使って しく時
タイルの枚数が1番少なくてすむようにしくとすると、
何枚になるか？

(1)



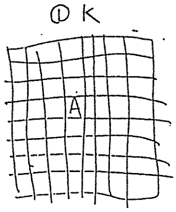
(1)

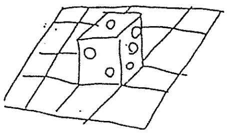


等

10枚

①　K

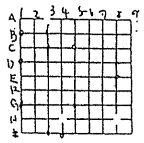




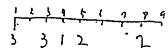
Aの部分にサイコロをおき、すべらさずに
たてか横にころがしていく。
その時、底についている数字を通ったマスに記入する
だから、Aの部分は6となる
そして1度通った同じところは通ってはダメ、
そして、どこにも行けなくなったら終わりです
さて、それが終わった後マスの中に書かれている
数字の合計は？　最高と最低？

①　L

右のようなほうがん紙に同じ重さの石を
1B、3B、3C、5C、1D、8D、1G、5G、8E
3I、4Iに置く。紙の重さを
考えないと重心はどこになるか。

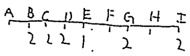


横を見ると



なので重心は4

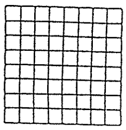
縦を見ると



なので重心はE

よって4E

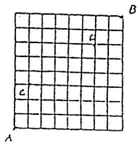
②　A



Q.
この中に立方体の展開図はいくつ
作ることができるか。

A.
答えはわからない。

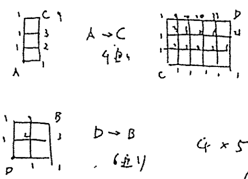
①　B



Aは城野先生の家です
Cは花屋さんの家です
Dは彼女の家です
Bは学校です

城野先生が花屋で花束を買い
彼女に届けてから学校へ行くには何通りの
行き方があるでしょう。
ただし、遅刻しないように遠回りは禁止です

(解答)



A→C
4通り

C→D
56通り

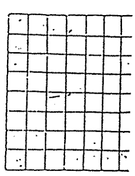
D→B
6通り

$4 \times 56 \times 6 = 1344$

答 1344通り

④　A

図のような64地点に民間人が
1人、敵が1人います。大山君は一回だけ
15地点を攻げきできます。大山君の基本給
は10000円で敵を1人殺すごとに+1000円、
民間人を1人殺すごとに－1000円です。大山
君の基本給が0になると大山君は退軍しなけ
ればなりません。大山君が退軍する確率はいくつ
でしょう。（敵、民間人は1マスに1人しか
いられないこととします。）



★調査問題Cについて（予備調査）

調査実施時期：1996年４月末
調査学年，数：中学３年生　37名，高校２年生　61名
　　　　（注）高校生は希望者（21名）を含む。
　　　　　　　解答時間は中高で異なる。

設問（１）の解答結果

	中学年生	高校２年生
①不正解 （白紙）	62% (29%)	26% (13%)
②３で割った余り	8%	2%
③９で割った余り （具体的な桁で説明）	30% (16%)	72% (41%)

設問（２）の解答結果

１．上の表の①のうちの正解者は高校で１名。
２．上の表の②，③の中学38%，高校74%のうち，
　　差または積で不成立としたものが，それぞれ５％
　　解答なし（白紙）のものが中学13%，高校８％

考察

１．設問（１）の正解率が中高で大幅に違う。高校生は一部希望者（21名）の分が入っていることもあるが，数学的な経験の差のためであろうか。
２．不正解者の思考過程の痕跡をみると，中学生の方が帰納的な推理の過程が多様である。中高で具体例の集め方に違いがあり，詳細に検討したい。（Ａ，Ｂ，Ｆ）
３．上の表では中高で正解者の理由説明の内容に大きな違いはでていないが，記述の程度には明らかに差があった。また，具体的な桁で説明し，他も同様としているものが中学生は多い。基準を作り分類，検討したい。（Ｃ，Ｄ，Ｅ）
４．設問（１）で，
　　「１桁の数」の和も１桁にするのか
　　「差」は負になる場合も考えるのか
　等についても言及しているものが高校生にだけ見られたのは興味深い。
　問題文を修正することも含めて検討する必要がある。
５．高校生で２名だけであったが，設問（１）が不正解であるのにかかわらず設問（２）が成り立つことを説明しているものがいた。（Ｇ）

中学3年生解答例

A（中学）

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

1111 → 4
1112 → 5
1113 → 6
1114 → 7
1115 → 8
1116 → 9
1117 → 10 → 1
1118 → 11 → 2
1119 → 12 → 3.
1120 → 4.

1サイクル

2543 → 14 → 5
9032 → 14 → 5

1112と2543と9032.

9032 − 2543 = 6489

2543 − 1112 = 1431

3) 6489, 1431
3) 2163, 477
721, 159

~~9の倍数？~~

4811 → 14 → 5.

9) 4811 → 53 … 47

B（中学）

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

40 → 4
44 → 8
46 → 12 → 3
52 → 7
56 → 11
60 → 6
66 → 12 → 3
67 → 14 → 5
72 → 9
74 → 11
80 → 8
84 → 3
86 → 9

C（中学）

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

2145 → 14 → 5
3456 → 18 → 9

もとの数を9でわった時の余りが求めた1桁の数と一致する。

（理由） abcd という数字があるとする

abcd ＝ a×1000＋b×100＋c×10＋d

abcd を9でわるということは、余りは…

(1000a − 999a)＋(100b − 99b)＋(10c − 9c)＋d
＝ a＋b＋c＋d

この値は もとの整数 abcd の各位の数の和と等しくなる

そして a＋b＋c＋d ＝ ef となった場合

ef ＝ 10e＋f で、これを9でわると

(10e − 9e)＋f ＝ e＋f となり

ef の各位の数の和と等しくなる

(2) 例にある2つの正の整数の、1桁の数の和は 8＋1＝9
また、2つの正の整数の和について、1桁の数を求めると
5678＋1234＝6912 → 6＋9＋1＋2＝18 → 1＋8＝9
となり、1桁の数は一致する。
このことはいつでも成り立つか？
また、和ではなく差や積ではどうか？

(abcd＋efgh)÷9 の余りは

(abcd÷9の余り)＋(efgh÷9の余り) で

これは 先のことから 1けたになるまで計算していって その時に出た数の 和である

よって、いつでも成り立つ。

高校２年生解答例

D（高校）

(1) もとの数と、求めた１桁の数にはどんな関係があるか？
<u>またそれはなぜか？</u>

例えば４桁の数 $1000a+100b+10c+d$ を考えてみる
次にこの数の各位の和 $a+b+c+d=9x$（x は整数）
$1000a+100b+10c+d$ は９で割り切れるということになる。
また $a+b+c+d=9x+8$ ならば
$1000a+100b+10c+d$ は９で割ると８余るということになる。
このことより　$a+b+c+d=9x+y$ ならば $1000a+100b+10c+d$ を９で割ると余りは y となることがわかる
証）　$1000a+100b+10c+d=999a+99b+9c+a+b+c+d$
$=9(111a+11b+c)+9x+y$
$=9(111a+11b+c+x)+y$ より

よって　$a+b+c+d<10$ ならば　$a+b+c+d$ の値が
$1000a+100b+10c+d$ を９で割った余り（割り切れるときは９）を示すことになる。

$a+b+c+d\geqq 10$ のときも各位の和が一桁になるまで計算すれば
$a+b+c+d$ を９で割った余りを求めることができ、その余りは $1000a+100b+10c+d$ を９で割った余りと等しくなる。

このことは桁数に関係なく言えることである。

∴１桁の数＝もとの数÷９の余り（但し割り切れるときは９になる）

(2) 例にある２つの正の整数の、１桁の数の和は　$8+1=\underline{9}$
また、２つの正の整数の和について、１桁の数を求めると
$5678+1234=6912$ → $6+9+1+2=18$ → $1+8=\underline{9}$
となり、１桁の数は一致する。
このことはいつでも成り立つか？
また、和ではなく差や積ではどうか？

２つの正の整数を $9n+a$，$9m+b$ とすると
１桁の数はそれぞれ a，b で表せる
ここで $a+b$ を行った後に問に書かれている作業を行って出てくる値は
$a+b$ を９で割った余りを示す。
また $(9n+a)+(9m+b)$ を行った後に問に書かれている作業を行うと
$(9n+a)+(9m+b)$ を９で割った余りが出てくる。
しかし　$(9n+a)+(9m+b)=9(n+m)+a+b$ となることより
結果的には $a+b$ を９で割った余りを求めることになる。
∴和の場合はいつでも成り立つ
また差の場合でも　$a-b$ を９で割った余りと $(9n+a)-(9m+b)$ を９で割った余りは等しくなる（∵$(9n+a)-(9m+b)=9(n-m)+a-b$）
ので差の場合も常に成り立つ
更に積の場合は　$(9n+a)\cdot(9m+b)=81nm+9nb+9ma+ab$
$=9(9nm+nb+ma)+ab$

となるので $(9n+a)\cdot(9m+b)$ を９で割った余りと ab を９で割った余りは等しくなる
∴積の場合も常に成り立つ

E（高校）

(1) もとの数と、求めた１桁の数にはどんな関係があるか？
<u>またそれはなぜか？</u>

もとになる整数を n として上の操作を１回行うのを f と表す。
$n=10^k a_k+10^{k-1}a_{k-1}+\cdots 10a_1+a_0$ とすると
また最終的に求まる数を $f^k(n)$ とかく
$f(n)=a_k+a_{k-1}+\cdots a_1+a_0$ となる

ここで
$n=(10^k-1)a_k+(10^{k-1}-1)a_{k-1}+\cdots 9a_1$
$+a_k+a_{k-1}+\cdots a_1+a_0$
と表せる
ここで 10^k-1，$10^{k-1}-1$，…９ は
全て９の倍数だから
$n\equiv f(n) \pmod 9$ が成り立つ
この操作を，１ケタになるまでつづければいいわけだから
$n\equiv f(n)\equiv f(f(n))\equiv\cdots\equiv f^k(n) \pmod 9$
ただし $f^k(n)\neq 0$ であり、$f^k(n)\equiv 0$ のときは
$f^k(n)=9$ となる

(2) 例にある２つの正の整数の、１桁の数の和は　$8+1=\underline{9}$
また、２つの正の整数の和について、１桁の数を求めると
$5678+1234=6912$ → $6+9+1+2=18$ → $1+8=\underline{9}$
となり、１桁の数は一致する。
このことはいつでも成り立つか？
また、和ではなく差や積ではどうか？

和　２つの整数を α，β とする。
$\left.\begin{array}{l}\alpha\equiv f^k(\alpha)\\ \beta\equiv f^k(\beta)\end{array}\right\} \pmod 9$
∴$\alpha+\beta\equiv f^k(\alpha)+f^k(\beta)$（※合同式のセイシツから明らかである）
ここで $\alpha+\beta\equiv f(\alpha+\beta)$ なので
$f(\alpha+\beta)\equiv f^k(\alpha)+f^k(\beta) \pmod 9$
∴和については成り立つ

差　$\alpha-\beta\equiv f^k(\alpha)-f^k(\beta)$（※）
ここで $\alpha-\beta\equiv f(\alpha-\beta)$ より
∴$f(\alpha-\beta)\equiv f^k(\alpha)-f^k(\beta)$

積　$\alpha\beta\equiv f^k(\alpha)f^k(\beta)$（※）
ここで　$\alpha\beta\equiv f(\alpha\beta)$ より
$f(\alpha\beta)\equiv f^k(\alpha)f^k(\beta)$

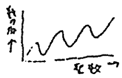
F（高校）

適当な正の整数を考える。各位の数の和を求め、それが2桁以上だったら、さらに同じことを繰り返し、1桁になったら止める。

例　5678　→　5+6+7+8=26　→　2+6=8
　　1234　→　1+2+3+4=10　→　1+0=1

(1)　もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

1000，2000，3000 … と整った数に近くなる程 各位の数の和は大きくなる。また それをグラフで書くと



左のようになり 徐々に大きくなる。

また 各位の数の和も同じく 0，10 … と整った数に近づく程 和が大きくなる。

よって 求めた1桁の数は 大きい程 もとの整数は 整った数に近い数になる。

(2)　例にある2つの正の整数の、1桁の数の和は　8+1=9
また、2つの正の整数の和について、1桁の数を求めると
5678+1234=6912　→　6+9+1+2=18　→　1+8=9
となり、1桁の数は一致する。
このことはいつでも成り立つか？
また、和ではなく差や積ではどうか？

一般化する　$\boxed{a|b|c|d}$ = (a+b+c+d) = p
$\boxed{e|f|g|h}$ = (e+f+g+h) = q　とすると

$\boxed{a+e|b+f|c+g|d+h}$ = (a+b+c+d)+(e+f+g+h) = p+q で

成り立つ

差の場合は a−b = b−a が成り立たない。
よって 前述のような
(a+e)+(b+f)+(c+g)+(d+h) = a+b+c+d+e+f+g+h
のような考えができないため
成立しない

積の場合は a×b = b×a が成立。

よって 成立

G（高校）

(1)　もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

5678 = 5×10³, 6×10², 7×10, 8

(2)　例にある2つの正の整数の、1桁の数の和は　8+1=9
また、2つの正の整数の和について、1桁の数を求めると
5678+1234=6912　→　6+9+1+2=18　→　1+8=9
となり、1桁の数は一致する。
このことはいつでも成り立つか？
また、和ではなく差や積ではどうか？

5678+1234 = (5+1)×10³ + (6+2)×10² + (7+3)×10 + (8+4)

→ 5+1+6+2+7+3+8+4 とすることができる
これは 5678→8 と 1234→1 を足したことと変わらない。
∴ いつでも成り立つ

差の場合は上の+の所が
→ (5−1)+(6−2)+(7−3)+(8−4) となり
同様に 8−1 と 7 となり同じ
∴ いつでも成り立つ

積の場合
ex. 141×63 = 8883 → 8+8+8+3 = 27 → 2+7 = 9
141 → (1+4+1) → 6
63 → (6+3) → 9

141×63 = 141×3 + 141×6×10
→ (1×3+4×3+1×3) + (1×6+4×6+1×6)

これは 141・63 → (1+4+1)(6+3) に等しい
∴ いつでも成り立つ

★調査問題Dについて（予備調査）

1．調査実施時期：1996年４月末

2．調査学年，数：中学３年生39名，高校２年生82名

（注）解答時間は中高で異なる。

3．設問の解答結果

	中学生（%）	高校生（%）	中（人）	高（人）
正答	59%	43%	23人	35人
誤答	41%	52%	16人	43人
白紙	0%	5%	0人	4人
合計	100%	100%	39人	82人

4．設問の正答分析

解　　法	中学生（%）	高校生（%）	中（人）	高（人）
①仮定を否定し，矛盾を導く	36%	22%	14人	18人
②人数から導く	15%	17%	6人	14人
①，②双方から導く	7%	4%	3人	3人
正解者合計	58%	43%	23人	35人

考察

（１）正解者の割合が，中学生の方が高校生より15%も高いこと。

（２）高校生の正解者が半数を下回ったこと。

（３）中学生の白紙答案がないこと。高校生は５%（４人）いた。

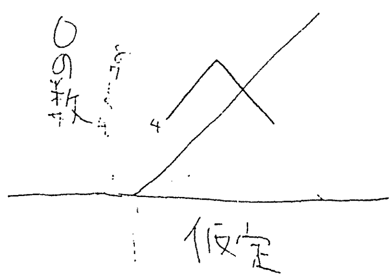
高校2年生解答例

A 全員違っている
B 合っているのは0人か1人
C 合っているのは0人か1人か2人
D 合っているのは0人か1人か2人か3人
E 全員正解
F まちがっているのは0人か1人
G まちがっているのは0人か1人か2人
H まちがっているのは0人か1人か2人か3人

Aのとき、全員間違い E、F、G、Hと矛盾 よって A—○
Bのとき — A正解より残りが間違い B—○
Cのとき、Bのときも同じ C—○
D—○
Eのとき、Eも正解していなければならないので矛盾 E—○
Fのとき、F以外の全員が正解、G、Hと矛盾 F—○
Gのとき、G以外全員正解 —① / G以外1人が正解 —② のどちらか G—×
①だとするとHと矛盾
②だとするとH不正解で成立 H—×

GとHが間違い

仮定	現実		結果
全員が正しい	○ 4	× 4	×
1人だけ正しい	○ 5	× 3	×
2人だけ正しい	○ 6	× 2	×
3人だけ正しい	○ 7	× 1	×
4人だけ正しい	○ 8	× 0	×
5人だけ正しい	○ 7	× 1	×
6人だけ正しい	○ 6	× 2	○
7人だけ正しい	○ 5	× 3	×
8人正しい	○ 4	× 4	×



とすると
6人が正しく2人が間違っており
間違っているのはG、H

中学3年生解答例

数学　調査問題（2）

この問題は本校数学科の研究のためのもので、成績等には関係しません。

問

A、B、C、D、E、F、Gの8人が、自分自身を含む8人のことについて、それぞれつぎの様に言っている。

A：僕たちの中で少なくとも1人は正しいことをいっています。
B：僕たちの中で少なくとも2人は正しいことをいっています。
C：僕たちの中で少なくとも3人は正しいことをいっています。
D：僕たちの中で少なくとも4人は正しいことをいっています。
E：僕たちの中で少なくとも1人は間違ったことをいっています。○
F：僕たちの中で少なくとも2人は間違ったことをいっています。○
G：僕たちの中で少なくとも3人は間違ったことをいっています。×
H：僕たちの中で少なくとも4人は間違ったことをいっています。×

GとH

間違ったことを言っているのは誰か？（いない時はいないと答えよ。）
間違ったことを言っている人を、どのように考えて求めたのかも答えなさい。

仮定	正	誤	結果	
				Eが正
Hが正	EFGH ABCD (4人以下)	(4人以上)	×	
Gが正	EFG ABCD (5人以下)	(3人以上)	×	Dが正
Fが正	EF AB CD (6人以下)	GH (2人以上)	○	

A… もし間違っているとすれば、EFGHが矛盾するので正しい
B… 〃 EFGHが矛盾するので正しい（←正しいワクの1人がAでうまる）
C… 〃 EFGHが矛盾するので正しい（← 〃 の2人がABでうまる）
D… 〃 EFGHが矛盾するので正しい（← 〃 の3人がABCでうまる）
E… 〃 Eが矛盾するので正しい
F… 〃 GHが矛盾するので正しい
G… もし正しいとすれば、人数的に矛盾するので間違っている
H… Gが間違っているならばHも間違っている

答. G.H

正 誤

7人以下 1人以上

EF GH
AB
CD

正 誤

4人以上 4人以下

ABC D G H

1995年度教育研究会公開授業の実際

中学校　第3学年

テーマ学習E　数学

「数理の探求を楽しもう」

「ビリヤードの数学化」指導案

授業者　鈴木清夫，牧下英世

1．指導計画

（第1週）

正方形のビリヤードの数理の発見及びその発展・一般化の考察（2時間分）

（第2週）

第1週の考察の深化（1時間分）本時

（第3週）

第2週と同じ（2時間分）

2．指導過程（その1）11月14日実施（前の時間：2時間分）

	活　　動	指導上の留意点	備　　考
導入 10分	① 正方形の内部でビリヤードを行う。 「原点0から，発射して$y=ax$上を進み，正方形の各辺ではね返りながら任意の頂点に到達したら止まる。」とする。	・ビリヤードの玉は各辺では完全反射（入射角と反射角は等しい）する。 $a=\frac{1}{2}$の場合，どの点で止まるかを質問する。	・生徒を指名して答えさせる。
発	② 玉が，0→A，0→B，0→C，0→0で止まる場合について，考えさせる。	いくつかaの値を書き出しておいて，どの点で止まりそうか，これをヒントとする。 線対称の考えのよさに気がつくようにする。ここでは，正方形を広げて考えることと同じこ	・生徒を指名して答えさせる。 $a=\frac{q}{p}$のとき， ただし，p．qは互いに素とする。 （p，q）の組が （奇，偶）ならA

展 35分	0→0は不可能なことに気づかせる。	とであることが，わかるようにする。	（奇，奇）ならB （偶，奇）ならCで止まる。 【約束】を確認させる。
	③ 正方形の任意の頂点に到達するためには，正方形の各辺で何回反射するか考えさせる。	正方形の各辺での反射をどのようにとらえればよいかを考えさせる。	正方形を広げて考えると，原点から任意の頂点に達するためには， 縦の線を（p－1） 横の線を（q－1） 回横切らなければならない。これより，はね返る回数nは $n=p+q-2$で表すことができる。
	④ このビリヤードで他に気づいたことがあれば述べさせる。	原点0から発射して，どの頂点にも到達しない場合があることに気づかせる。	aが無理数の時は，どの頂点にも到達しない。
まとめ5分	⑤ まとめる。 板書する。	ほかの図形に発達させるので，要点を簡潔に記す。	
グループ化 40分	⑥ 研究を深化させる。生徒へ，この正方形のビリヤードで使った考えを，ほかの図形でも用いることができないかを投げかける。	隣近所の生徒同士で話合わせる。 適宜，2名の教官は机間巡視して生徒の相談相手になる。	教師側としては，四角・三角形・その他の図形が出てきて，それによってグループ分けができればと思う。
	⑦ どういった図形で考えさせるかを発表させる。出尽くしたところで，共同で研究をする生徒を名乗らせる。	理由を言わせる。	生徒の発言した図形を板書する。 3つぐらいのグループができればと思う。
	⑧ グループで研究の深化の方向性を討論させる。	適宜教官は机間巡視をして，ひとりよがりな意見になっていないかを指導する。	
まとめ10分	⑨ 研究の深化の方向性を発表させる。		次回の連絡

結局，以下のグループと個人の研究になった。

【研究グループ】

・三角形グループ（高島，川崎，垣村，犬飼）

・四角形グループ（吉田，木村か，根岸，石川）

・平行四辺形グループ（竹澤，浅尾）

・立方体グループ（荒井，太田）

・正多角形グループ（佐藤，浦崎）ただし，正５角形以上で考える。

【個人研究】

・ドーナツ（木村そ）

3．指導過程（その２）11月17日実施（本時：１時間分）公開授業

	活動時間	指導上の留意点	備　　考
導入10分	① グループまたは個人に研究の深化の感想を聞く。		
	② 前時の正方形についての復習をする。	軽く押さえる。	コンピュータで，ビリヤードを見せる。
発展30分	③ 前時間の話題について各研究グループまたは個人から深化させた内容を報告させる。	報告者は他の生徒が理解しやすいように報告を工夫するよう指導する。 （場合によっては，模造紙に報告内容を書いておく。）	質問は適宜させる。 適宜生徒同士で議論させる。
まとめ10分	④ 生徒の研究深化内容についてのコメントあるいは一般化を図る。	研究の深化の過程で生徒が気づかずにいる内容や着眼点を変えることで内容が発展することがあるので留意する。	内容など場合によっては，生徒の中からまとめてくれる者があるかもしれない。

4．生徒配布物（資料　11月14日分）

【中３　テーマ学習】

95．11．14

正方形の原点Ｏから任意の頂点に到達するビリヤードを考えよう。

【ビリヤードの約束】

・ビリヤードの玉は各辺では完全反射（入射角と反射角は等しい）する。

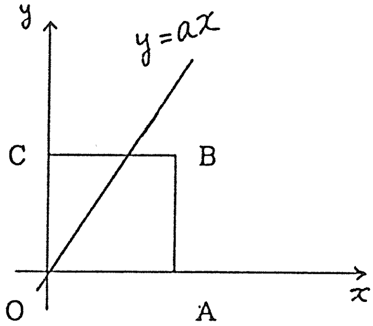
（以下，単に反射という。）

・玉は任意の頂点に達したら止まる。

問

点Ｏ（０，０），Ａ（１，０），Ｂ（１，１），Ｃ（０，１）

を頂点とする正方形ＯＡＢＣの中でビリヤードを行う。



（設定）

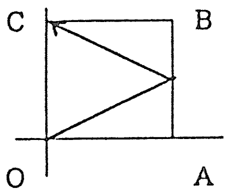
頂点Ｏから玉を打ち出す。

打ち出せる方向は，角ＡＯＣの間。

玉は，打ち出しが直線ｙ＝ａｘ上を動くように打つ。

（例）$a=\frac{1}{2}$のときは，

頂点Ｃに止まる。



<u>高校２年生　数学Ⅱ　授業案</u>

１．題目：「方程式の近似解」　　　　　　　　　　　　授業者　城野正彦

２．指導計画：（１）微分係数の意味
（２）導関数
（３）関数の増減と極大・極小
（４）最大・最小
（５）方程式・不等式への応用（本題材）

３．指導のねらい

現在の高校２年生から実施された学習指導要領では，数学Ⅱの微分・積分の内容がかなり軽くなっている。それに対して，数学Ｃは数値計算のように応用数理的な観点から微分・積分の内容が題材として取り扱われるようになった。そこで，内容としては数学Ｃの範囲であるが，指導要領改訂の１つのねらいであるコンピュータ的考え方に触れさせる意味から，簡単ではあるが高校２年生でこの題材を扱ってみることにした。

本時は，解を求めることが容易ではない３次以上の方程式について，正確な解の値がわからなくても，実際の場面に数学を応用するときにはその解の近似値が得られるだけで十分に役に立つことが多いので，数値計算的な算法により解の近似値を求める方法を考えさせることを目標とする。

４．本時の指導

指導項目	指　導　内　容	備　考
問題提示	「１辺の長さが18cmの正方形の金属板の四隅から正方形を切り取り，残りを折り曲げてふたのない直方体の容器を作る。この容器にちょうど350mℓの液体が入るようにするには，切り取る正方形の１辺の長さをいくらにすればよいか。できるだけ正確な値を求める方法を考えなさい。」	プリント配付
解の計算	＊グラフの概形を書いて，解の存在を確認させる。 ＊グラフから，おおよその解の値をつかませる。	生徒に作業させる
	＊解の近似値を求める方法を考えさせる。 ＊考えた方法に基づき，電卓を用いて繰り返し計算を行い，できるだけ正確な解の近似値を求めさせる。	
	＊その計算方法の数式化（漸化式）を考えさせる。	生徒に発表させる

近似解の算法	＊二分法の算法 ①初期値a_1，b_1を決める。(a_n＜b_n) ②f(a_n)とf(b_n)が異符号のとき， $c_n=(a_n+b_n)/2$ ③(ア) f(a_n)とf(c_n)が異符号のとき， $a_{n+1}=a_n$，$b_{n-1}=c_n$ (イ) f(b_n)とf(c_n)が異符号のとき， $a_{n-1}=c_n$，$b_{n-1}=b_n$ ④n＝1から順次計算し，f(c_n)が0に近づくまで続ける。(②～③を繰り返す) f(c_n)＝0のとき，x＝c_nが解である。	
まとめ	正確な解の値が求められなくても，実際の場面に数学を応用するときにはその解の近似値が得られるだけで十分に役に立つこと，このような計算には計算機が大きな力になることを確認する。二分法は近似解を求めるための着実な方法であるが，他の方法についても考えてくる。	次の時間はニュートン法について

5．評価の観点

＊繰り返しの計算によって近似解を求めるコンピュータ的な考え方が理解できたか。

＊二分法やニュートン法の算法について理解できたか。