筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第35集　1995年10月

数学的思考力を高める創造的教材の探求

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉　啓之・駒野　　誠・鈴木　清夫
吉田　昌裕

数学的思考力を高める創造的教材の探求

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉　啓之・駒野　　誠・鈴木　清夫
吉田　昌裕

1．研究の目的

授業中での生徒の質問の中に，面白い数学が潜んでいることがある。教師が授業の準備をする際に生ずる素朴な疑問の中に，興味深い数学を見い出すことがある。しかし，日常の忙しさの中で，それらの質問や疑問は忘れてしまうことも多い。

そこで上記のことも含めて、数学の教材について，グループ（教材探検の会）で情報交換を行い，それぞれについて検討することを目的に，1994年度より活動を始めた。

数学教育の研究には，

・子供の発達・理解（いつ，教えるか）
・教材（何を，教えるか）
・指導法（いかに，教えるか）
・評価法（どう振り返るか）

等があるが，我々の研究はいわゆる「教材研究」である。

一方で，この研究を通して，我々教師自身が，数学に一層の興味・関心を抱くこともまた，目的の１つである。

2．研究の方法

教材は，たとえば次のようなものを取り上げる。

・中学，高校の生徒が，興味・関心をもつ教材
・中学，高校の生徒が，理解できる教材
・発展，特殊化，一般化できるような教材
・次の段階（高校，大学）へつながるような教材
・数学的なよさ・美しさがわかる教材
・数学的な考え方を必要とする教材
・操作・活動を伴う教材

・コンピュータ等の教具を活用する教材　など

取り扱う範囲は，必ずしも現行カリキュラムにとらわれることなく，自由に検討する。

また，教材検討は，発展・特殊化・一般化を考えたり，場面設定や表現など，生徒が取り組み易い形を検討する。

3．研究の内容

これまでに検討した内容の中から，以下の6つについて報告する。

① 相貫体を作る

② はばたき曲線

③ 円柱を縛る

④ 総当たり戦の成績表

⑤ ランダム・ウォーク

⑥ ランダムドットパターン

各教材については，

1）課題

2）課題の一般化・発展

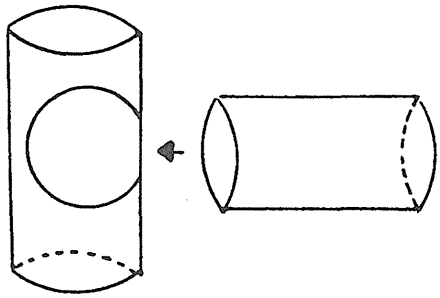
3）授業への活用

の3項目に分けて述べる。1）では，課題の内容とその多様な解決法について，2）では，課題を一般化したり，発展したりした内容について，3）では，実際に授業で活用するに際しての留意点等について検討する。

相貫体を作る

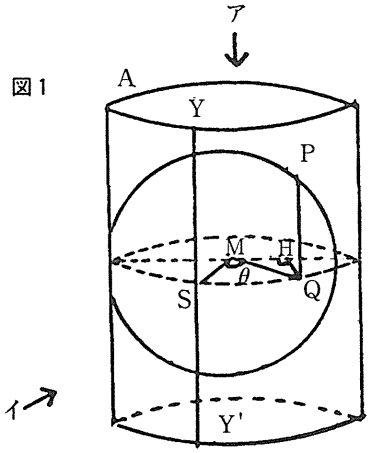
1．課題

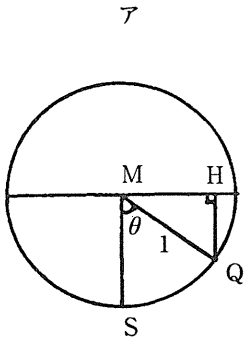
底円の半径が１の円柱が２本ある。
１本の円柱に穴をあけて，その穴にもう一本の円柱を突きさして，相貫体を作りたい。
どのような穴をあければよいか？

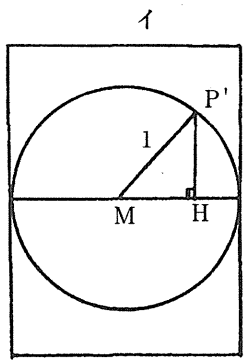


［解答］穴のあいた円柱をＡとし，穴の曲線上の点をＰとして，以下図１のように記号を定め，∠ＳＭＱ＝θとする。

図１







このとき，$\overset{\frown}{SQ}=\theta$，$MH=|\sin\theta|$

$P'H=|\cos\theta|$

次に，図２のように，円柱Ａを，ＹＹ'が中心にくるように展開して，座標軸を設定する。このときのＰの座標を（Ｘ，Ｙ）とすれば，

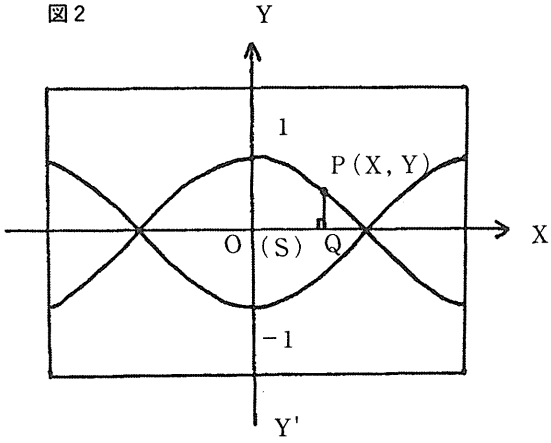
$X=\overset{\frown}{SQ}=\theta$

$Y=P'H=PQ=|\cos\theta|$

よって，

$Y=\pm\cos X\ (-\pi\leqq X\leqq\pi)$

図２



［別解］　ｘｙｚ空間において，穴のあいた円柱をＡを

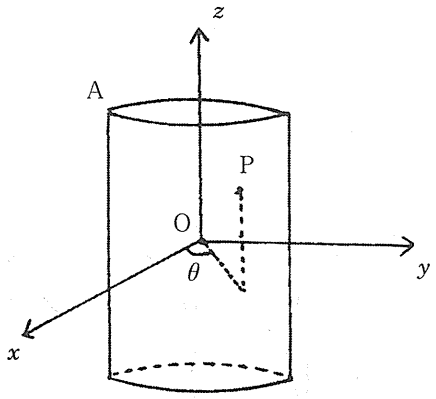
$A：x^2+y^2=1$

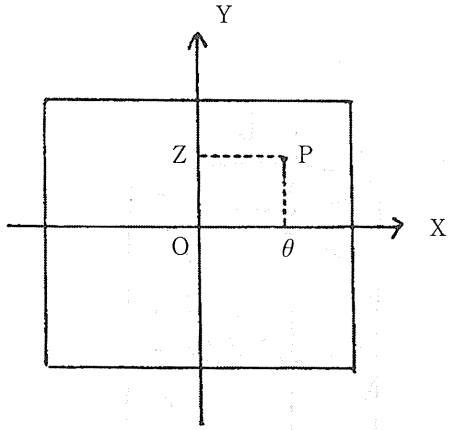
とし，Ａの側面上の点をＰ（ｘ，ｙ，ｚ）とすると，

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \quad (-\pi\leqq\theta\leqq\pi) \quad \cdots\cdots① \\ z=z \end{cases}$$

Ａを，側面上の直線ｘ＝１が中心になるように展開して，座標軸を設定したとき，Ｐの座標を（Ｘ，Ｙ）とすると，

$$\begin{cases} X=\theta \\ Y=z \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$





①，②より，

$$\begin{cases} x=\cos X \\ y=\sin X \quad (-\pi\leqq X\leqq\pi) \quad \cdots\cdots③ \\ z=Y \end{cases}$$

次に，突きさす円柱をＢとすると

$B：y^2+z^2=1$

上の式に③を代入して，

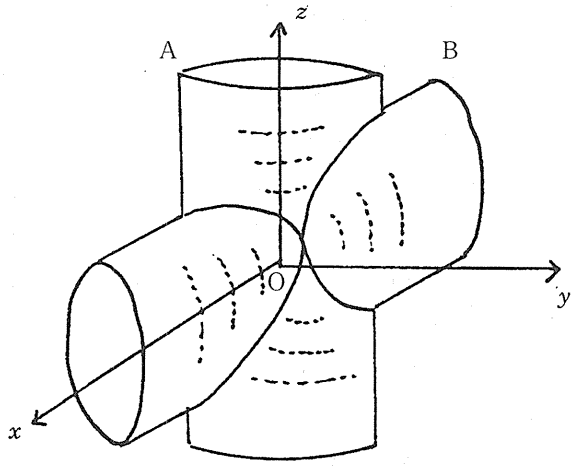
$\sin^2X+Y^2=1$

$Y^2=1-\sin^2X$

$\quad=\cos^2X$

よって

$Y=\pm\cos X \quad (-\pi\leqq X\leqq\pi)$



2．課題の一般化・発展

【一般化】突きさす円柱Bの半径をｒ（０＜ｒ＜１）とする

突きさす円柱Bを

B：$y^2+z^2=r^2$

として，上の式に③を代入して，

$\sin^2X+Y^2=r^2$

$Y^2=r^2-\sin^2X$

よって，

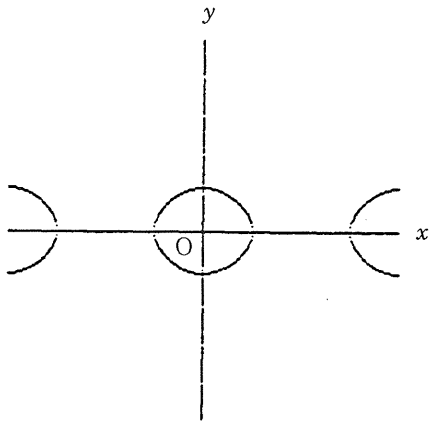
$Y=\pm\sqrt{r^2-\sin^2X}$　（$r^2\geqq\sin^2X$）

（例１）　$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき，

$$Y=\pm\sqrt{\frac{1-2\sin^2X}{2}}=\pm\sqrt{\frac{\cos^2X}{2}}$$

ただし，$\cos 2X\geqq 0$ より，

$$-\frac{1}{4}\pi\leqq X\leqq\frac{1}{4}\pi$$



【発展１】円柱に，円柱を斜めに突きさす

円柱Bを，ｙ軸の回りにαだけ回転したものをCとすると，

C：$x^2+(-x\sin\alpha+z\cos\alpha)^2=r^2$

上の式に③を代入して，

$\cos^2X+(-\cos X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2=r^2$

（例１）　$r=1$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$のとき，

$$\cos^2X+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2=1$$

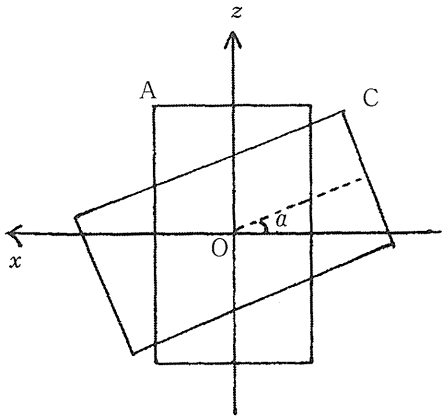
$Y=(1+\sqrt{2})\cos X$　（$-\pi\leqq X\leqq\pi$）

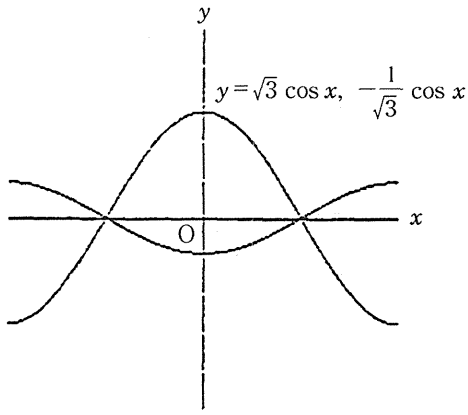
（例２）　$r=1$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき，

$$\cos^2X+\left(-\frac{1}{2}\cos X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2=1$$

$Y=\sqrt{3}\cos X$，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos X$

（$-\pi\leqq X\leqq\pi$）





【発展２】円柱に，円すいを突きさす

（底円の半径）：（高さ）＝１：ｋの円すいをＤとすると，

Ｄ：$(x-p)^2=k^2(y^2+z^2)$

（対象軸をｘ軸，頂点を（ｐ，０，０）とする）

上の式に③を代入して，

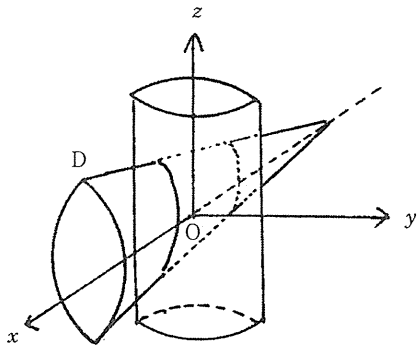
$$(\cos X-p)^2=k^2(\sin^2 X+Y^2)$$

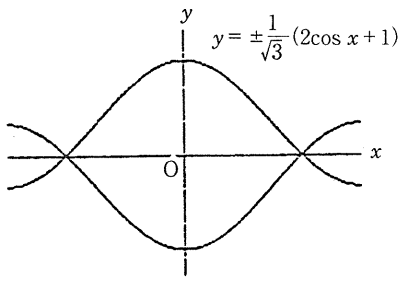
$$Y=\pm\frac{1}{k}\sqrt{(\cos X-p)^2-k^2\sin^2 X}$$

（例１）　$k=\sqrt{3}$，$p=-2$ のとき，

$$Y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\cos X+2)^2-3\sin^2 X}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(2\cos X+1)$$





【発展３】円柱に，球を埋め込む

半径ｒで，中心がＡの側面上にある球をＥとすると，

Ｅ：$(x-1)^2+y^2+z^2=r^2$

上の式に③を代入して，

$$(\cos X-1)^2+\sin^2 X+Y^2=r^2$$

$$Y=\pm\sqrt{2\cos X+r^2-2}$$

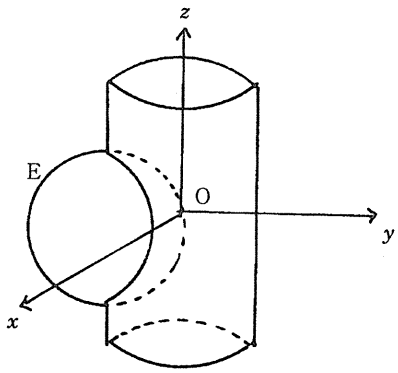
（例１）　$r=1$ のとき，

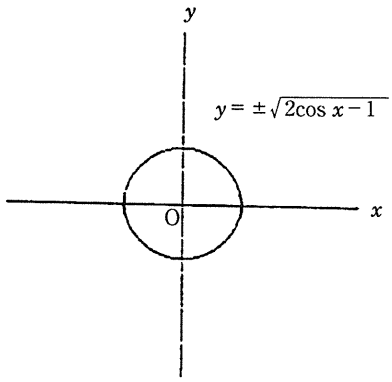
$$Y=\pm\sqrt{2\cos X-1}\quad\left(-\frac{\pi}{3}\leqq X\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

（例２）　$r=2$ のとき，

$$Y=\pm\sqrt{2\cos X+2}$$

$$=\pm 2\cos\frac{X}{2}\quad(-\pi\leqq X\leqq\pi)$$





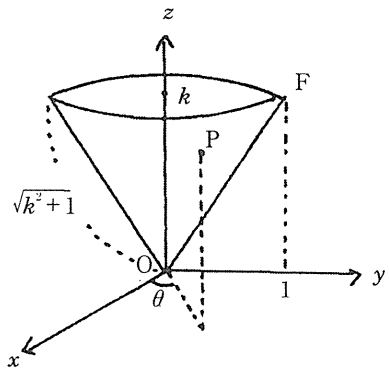
【発展４】円すいに，球を埋め込む

（底円と半径）：（高さ）＝１：ｋの円すいをＦとすると，

Ｆ：$z^2 = k^2(x^2 + y^2)$

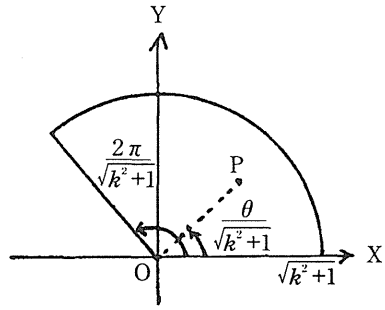
Ｆの側面上の点をＰ（ｘ，ｙ，ｚ）とすると，

$$\begin{cases} x = \dfrac{z}{k}\cos\theta \\ y = \dfrac{z}{k}\sin\theta \quad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi) \quad \cdots\cdots④ \\ z = z \end{cases}$$



Ｆを，ｚ＝ｋｘがＸ軸となるように展開したとき，Ｐの座標を（Ｘ，Ｙ）とすると，

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{k^2+1}}{k} z\cos\dfrac{\theta}{\sqrt{k^2+1}} \\ Y = \dfrac{\sqrt{k^2+1}}{k} z\sin\dfrac{\theta}{\sqrt{k^2+1}} \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$



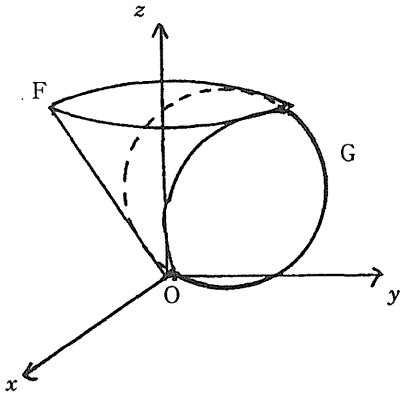
ここで，$X = r\cos\alpha$，$Y = r\sin\alpha$ とおくと，

$$r = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} z, \quad \alpha = \frac{\theta}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$\left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{k^2+1}}\right)$$

このとき，

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{\sqrt{k^2+1}}\cos(\sqrt{k^2+1}\,\alpha) \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{k^2+1}}\sin(\sqrt{k^2+1}\,\alpha) \quad \cdots\cdots⑥ \\ z = \dfrac{kr}{\sqrt{k^2+1}} \end{cases}$$



Ｆの母線を直径とする球をＧとすると，

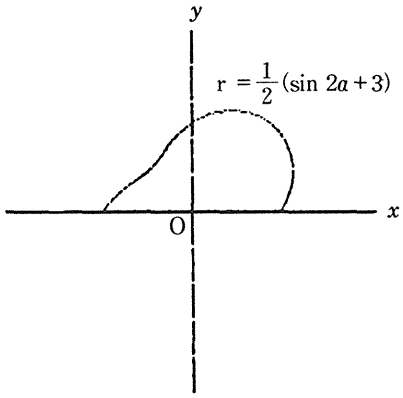
$$G: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2$$

上の式に⑥を代入して整理すると，

$$r = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\{\sin(\sqrt{k^2+1}\,\alpha) + k^2\}$$

（例１）　$k = \sqrt{3}$ のとき，

$$r = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + 3) \quad (0 \leqq \alpha \leqq \pi)$$



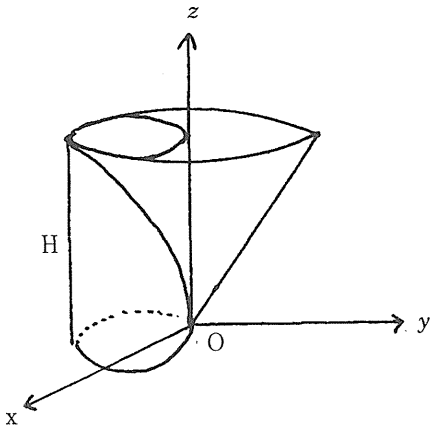
【発展５】円すいに，円柱を突きさす

円すいの底円の中心を通り，半径$\frac{1}{2}$の底円をもつ円柱をHとすると，

$$H : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

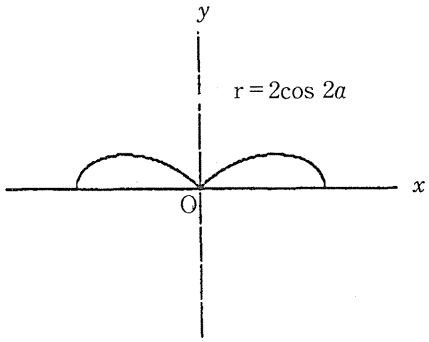
上の式に⑥を代入して整理すると，

$$r = \sqrt{k^2 + 1}\cos\left(\sqrt{k^2 + 1}\ \alpha\right)$$



（例１）　$k = \sqrt{3}$のとき，

$$r = 2\cos 2\alpha \quad \left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi \leqq \alpha \leqq \pi\right)$$



３．授業への活用

（１）分野

高校数学Ⅰ「三角比」，数学Ｃ「いろいろな曲線」等

（２）留意点

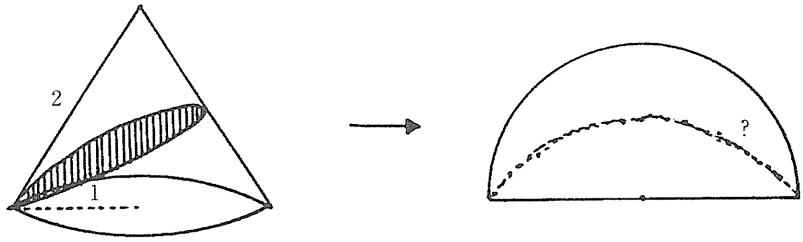
課題について考察した後，コンピュータ等を利用して曲線のグラフを描き，実際に模型を作らせたい。

さらに発展課題についても，いろいろな場合を考えさせて，模型を作らせたい。

はばたき曲線

1．課題

底円の半径が1，母線の長さ2の円すいを，図のように，母線の中点を通る平面で切断して，その後で展開すると，切り口の線はどのような曲線になるだろうか？



［解答］切り口の曲線上の点をPとし，以下図1のように，記号を定める。

さらに，円すいを母線OAで展開して，図2のように座標軸を設定し，∠POA＝θとする。

図1

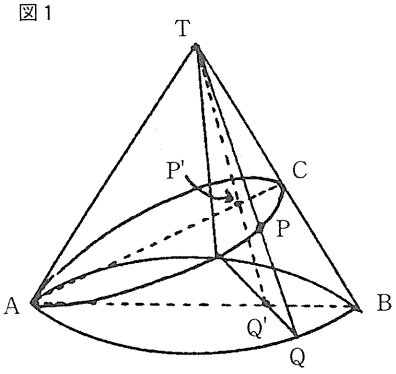


図2

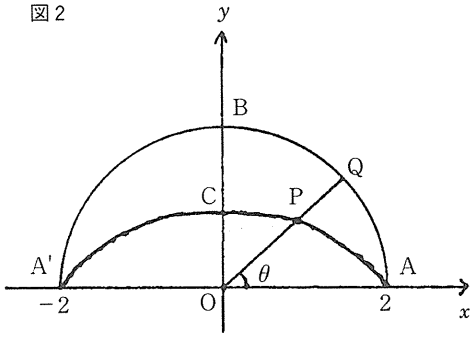


図3

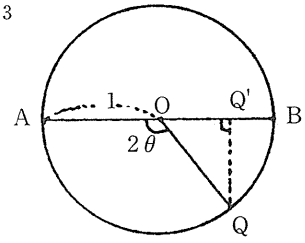


図4

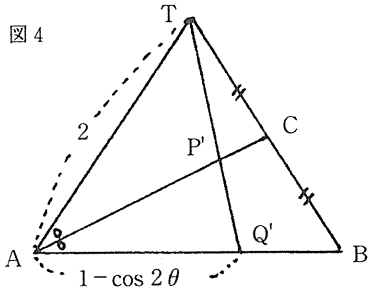


図1を真上，正面からそれぞれ見た図を，図3，図4とすると，

図3で，$\overset{\frown}{AQ}=2\theta$だから，$\angle AOQ=2\theta$

よって，$AQ'=1-\cos 2\theta$

図4で，ACは∠Aの2等分線だから，

$$TP' : P'Q' = AT : AQ'$$
$$= 2 : 1-\cos 2\theta$$

よって，$TP : TQ = TP' : TQ'$
$$= 2 : 3-\cos 2\theta$$

図2で，Q（$2\cos\theta$，$2\sin\theta$）だから，

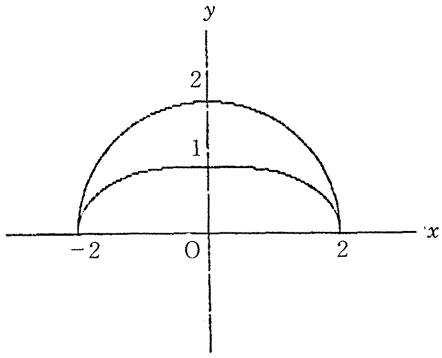
P（x，y）とすると，

$$x = \frac{TP}{TQ} \times 2\cos\theta = \frac{4\cos\theta}{3-\cos 2\theta}$$

$$y = \frac{TP}{TQ} \times 2\sin\theta = \frac{4\sin\theta}{3-\cos 2\theta}$$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

この曲線のグラフは，右のようになる。



2．課題の一般化・発展

【一般化】円すいの母線の長さをRとし，切断する平面をいろいろ変える

図1'で，CDを通る平面で切断するとし，BD＝dとする。

図1'

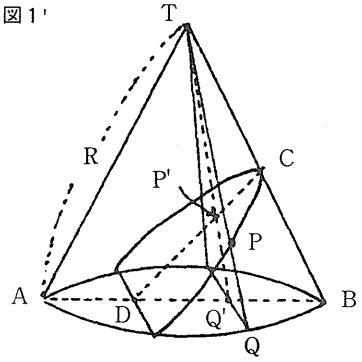
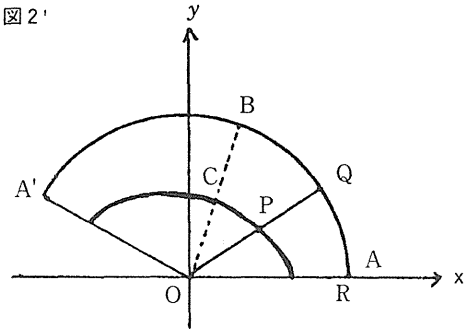


図2'



R＝2の場合と同様に考えると，

図3'で，$\overset{\frown}{AQ} = R\theta$ だから，$\angle AOR = R\theta$

よって，$AQ' = 1 - \cos R\theta$

図4'で，メネラウスの定理を用いると，

$$\frac{DQ'}{d} \cdot \frac{TQ'}{P'Q'} \cdot \frac{CB}{TC} = 1$$

よって，$\dfrac{TQ'}{P'Q'} = \dfrac{d}{DQ'} = \dfrac{d}{d-1-\cos 2\theta}$

ゆえに，$TP : TQ = TP' : TQ'$

$= d : 2d - 1 - \cos 2\theta$

図2'で，Q（$R\cos\theta$，$R\sin\theta$）だから，

P（x，y）とすると，

$$x = \frac{Rd\cos\theta}{2d-1-\cos R\theta}$$

$$y = \frac{Rd\sin\theta}{2d-1-\cos R\theta}$$

図3'

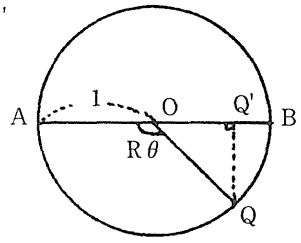
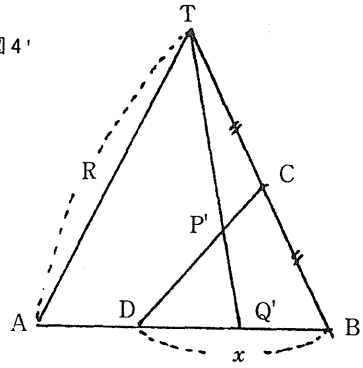


図4'



（例１）　R＝２，d＝$\frac{1}{2}$のとき，$x=-\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$，$y=-\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$

（例２）　R＝２，d＝１のとき，$x=\frac{2\cos\theta}{1-\cos 2\theta}$，$y=\frac{2\sin\theta}{1-\cos 2\theta}$

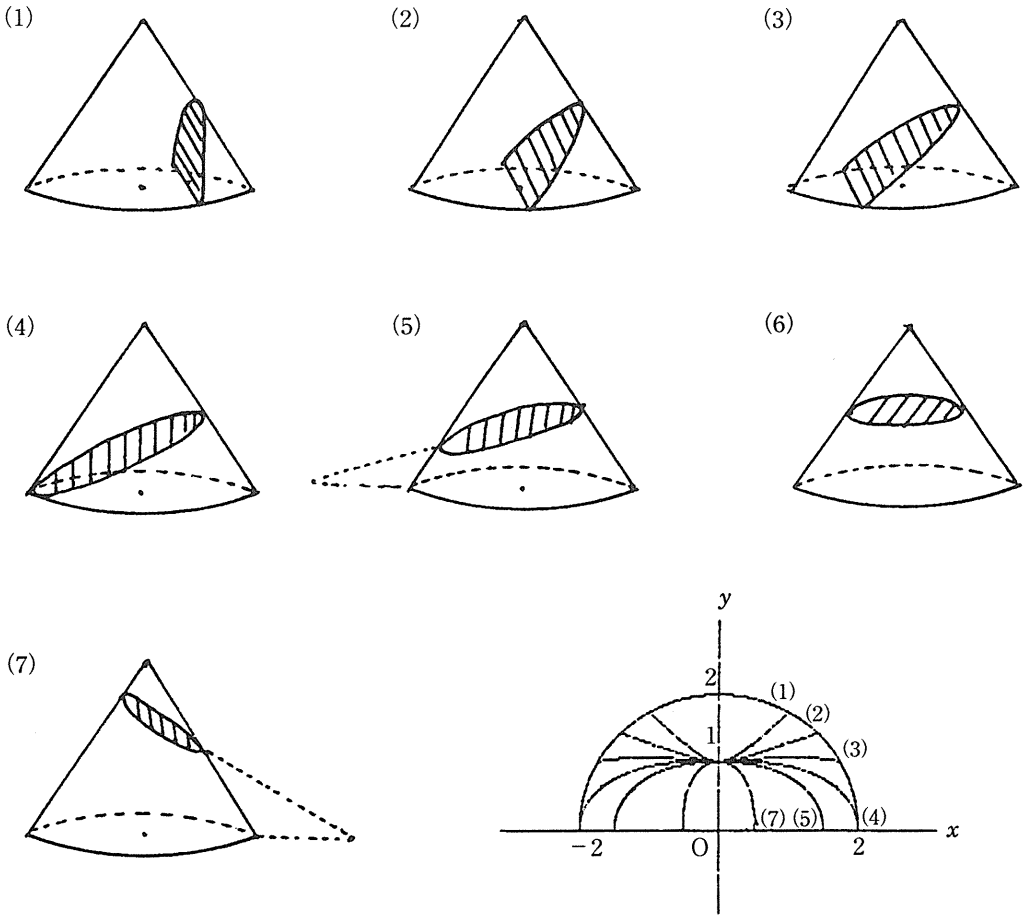
（例３）　R＝２，d＝$\frac{3}{2}$のとき，$x=\frac{3\cos\theta}{2-\cos 2\theta}$，$y=\frac{3\sin\theta}{2-\cos 2\theta}$

（例４）　R＝２，d＝２のとき，$x=\frac{4\cos\theta}{3-\cos 2\theta}$，$y=\frac{4\sin\theta}{3-\cos 2\theta}$

（例５）　R＝２，d＝３のとき，$x=\frac{6\cos\theta}{5-\cos 2\theta}$，$y=\frac{6\sin\theta}{5-\cos 2\theta}$

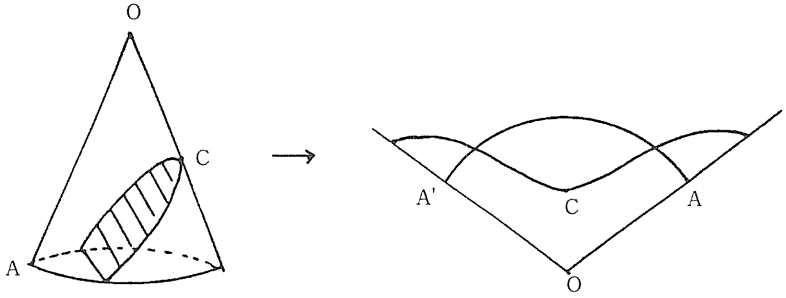
（例６）　R＝２，d→∞のとき，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$〈半径１の円〉

（例７）　R＝２，d＝－１のとき，$x=\frac{2\cos\theta}{3+\cos 2\theta}$，$y=\frac{2\sin\theta}{3+\cos 2\theta}$

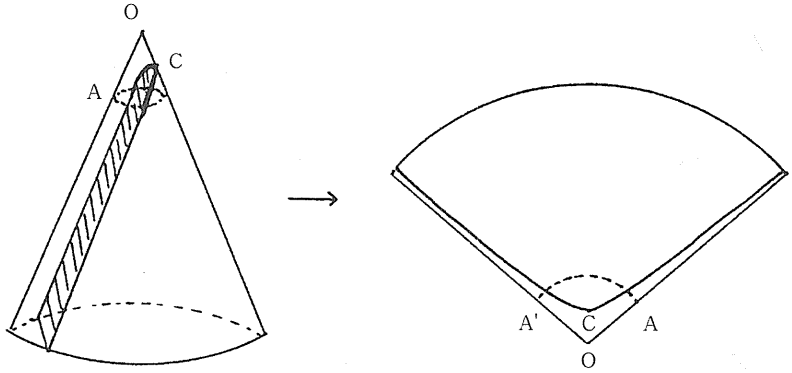


【発展１】切断面と，はばたき曲線との関係

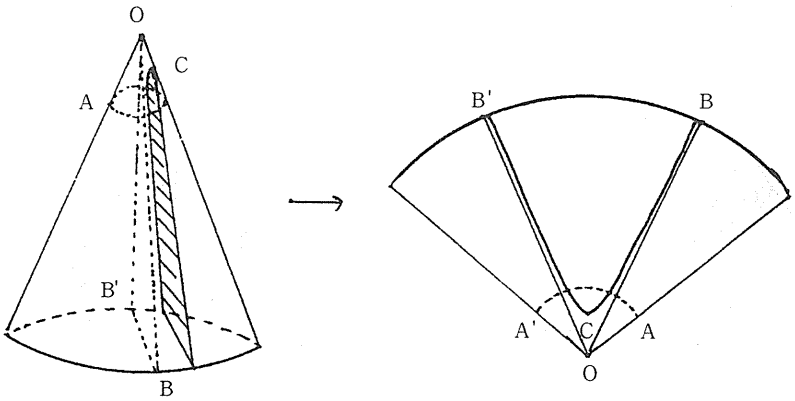
① 切断面が楕円のとき（ｄ＞１）　→　曲線は，ＯＡ，ＯＡ'と交わる
曲線は，母線ＯＡと交わる。



② 切断面が放物線のとき（ｄ＝１）　→　曲線は，ＯＡ，ＯＡ'を漸近線にもつ
円すいを下方に延ばして考えると，曲線は母線ＯＡに近づくことがわかる。

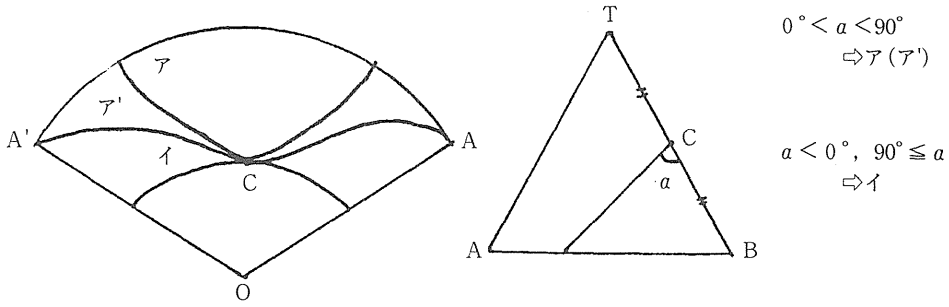


③ 切断面が双曲線のとき（ｄ＜１）　→　曲線は，ＯＢ，ＯＢ'を漸近線にもつ
円すいを下方に延ばして考えると，曲線は頂点Ｏを通り切断面と平行な平面によってできる２直線ＯＢ，ＯＢ'に近づくことがわかる。



【発展２】はばたき曲線の違い

図５で，曲線がアのようになるか，イのようになるかは，母線と切断面とのなす角 α が，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ かそうでないかによって決まる。



［証明］曲線の式を，曲座標表示により，$r = f(\theta)$ の形にすると

$$r = \frac{Rd}{2d - 1 - \cos R\theta} \quad (= f(\theta) \text{ とおく})$$

このとき，$f'(\theta) = -\dfrac{R^2 d \sin R\theta}{(2d - 1 - \cos R\theta)^2}$

$$f''(\theta) = -\frac{R^3 d}{(2d - 1 - \cos R\theta)^3} \times \{(2d - 1)\cos R\theta - (\cos R\theta)^2 - 2(\sin R\theta)^2\}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{R}$（つまり，$R\theta = \pi$）のとき，

$$f\left(\frac{\pi}{R}\right) = \frac{R}{2},\quad f'\left(\frac{\pi}{R}\right) = 0,\quad f''\left(\frac{\pi}{R}\right) = \frac{R^3}{4d}$$

曲線の凹凸は，

$$(f(\theta))^2 + 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)\ f''(\theta)$$

の符号を調べればよい。*2

$$\left(f\left(\frac{\pi}{R}\right)\right)^2 + 2\left(f'\left(\frac{\pi}{R}\right)\right)^2 - f\left(\frac{\pi}{R}\right) f''\left(\frac{\pi}{R}\right) = \frac{R^2}{4d}\left(d - \frac{R^2}{2}\right)$$

よって，$0 < d < \dfrac{R^2}{2}$ のとき，曲線は下に凸となり，アのようになる。

$d < 0$，$\dfrac{R^2}{2} \leqq d$ のとき，曲線は上に凸となり，イのようになる。

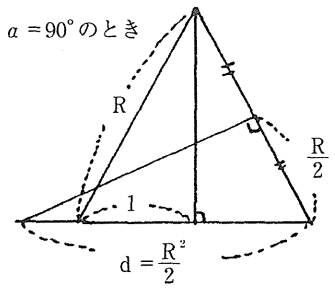
一方，右図からわかるように，母線と切断面のなす角 α が

$\alpha \geqq 90^\circ$ のとき，$d \geqq \dfrac{R^2}{2}$

$0 < \alpha < 90^\circ$ のとき，$0 < d < \dfrac{R^2}{2}$

$\alpha < 0^\circ$ のとき，$d < 0$

したがって，題意は成立する。



3．授業への活用

（1）分野

高校数学Ⅰ「図形と計量」，数学C「いろいろな曲線」等

（2）留意点

課題について考察した後，コンピュータ等を利用して曲線のグラフがどうなるかを観察したい。また，実際に模型を作って，確認してもよい。

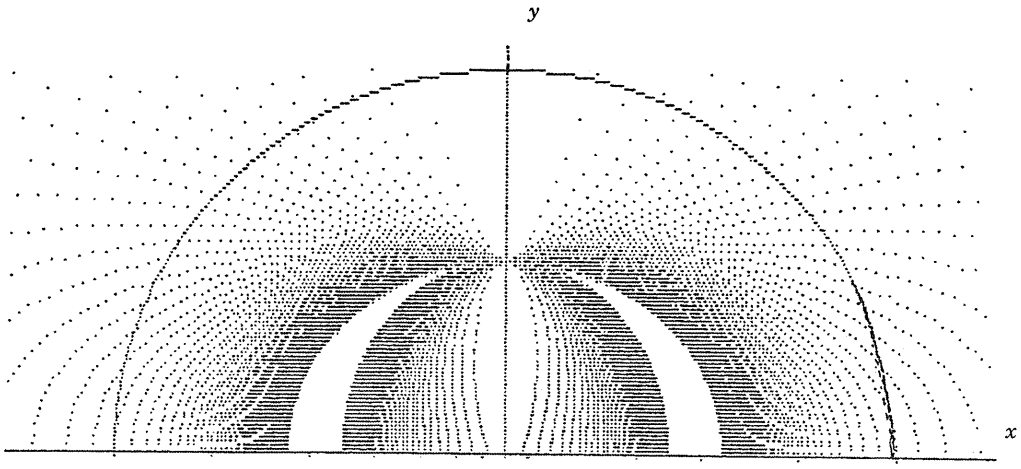
＊1　曲線の様子が，鳥の羽の「はばたき」に似ていることから，我々は「はばたき曲線」と名付けた。

＊2　一般に，$r = f(\theta)$ のとき，

$(f(\theta))^2 + 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta) > 0$　ならば，上に凸

$(f(\theta))^2 + 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta) < 0$　ならば，下に凸

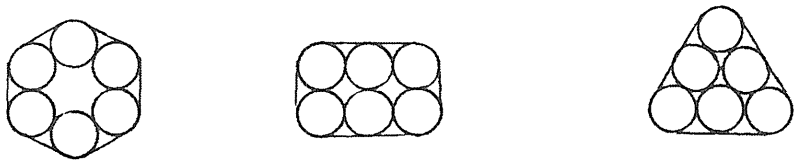
の曲線となる。



円柱を縛る

1．課題

同じ大きさの６個の円柱を，ひもできつく縛るとき，断面の形はどうなるだろうか？

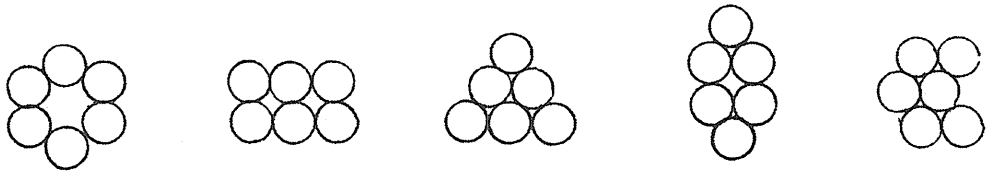


［解答］ひもの囲む図形の周の長さが最小になる場合を考える。また，周の長さが最小になる図形が複数ある場合は，その中で面積最小のものを考える。

（以下，発展・一般化でも同様に考える）

６個の円柱は，互いにできるだけ接している方がよいので，考えられるものとしては，次の５つがあげられる。

ア　イ　ウ　エ　オ



円柱の底円の直径を１として，それぞれの場合に周の長さを計算する。

いずれの場合も，周の長さは，

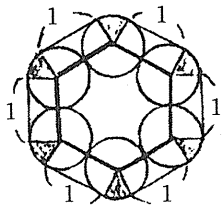
（ひもの触れる円の中心間距離の和）＋（１円周分）

で計算できる。

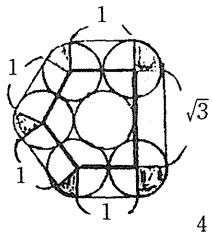
ア～エの場合　……　$6+\pi$

オ　の場合　……　$4+\sqrt{3}+\pi$

$6>4+\sqrt{3}$だから，周の長さが最小になるのは，オの場合である。



$6+\pi$



$4+\sqrt{3}+\pi$

2．課題の一般化・発展

【発展１】円柱の個数を，７～９個にする

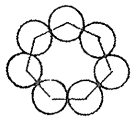
断面の形を考えるに当たっては，次の条件を満たすものの中から探す。

① ひもの触れる外側の円の数を，できるだけ少なくする
（ひもの触れない内側の円の数を，できるだけ多くする）
② 全体の形を，できるだけ円に近いものとする
③ １つの円が，できるだけ多くの円と接するようにする

円柱の個数をｎとして，順次調べる。

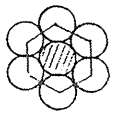
（１） ｎ＝７のとき

ア



$7+\pi$

イ

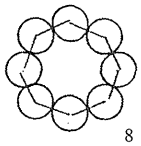


$6+\pi$

よって，イの形が最小になる。

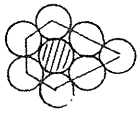
（２） ｎ＝８のとき

ア



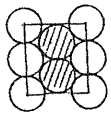
$8+\pi$

イ



$7+\pi$

ウ

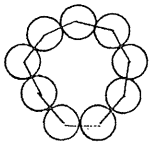


$6+2\sqrt{3}+\pi$

よって，イの形が最小になる。

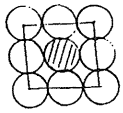
（３） ｎ＝９のとき

ア



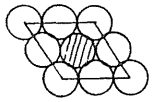
$9+\pi$

イ



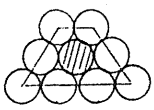
$8+\pi$

ウ



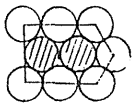
$8+\pi$

エ



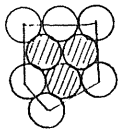
$8+\pi$

オ



$6+\sqrt{3}+\pi$

カ



$3+3\sqrt{3}+\pi$

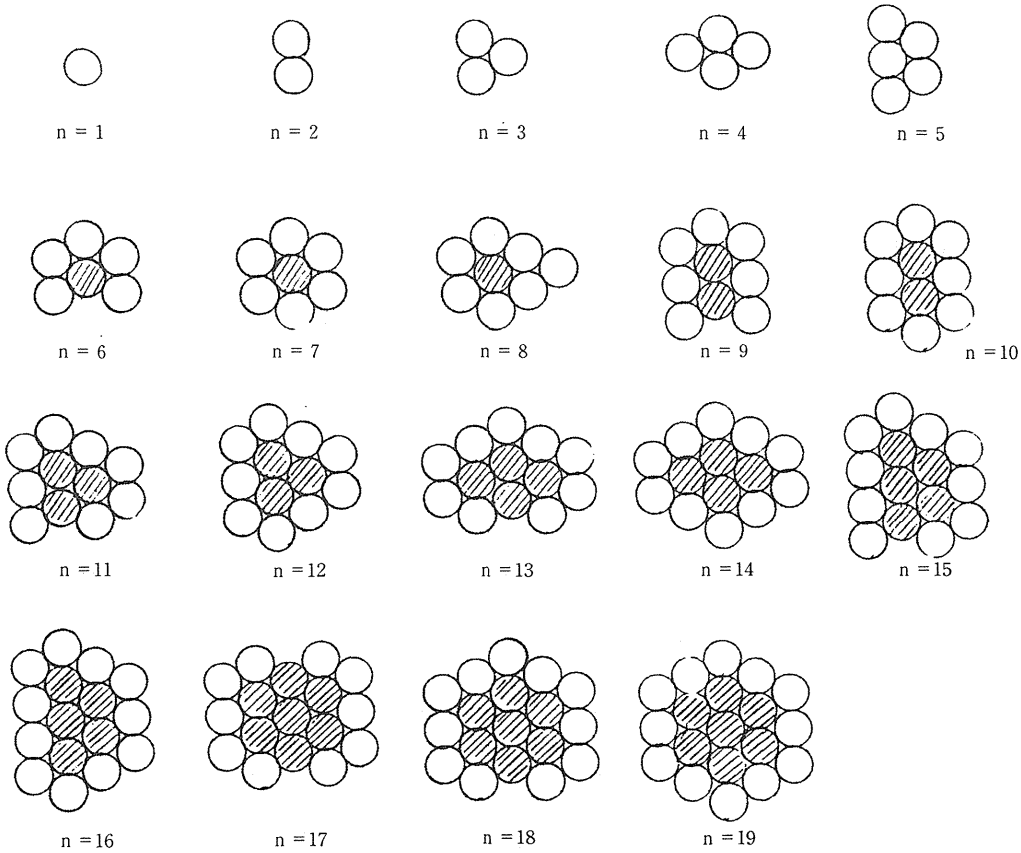
よって，オの形が最小になる。

【一般化】円柱の個数を，n 個にする[*1]

発展１と同様にして，n ＝１，２，３，……の場合に調べた結果は，次の図１の通りである。

（図で，ひもの触れない内側の円に，斜線をつけた）

図１



また，各ｎの場合の，周の長さ，およびひもの触れない内側の円の数は，表１の通りである。

表１（円柱の数ｎ）と，（周の長さ）（ひもの触れない内側の円の数）

円＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1				$4+\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{3}$	$\underline{4+\sqrt{3}}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	8	9
2							$2+4\sqrt{3}$	$4+2\sqrt{3}$	$\underline{6+\sqrt{3}}$	$\boxed{8}$
3									$3+3\sqrt{3}$	$5+2\sqrt{3}$
4										$2+4\sqrt{3}$

円＼n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	$\underline{7+\sqrt{3}}$	$\boxed{9}$	10	11	12	13	14	15	16
4	$4+3\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{3}$	$\underline{8+\sqrt{3}}$	$\boxed{10}$	11	12	13	14	15
5		$3+4\sqrt{3}$	$5+3\sqrt{3}$	$7+2\sqrt{3}$	$\underline{9+\sqrt{3}}$	$\boxed{11}$	12	13	14
6			$2+5\sqrt{3}$	$4+4\sqrt{3}$	$6+3\sqrt{3}$	$8+2\sqrt{3}$			
7			$6\sqrt{3}$	$2+5\sqrt{3}$	$4+4\sqrt{3}$	$6+3\sqrt{3}$	$\underline{8+2\sqrt{3}}$	$\underline{10+\sqrt{3}}$	$\boxed{12}$

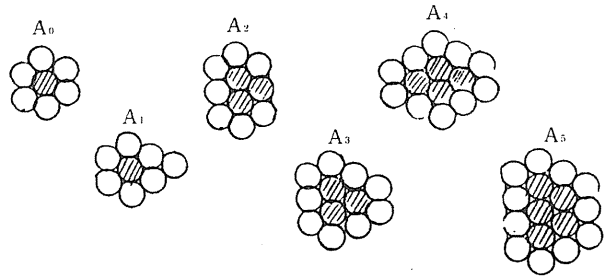
注１　周の長さは，底円の直径を１として計算した。ただし，$+\pi$はすべてにつくので省略した。
注２　□（囲み），または＿（下線）が，周の長さが最小の場合を表す。
（□＜囲み＞は完全型，＿＜下線＞は不完全型を表す）

断面の形の分類

① 完全型

図1で，n＝7，10，12，14，16，19のように，周の部分が完全に囲まれているものを，完全型と呼ぶことにする。完全型は，ひもの触れない内側の図形の形によって，次の6つに分類できる。

n＝（1，）7，19 ～ A_0型
n＝（1，）8 ～ A_1型
n＝2，10 ～ A_2型
n＝3，12 ～ A_3型
n＝4，14 ～ A_4型
n＝5，15 ～ A_5型



完全型A_kの円柱の本数をn_kとすると，次の通りである。

$n_0 = 3m^2 - 3m + 1$ ，　$n_1 = 3m^2 - 2m$
$n_2 = 3m^2 - m$ ，　$n_3 = 3m^2$　（mは自然数）
$n_4 = 3m^2 + m$ ，　$n_5 = 3m^2 + 2m$

上の式をまとめて表せば

$$n_k = \begin{cases} 3m^2 + (k-3)m & (k \neq 0) \\ 3m^2 + (k-3)m + 1 & (k = 0) \end{cases}$$

また，A_kの周の長さをL（A_k）とすると，

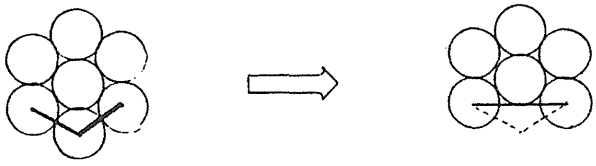
$L(A_k) = 6(n-1) + k + \pi$

② 不完全型

図1で，n＝9，11，13，15，17，18のように，完全型から，周の長さが短くなるようにいくつかの円柱を除いたものを，不完全型と呼ぶことにする。

完全型A_kからp個の円を除いた不完全型をN_pA_kとし，N_pA_kの周の長さをL（N_pA_k）とすると，小さいp（≦6）に対しては，次の式が成り立つ。

$L(N_pA_k) = 6(n-1) + k + \pi + p(\sqrt{3} - 2)$



$l + 2$　　$l + (\sqrt{3} - 2)$

断面の形は，完全型か不完全型になる。

円柱の個数が，次のア，イの各場合に，断面の形，およびそのときの周の長さLは，以下のように求められる。*2

ア　$n = n_k$のとき

・$n_{k-1} - n_k \leqq 3$　⇒　断面の形は，完全型A_k

$$L = L(A_k)$$
$$= 6(n-1) + k + \pi$$

・$4 \leqq n_{k-1} - n_k \leqq 6$　⇒　断面の形は，不完全型N_pA_{k-1}（$p = n_{k-1} - n_k$）

$$L = L(N_pA_{k-1})$$
$$= 6(n-1) + k + 1 + \pi + p(\sqrt{3} - 2)$$

イ　$n_k < n < n_{k-1}$のとき

・$1 \leqq n_{k-1} - n \leqq 6$　⇒　断面の形は，不完全型N_pA_{k-1}（$p = n_{k-1} - n$）

$$L = L(N_pA_{k-1})$$
$$= 6(n-1) + k + 1 + \pi + p(\sqrt{3} - 2)$$

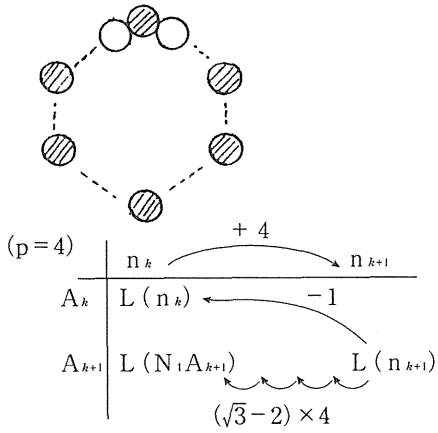
〈考え方〉１つの円を除いたときに，$\sqrt{3} - 2$だけ周の長さが短くなるような場合は，最大６箇所である。（ｎが大きくなると，完全型はすべて６角形になり，それぞれの角を除くときに，$\sqrt{3} - 2$だけ周の長さが短くなる）

$\sqrt{3} - 2 = -0.2679492\cdots\cdots$

だから，

$(\sqrt{3} - 2) \times 3 > -1 > (\sqrt{3} - 2) \times 4$

よって，n_kとn_{k-1}との差が４以上であれば，不完全型N_pA_{k-1}の方が，周の長さが短くなる。



３．授業への活用

（１）分野

中学３年・課題学習，高校数学１「図形と計量」等

（２）留意点

課題について考察した後，実際に円柱を使って，実験したい。

さらに発展課題についても，いろいろな場合を考えさせて，模型を作らせたい。

また，完全型について，円柱の個数やそのときの周の長さを求める課題を設定することも考えられる。

＊１　この問題は，中西知真紀氏（東京・狛江一中）より教わった。

＊２　その他のｎについては，未検討である。

総当たり戦の成積表

1．課題

nチームで総当たり戦を行うとき，勝敗の別れ方は何通りあるか。
ただし，引き分けはなく，チームに区別はつけないものとする。

ex）n＝3　のときは，〈勝数，負数〉で表すと，
〈2，0〉，〈1，1〉，〈0，2〉
〈1，1〉，〈1，1〉，〈1，1〉　の2通り。

［解答］昨年までのJリーグの成積表（1995年より勝点制が導入され変更となった）から発想した課題であるが，現在も検討中であり，一般解を見出していない。

勝数と負数の和は一定なので，勝数のみを大きい順に（）でくくって表すことにする。
すなわち，n＝3のときの

〈2, 0〉，〈1, 1〉，〈0, 2〉は（2, 1, 0）
〈1, 1〉，〈1, 1〉，〈1, 1〉は（1, 1, 1）　と表す。

n＝4，5，6，7　についての解は次の通りである。

n＝4のとき，

(3, 2, 1, 0)
(3, 1, 1, 1)
(3, 2, 2, 0)
(2, 2, 1, 1)　の4通り

n＝5のとき

(4, 3, 2, 1, 0)
(4, 3, 1, 1, 1)
(4, 2, 2, 2, 0)
(4, 2, 2, 1, 1)
(3, 3, 3, 1, 0)
(3, 3, 2, 2, 0)
(3, 3, 2, 1, 1)
(3, 2, 2, 2, 1)
(2, 2, 2, 2, 2)　　の9通り。

n＝6のとき，

(5, 4, 3, 2, 1, 0)
(5, 4, 3, 1, 1, 1)
(5, 4, 2, 2, 2, 0)
(5, 4, 2, 2, 1, 1)
(5, 3, 3, 3, 1, 0)
(5, 3, 3, 2, 2, 0)
(5, 3, 3, 2, 1, 1)
(5, 3, 2, 2, 2, 1)
(5, 2, 2, 2, 2, 2)

(4, 4, 4, 2, 1, 0)
(4, 4, 4, 1, 1, 1)
(4, 4, 3, 3, 1, 0)
(4, 4, 3, 2, 2, 0)
(4, 4, 3, 2, 1, 1)
(4, 4, 2, 2, 2, 1)
(4, 3, 3, 3, 2, 0)
(4, 3, 3, 3, 1, 1)
(4, 3, 3, 2, 2, 1)
(4, 3, 2, 2, 2, 2)

(3, 3, 3, 3, 3, 0)
(3, 3, 3, 3, 2, 1)
(3, 3, 3, 2, 2, 2)

の22通り

n = 7 のとき,

(6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)	(5, 5, 5, 3, 2, 1, 0)	(4, 4, 4, 4, 4, 1, 0)	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
(6, 5, 4, 3, 1, 1, 1)	(5, 5, 5, 3, 1, 1, 1)	(4, 4, 4, 4, 3, 2, 0)	
(6, 5, 4, 2, 2, 2, 0)	(5, 5, 5, 2, 2, 2, 0)	(4, 4, 4, 4, 3, 1, 1)	
(6, 5, 4, 2, 2, 1, 1)	(5, 5, 5, 2, 2, 1, 1)	(4, 4, 4, 4, 2, 2, 1)	
(6, 5, 3, 3, 3, 1, 0)	(5, 5, 4, 4, 2, 1, 0)	(4, 4, 4, 3, 3, 3, 0)	
(6, 5, 3, 3, 2, 2, 0)	(5, 5, 4, 4, 1, 1, 1)	(4, 4, 4, 3, 3, 2, 1)	
(6, 5, 3, 3, 2, 1, 1)	(5, 5, 4, 3, 3, 1, 0)	(4, 4, 4, 3, 2, 2, 2)	
(6, 5, 3, 2, 2, 2, 1)	(5, 5, 4, 3, 2, 2, 0)	(4, 4, 3, 3, 3, 3, 1)	
(6, 5, 2, 2, 2, 2, 2)	(5, 5, 4, 3, 2, 1, 1)	(4, 4, 3, 3, 3, 2, 2)	
(6, 4, 4, 4, 2, 1, 0)	(5, 5, 4, 2, 2, 2, 1)	(4, 3, 3, 3, 3, 3, 2)	
(6, 4, 4, 4, 1, 1, 1)	(5, 5, 3, 3, 3, 2, 0)		
(6, 4, 4, 3, 3, 1, 0)	(5, 5, 3, 3, 3, 1, 1)		
(6, 4, 4, 3, 2, 2, 0)	(5, 5, 3, 3, 2, 2, 1)		
(6, 4, 4, 3, 2, 1, 1)	(5, 5, 3, 2, 2, 2, 2)		
(6, 4, 4, 2, 2, 2, 1)	(5, 4, 4, 4, 3, 1, 0)		
(6, 4, 3, 3, 3, 2, 0)	(5, 4, 4, 4, 2, 2, 0)		
(6, 4, 3, 3, 3, 1, 1)	(5, 4, 4, 4, 2, 1, 1)		
(6, 4, 3, 3, 2, 2, 1)	(5, 4, 4, 3, 3, 2, 0)		
(6, 4, 3, 2, 2, 2, 2)	(5, 4, 4, 3, 3, 1, 1)		
(6, 3, 3, 3, 3, 3, 0)	(5, 4, 4, 3, 2, 2, 1)		
(6, 3, 3, 3, 3, 2, 1)	(5, 4, 4, 2, 2, 2, 2)		
(6, 3, 3, 3, 2, 2, 2)	(5, 4, 3, 3, 3, 3, 0)		
	(5, 4, 3, 3, 3, 2, 1)		
	(5, 4, 3, 3, 2, 2, 2)		
	(5, 3, 3, 3, 3, 3, 1)		
	(5, 3, 3, 3, 3, 2, 2)		の59通り

以上，いずれも

＼	○	○	○
×	＼	○	○
×	×	＼	○
×	×	×	＼

のような対戦結果の表は省略した。

なお，上の一覧は次の事を考えて書き出した。

1．各チームの試合数（勝数の最大数）はｎ－１。

2．総試合数（勝数の合計）は${}_nC_2$＝ｎ（ｎ－１）／２。

3．全勝（勝数ｎ－１）は１チームのみ。

また，全勝チームがあるとき，それ以外のｎ－１チームの間の勝数についても同様の事がいえる。（例えば，（ｎ－１，ｎ－２，ｎ－２，・・・）（ｎ－１，ｎ－２，ｎ－３，ｎ－３，・・・）・・などはあり得ない）

4．全敗（勝数0）は1チームのみ。
また，全敗チームがあるとき，それ以外のn－1チームの間の勝数についても同様の事が言える。(例えば，(・・・，1，1，0)　(・・・，2，2，1，0)・・などはあり得ない)

2．課題の一般化・発展

同種の事を行う問題として次のものが考えられる。

自然数nを自然数の和に分割する方法は何通りあるか。

これは，次の様に表現することもできる。

n個の飴をn人の兄弟で分配する。自分の前の人が取った数を越えないようにして，年上の人から順に取っていくとき，分配の方法は何通りあるか。

例）　$2=\begin{cases}2\\1+1\end{cases}$　の2通り

$3=\begin{cases}3\\2+1\\1+1+1\end{cases}$　の3通り。

$4=\begin{cases}4\\3+1\\2+2\\2+1+1\\1+1+1+1\end{cases}$　の5通り。

$5=\begin{cases}5\\4+1\\3+2\\3+1+1\\2+2+1\\2+1+1+1\\1+1+1+1+1\end{cases}$　の7通り。

この問題の場合は条件がないので，

自然数nを分割する場合の数をS（n），

自然数nをk個に分割する場合の数をT（n，k）

とすると，つぎのような関係式を容易に導くことができる。

(0) S（1）＝1

S（2）＝T（2，1）＋T（2，2）＝2

S（3）＝T（3，1）＋T（3，2）＋T（3，1）＝3

・・・・・・・・・・

一般に　$S(n)=\sum_{k=1}^{n}T(n,k)$

また，T（n，k）について注目すると，

(1)　T（n，1）＝1

（2）　T（n，n）＝1

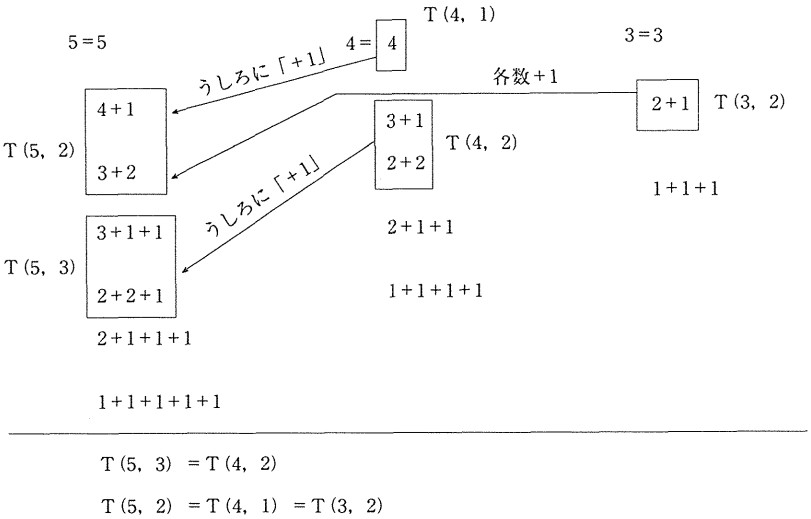
（3）　T（n，n－1）＝1

（4）　$T(n,\ 2) = \begin{cases} n/2 & (n：偶数) \\ (n-1)/2 & (n：奇数) \end{cases}$

（5）　k＞n／2のとき　T（n，k）＝T（n－1，k－1）

（6）　k≦n／2のとき　T（n，k）＝T（n－1，k－1）＋T（n－k，k）

∵）　n＝5，k＝2，3の場合



次に，T（n，k）とS（n）の関係について考えると，

（7）　k≧n／2のとき　T（n，k）＝S（n－k）

∵）まず，nのうち1ずつk個に分割し，残り　n－k　個を適当に分割すればよい。その数はS（n－k）である。

（7）においてnを2nに，kをnにすると，次の式を得る。

（8）　S（n）＝T（2n，n）

S（n）を求めるより簡単な漸化式については検討中である。

3．授業への活用

（1）分野

中学校　課題学習，高校数学Ⅰ「個数の処理」，高校数学A「数列」

（2）留意点

一般化は難しいが，具体的に数え上げることを通し，数え上げの原則の確認定着をはかるとともに，規則性を発見させたい。

ランダム・ウォーク

1．課題

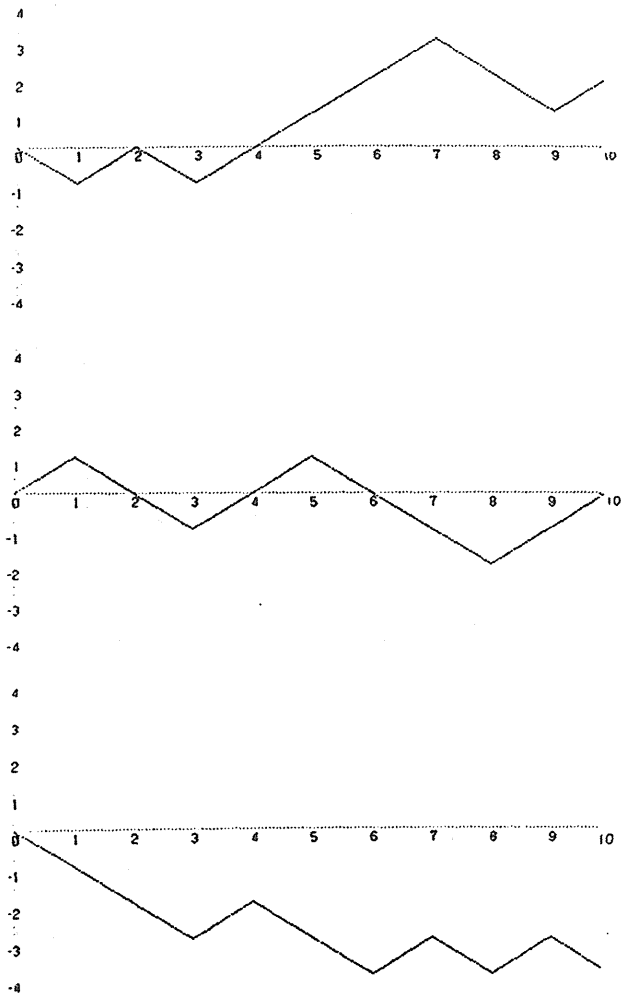
数値線上を，原点から出発して，１回につき$\frac{1}{2}$の確率で＋１，$\frac{1}{2}$の確率で－１だけ進むものとする。このとき，

（１）10回目に，原点に来る確率は？

（２）10回目に，はじめて原点に来る確率は？

（３）10回目までに，１回も原点に来ない確率は？

（コンピュータによるシミュレーション）



［解答］（1）すべての場合の数は，2^{10}（通り）

10回目に原点に来る場合の数は，10回中，＋1が5回，－1が5回だから，

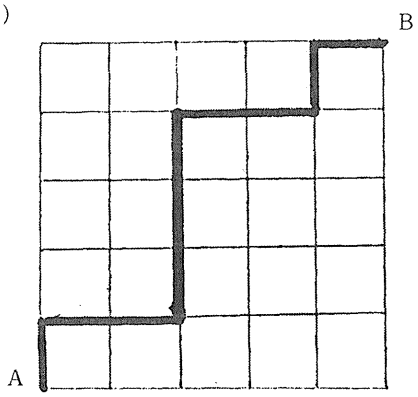
$${}_{10}C_5 \text{（通り）}$$

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_{10}C_5}{2^{10}}=\dfrac{252}{1024}=\dfrac{63}{256}$（＝0.246…）

（別解）10回目に原点に来る場合の数は，図1で，AからBまで最短で進む道の数に等しいので，その数を具体的に数えると，252通り。

よって，求める確率は，$\dfrac{252}{2^{10}}=\dfrac{63}{256}$

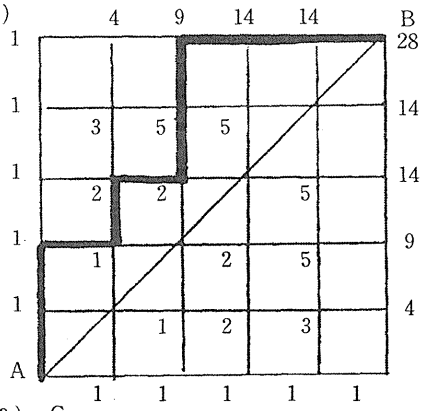
（図1）



（2）10回目にはじめて原点に来る場合の数は，（1）の別解と同様に考えて，図2で，AからBまで，AB上を通らずに最短でいく道の数に等しい。その数を具体的に数えると，28通り。

よって，求める確率は，$\dfrac{28}{2^{10}}=\dfrac{7}{256}$（＝0.027…）

（図2）



（3）10回目までに，1回も原点に来ない場合の数は，図3で，Aから，AB上の点を通らずに，（Bを除く）GH上に最短でくる道の数に等しい。

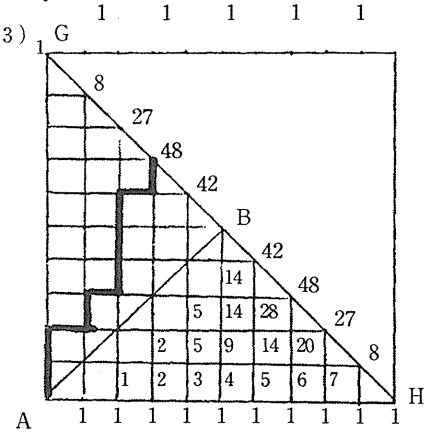
その数を具体的に数えると，

（1＋8＋27＋48＋42）×2＝252通り

よって，求める確率は，$\dfrac{252}{1024}=\dfrac{63}{256}$（＝0.246…）

（※（1）の結果と同じになる）

（図3）



2．課題の一般化・発展

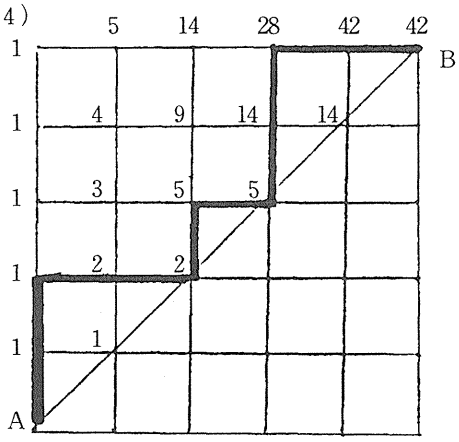
【発展】（２）' 10回目までに，負とならずに，10回目に原点に来る確率

10回目までに負とならずに，10回目に原点に来る場合の数は，図４で，ＡＢの右下を通らずに，ＡからＢまで最短でいく道の数に等しい。その数は具体的に数えると，42通り，

よって，求める確率は，$\frac{42}{1024}=\frac{21}{512}$（＝0.041…）

（上で求めた場合の数は，カタラン数に一致する。カタラン数は，一般にｎの場合${}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}$となる。）

（図４）



【一般化】10回を２ｎ回とする

（１）２ｎ回目に原点に来る確率P_{2n}

すべての場合の数は，2^{2n}（通り）

２ｎ回目に原点に来る場合の数は，＋１がｎ回，－１がｎ回だから，

${}_{2n}C_n$（通り）

よって，求める確率は，$P_{2n}=\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$

（２）２ｎ回目に，はじめて原点に来る確率Q_{2n}

２ｎ回目に，はじめて原点に来る場合の数は，図５で，ＡからＢまで，ＡＢ上の点を通らずに，最短でいく道の数に等しい。その数は，次の①と②の和であり，①と②の数は等しい。

① ＡＢの左上を通るＡ→Ｂの道

② ＡＢの右下を通るＡ→Ｂの道

また，①の場合の数は，次の③－④に等しい。

③ Ｃ→Ｄの道 …… ${}_{2n-2}C_{n-1}$

④ ＡＢと交わるＣ→Ｄの道

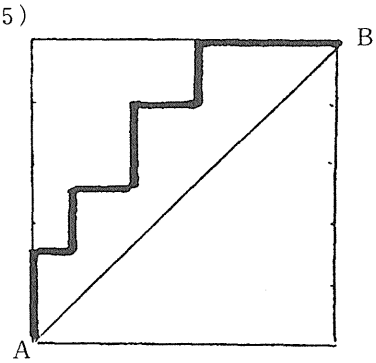
一方，④の場合の数は，次の⑤に等しい

⑤ Ｅ→Ｄの道 …… ${}_{2n-2}C_n$

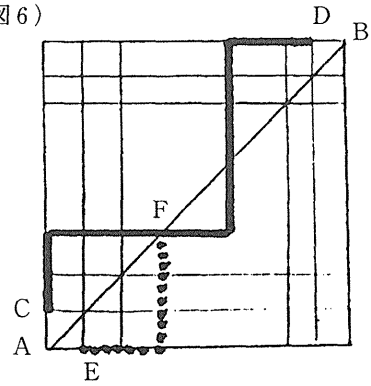
∵ 図６で，初めてＡＢと交わる点をＦとして，Ｃ→Ｆの道をＡＢに関して折り返した道Ｅ→Ｆを作ると，

Ｃ→Ｆ→Ｄ と Ｅ→Ｆ→Ｄ

（図５）



（図６）



は１対１に対応する。

よって，ＡからＢまで，ＡＢ上の点を通らずに，

最短でいく道の数は

$$({}_{2n-2}C_{n-1} - {}_{2n-2}C_{n}) \times 2 = \frac{2}{n}\,{}_{2n-2}C_{n-1}$$

よって，求める確率は，$Q_{2n} = \dfrac{{}_{2n-2}C_{n-1}}{2^{2n-1}n}$

（３）２ｎ回目までに，１回も原点に来ない確率R_{2n}

$$R_{2n} = 1 - Q_2 - Q_4 - \cdots - Q_{2n}$$

ここで，$P_{2n-2} - P_n = \dfrac{{}_{2n-2}C_{n-1}}{2^{2n-2}} - \dfrac{{}_{2n}C_{n}}{2^{2n}}$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!\,2^{2n-2}} - \frac{(2n)!}{n!\,n!\,2^{2n}}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!\,2^{2n-1}}$$

$$= Q_{2n}$$

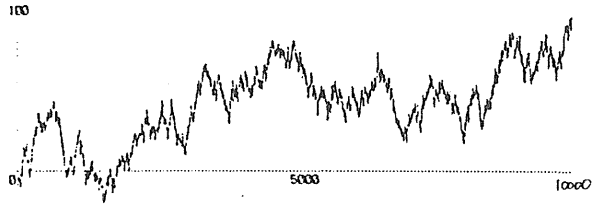
よって，$R_{2n} = 1 - (P_0 - P_2) - (P_2 - P_4) - \cdots - (P_{2n-2} - P_{2n})$

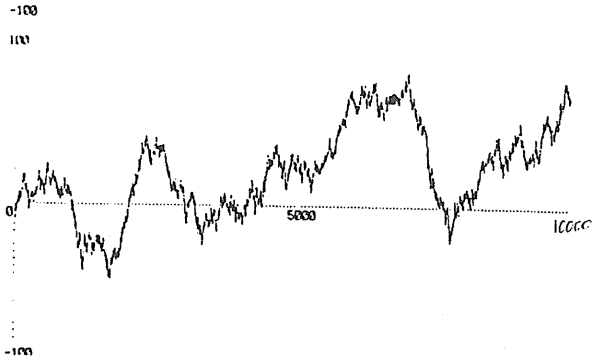
$$= 1 - P_0 + P_{2n} = P_{2n} \quad (\because\ P_0 = 1)$$

$$= \frac{{}_{2n}C_{n}}{2^{2n}}$$

（上の結果から，$n \to \infty$のとき，$R_{2n} \to 0$がわかる。つまり，何回も試行を行えば，いつかは原点に来るといえる。）

（例）ｎ＝10000のとき





【発展２】２ｎ回目までのうち，ｋ回原点に来る確率$S_{2n}(k)$（$k=0, 1, \cdots, n$）

結果のみを示す[*1]。

$$S_{2n}(k) = \frac{{}_{2n-k}C_n}{2^{2n-k}} \quad (S_{2n}(0) = R_{2n})$$

（例）　ｎ＝５のとき

k	0	1	2	3	4	5
$S_{10}(k)$	0.246	0.246	0.219	0.164	0.094	0.031

上の表から，０回または１回の確率が一番大きく，５回の確率が１番小さい。

このとこは，一般にも成り立ち，原点の回りを行ったり来たりするよりも，どちらか一方の側に行く確率の方が大きいことがわかる。

３．授業への活用

（１）分野

中学３年・課題学習（確率），高校数学Ⅰ「個数の処理」，「確率」等

（２）留意点

コンピューターによるシミュレーションを通して，予想したり，確認や納得をさせたい。

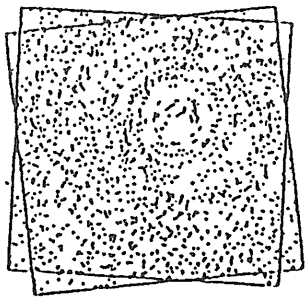
また，課題の一般化は難しいので，具体的な数で考えさせるとよい。

※１　詳細は，「現代数学レクチャーズＡ－３　確率」（培風館）を参考にした。

ランダムドットパターン＊

1．課題

ランダムに点を打った，ぴったり重なる２枚の長方形のＯＨＰシートがある。
この２枚をちょっとずらすと不思議なことに同心円が見えてくる。この中心は，どこにあるだろうか？



【解答】同一平面上にある，対応する辺が平行でない２つの合同な長方形ＡＢＣＤ，Ａ'Ｂ'Ｃ'Ｄ'の回転の中心Ｏは，対応する辺またはその延長上の交点を順にＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとすると，ＰＲとＱＳの交点である。

証明）線ＡＡ'の垂直二等分線上にＯがあること⇔ＯＡ＝ＯＡ'を示す。

ＰＲとＱＳの交点をＯとし，ＯからＡＢ，ＡＤへの垂線の足をＧ，Ｈ，ＯからＡ'Ｂ'，Ａ'Ｄ'への垂線の足をＧ'，Ｈ'とする。

⊿ＡＯＨ＝と⊿Ａ'ＯＨ'において

ＱからＡＤ，Ａ'Ｄ'に引いた垂線の長さはいずれもＡＢに等しいので

∠Ｈ'ＳＯ＝∠ＨＳＯ

よって，ＯＨ＝ＯＨ'　……①

同様にして，ＯＧ＝ＯＧ'

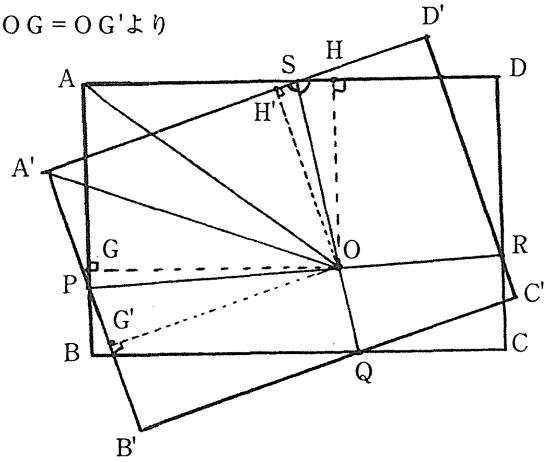
∠ＡＨＯ＝∠Ａ'Ｈ'Ｏ＝∠Ｒ　……②

また，ＨＡ＝ＯＧ，Ｈ'Ａ'＝ＯＧ'，ＯＧ＝ＯＧ'より

ＨＡ＝Ｈ'Ａ'　……③

ゆえに，⊿ＡＯＨ≡⊿Ａ'ＯＨ'

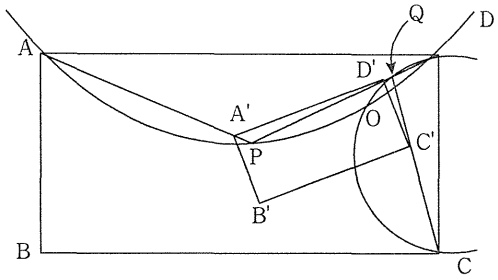
∴　ＯＡ＝ＯＡ'　（証明終り）

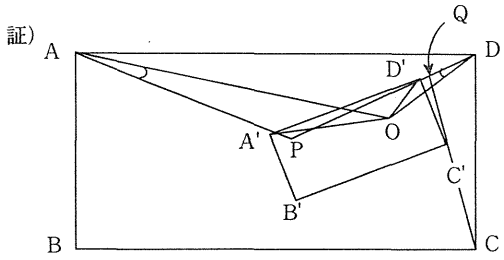


2．課題の一般化・発展

【発展１】相似な長方形の回転の中心

２つの相似な長方形ＡＢＣＤ，A'B'C'D'について，ＡＢＣＤの内部にA'B'C'D'があるときの不動点（拡大および回転の中心）は？





［解答］　不動点はＡA'とＤD'の交点をＰ，ＤD'とＣC'の交点をＱとすると，⊿ＡＰＤ及び⊿ＣＱＤの外接円の交点である。

証明）不動点をＯとすると，Ｏを中心とする回転と拡大の合成でA'B'C'D'はＡＢＣＤに重なる。したがって，⊿ＡＯＤ∽⊿A'ＯD'より，

ＡＯ：A'Ｏ＝ＯＤ：ＯD'

∠ＡＯＤ＝∠A'ＯD'

これより，⊿ＡＯA'∽⊿ＤＯD'

∴∠ＯＡA'＝∠ＯＤD'　……①

ここで，ＡA'とＤD'の交点をＰとすると，①より，∠ＯＡＰ＝∠ＯＤＰであるから，Ａ，Ｐ，Ｏ，Ｄは同一円周上にある。

すなわち，Ｏは⊿ＡＰＤの外接円上にある。

同様にして，Ｏは⊿ＤＱＣの外接円上にある。

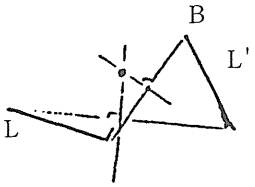
よって，⊿ＡＰＤ及び⊿ＣＱＤの外接円の交点がＯである。

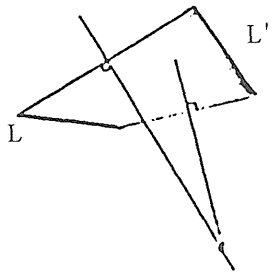
（証明終り）

【発展２】いろいろな図形の回転の中心

（１）平面上の合同な図形の回転の中心は？

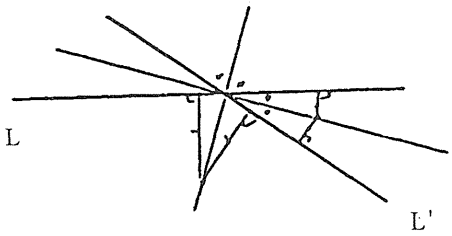
①長さの等しい二等分Ｌ，Ｌ'のとき，線分を結ぶ線分の垂直二等分線の交点





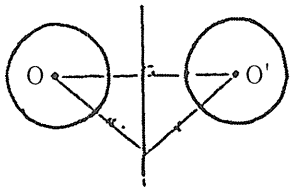
②二直線Ｌ，Ｌ'

Ｌ，Ｌ'のつくる角の二等分線



③半径の等しい円Ｏ，Ｏ'

線分ＯＯ'の垂直二等分線



④多角形

①と同様に考えて中心の個数は

	(1)正ｎ角形	(2)長方形	(3)二等辺三角形
平行な辺がないとき	ｎ個	２個	１個
平行な辺があるとき	ｎ－１個 or ｎ個	１個	１個 or ０個
重なっているとき	１個	１個	１個

4．授業への活用

（1）分野

中学3年，課題学習，高校数学A「初等幾何」など

（2）留意点

実際に，課題「ランダムドットパターン」については，2枚のＯＨＰシートを配布し実験させてから課題を提示すると良い。

また，発展課題についても，長方形にかかわらず生徒に自由に考えさせたい。

＊　この問題は，西山　豊「人とヒトデとサッカーボール」三省堂選書を参考にした。